

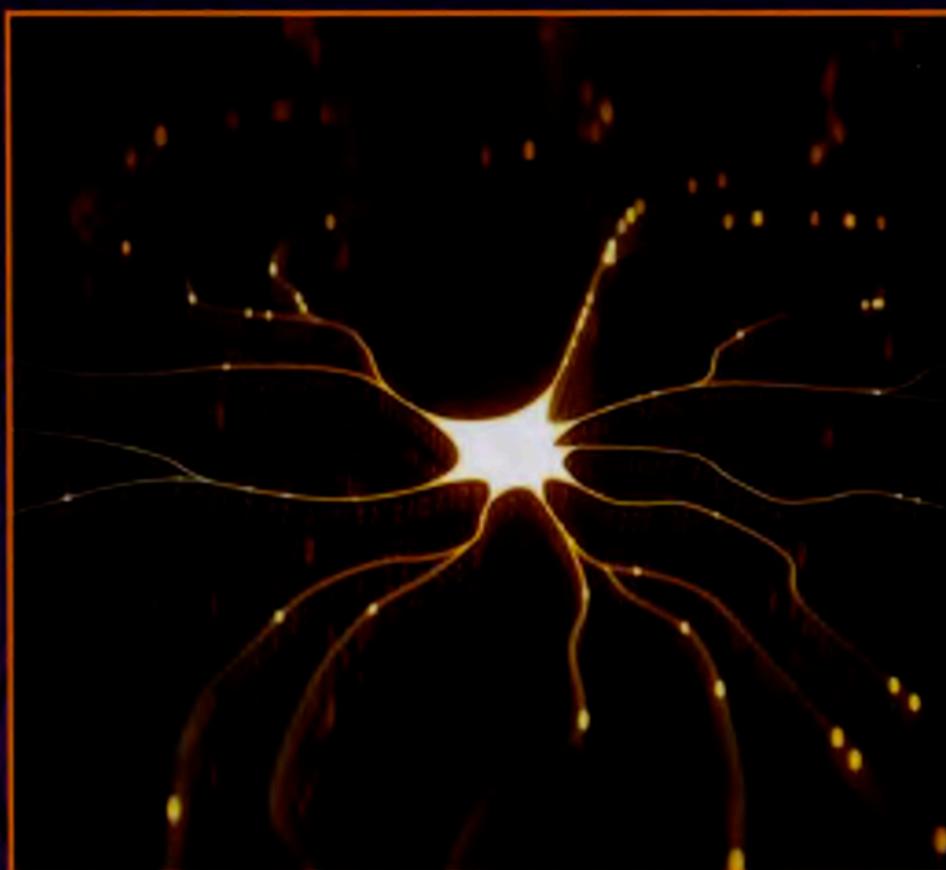
**Математические основы  
классической и квантовой теории интеллекта**

Под редакцией  
Лабунца В.Г.

**Лабунец В.Г., Часовских В.П.**

# **ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ МОЗГ КЛАССИЧЕСКИМ КОМПЬЮТЕРОМ, РАБОТАЮЩИМ В АЛГЕБРЕ КЛИФФОРДА?**

## **1. Математические основы теории**



**Екатеринбург**

**2022**

**Математические основы  
классической и квантовой теории интеллекта**

**Под редакцией  
Лабунца В.Г.**

**Лабунец В.Г., Часовских В.П.**

**ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ МОЗГ КЛАССИЧЕСКИМ  
КОМПЬЮТЕРОМ, РАБОТАЮЩИМ  
В АЛГЕБРЕ КЛИФФОРДА?**

**1. Математические основы теории**

**Екатеринбург**

**2022**

УДК 004.932 УДК 681.323

ББК 32.811.3

Л12



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № РФФИ № 19-29-09022\19.

Л12 Лабунец В.Г., Часовских В.П. Является ли мозг классическим компьютером, работающим в алгебре Клиффорда? Математические основы теории. М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Урал. гос. экон. ун-т. — Екатеринбург: Изд-во ООО «Акдениз», 2022. — 178 с.

ISBN 978-5-6045940-2-5

**Ключевые слова:** Обработка изображений, распознавание образов, алгебры Клиффорда, гиперспектральные изображения

Мы предлагаем новый теоретический подход для обработки многомерных изображений, основанный на математическом аппарате алгебры Клиффорда и теории гиперкомплексных чисел. Одна из главных целей этого проекта состоит в том, чтобы доказать, что аппарат алгебр Клиффорда более адекватно описывает процессы обработки и распознавания цветных и гиперспектральных изображений, чем векторно-матричный математический аппарат. В нашем подходе мы основываемся на следующих гипотезах:

1) Мозг животных оперирует с гиперкомплексными числами в процессе обработки и распознавания цветных и многокомпонентных изображений.

2) Для решения двух типов задач мозг животных использует два типа гиперкомплексных алгебр на двух уровнях головного мозга. А именно, он использует коммутативные мультиплетные алгебры для обработки цветных и многокомпонентных изображений на уровне сетчатки глаза и некоммутирующие алгебры Клиффорда - для распознавания таких изображений в высших отделах головного мозга (в так называемом отделе “Visual Cortex”).

3) Визуальные системы животных с различной эволюционной историей используют различные коммутативные гиперкомплексные алгебры и алгебры Клиффорда для обработки и распознавания цветных и гиперспектральных изображений.

Например, мозг человека использует триплетные алгебры для обработки цветных изображений и 8-мерные алгебры Клиффорда (бикватернионные алгебры и алгебры октонионов) для их распознавания. С этой точки зрения визуальные системы животных, состоящие из глаз и отдела “Visual Cortex” головного мозга, могут рассматриваться как “компьютеры, работающие в алгебрах Клиффорда”

УДК 004.932 УДК 681.323

ББК32.811.3

© Лабунец В.Г., Часовских В.П., 2022

© Уральский государственный

экономический университет, 2022

ISBN 978-5-6045940-2-5

## Оглавление

Предисловие .....	5
Г л а в а 1.....	10
ГЛАВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ .....	10
<b>1.1. Мультиспектральные и гиперспектральные изображения.....</b>	<b>10</b>
<b>1.2. Как головной мозг распознает объекты внешнего мира? .....</b>	<b>12</b>
<b>1.3. Что такое видение с алгебраической точки зрения? .....</b>	<b>16</b>
<b>1.4. Выводы .....</b>	<b>21</b>
Г л а в а 2.....	22
АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ 2D-, 3D ИЗОБРАЖЕНИЙ .....	22
<b>2.1. Главные предположения и постановка проблемы .....</b>	<b>23</b>
<b>2.2. Алгебро-геометрические модели 2D изображений.....</b>	<b>29</b>
2.2.1. Главные предположения и постановка проблемы .....	29
2.2.2. Алгебры 2D физического и перцептуального пространства.....	31
2.2.3. Геометрии 2D физического и перцептуального пространств .....	32
2.2.4. Алгебраические модели 2D серых изображений.....	36
2.2.5. Алгебраические модели 2D бихроматических изображений.....	38
<b>2.3. Алгебро-геометрические модели 3D- и 4D изображений .....</b>	<b>42</b>
2.3.1. Предварительные замечания .....	42
2.3.2. Классические кватернионы.....	46
2.3.3. Обобщенные кватернионные алгебры.....	51
2.3.4. Свойства обобщенных кватернионных алгебр.....	53
2.3.5. Кватернионные геометрии.....	56
2.3.6. Кватернионные геометрии физического и перцептуального пространств...59	
2.3.7. Алгебраические модели 4D цветных изображений .....	61
2.3.8. Алгебраические модели 3D изображений.....	64
Г л а в а 3.....	68
ТРИПЛЕТНЫЕ МОДЕЛИ ЦВЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ.....	68
<b>3.1. Цветные изображения.....</b>	<b>69</b>
3.1.1. Что есть цвет?.....	69
3.1.2. Векторное представление цвета .....	74

3.1.3. Векторное представление цветных изображений .....	75
<b>3.2. Триpletная (цветная) алгебра RGB-пространства .....</b>	<b>77</b>
3.2.1. Основы tripletной (цветной) алгебры.....	77
3.2.2. Люминансно-хроматическое представление tripletных чисел .....	82
3.2.3 Геометрическое представление tripletных чисел.....	85
<b>3.3. Геометрия и тригонометрия RGB-пространства .....</b>	<b>90</b>
3.3.1. Геометрия RGB-пространства.....	90
3.3.2. Тригонометрическая форма tripletных чисел.....	92
3.3.3. Экспоненциальная форма tripletных чисел .....	94
3.3.4. Tripletные преобразования RGB-пространства .....	95
<b>3.4. Tripletные модели цветных изображений .....</b>	<b>97</b>
<b>3.5. Преобразования цветных изображений .....</b>	<b>102</b>
3.5.1. Орто-унитарные преобразования изображений .....	103
3.5.2. Орто-унитарные (цветные) всплески.....	104
5.2.2. Орто-унитарные сплайны .....	109
Г л а в а 4.....	112
МУЛЬТИПЛЕТНЫЕ МОДЕЛИ МУЛЬТИКОМПОНЕНТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ.....	112
<b>4.1. Что есть мультицветное и гиперспектральное изображения? .....</b>	<b>112</b>
<b>4.2. Мультиpletная (мультицветная) алгебра .....</b>	<b>115</b>
<b>4.3. Люминансно-хроматическое представление мультиpletных чисел .....</b>	<b>118</b>
<b>4.4. Мультиpletные алгебраические модели мультикомпонентных изображений .....</b>	<b>120</b>
Г л а в а 5.....	124
КЛИФФОРДОВСКИЕ МОДЕЛИ ГИПЕРСПЕКТРАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ....	124
<b>5.1. Псевдо-Евклидовы пространства.....</b>	<b>126</b>
5.1.1. Определение псевдо-Евклидовых пространств .....	126
5.1.2. Свойства псевдо-Евклидовых пространств.....	128
5.1.3 Пространства Клиффорда .....	131
<b>5.2. Алгебры Клиффорда .....</b>	<b>134</b>
5.2.1. Определение алгебры Клиффорда .....	134
5.2.2. Свойства носителя алгебры Клиффорда .....	141

5.2.3. Псевдоскаляр и центр.....	144
5.2.4. Сопряжение и норма.....	146
5.2.5. Нормы и скалярные произведения.....	149
5.2.6. Множество мнимых единиц .....	151
<b>5.3. Алгебраические модели сигналов и изображений .....</b>	<b>156</b>
5.3.1. Геометрия $m$ -D пространства .....	157
5.3.2. Алгебраические модели $n$ -D изображений .....	158
<b>5.4. Преобразования Фурье Клиффорда.....</b>	<b>163</b>
5.4.1. Дискретные преобразования Фурье-Клиффорда.....	165
5.4.2. Дробные дискретные преобразования Фурье-Клиффорда.....	167
5.4.3. Многопараметрические преобразования Фурье-Клиффорда.....	168
5.4.4. Быстрые многопараметрические преобразования Фурье Клиффорда.....	170
Э П И Л О Г .....	171
Литература.....	172

*“Господь создал целые числа, все остальное дело рук человеческих.”*

Леопольд Кронекер

*“Смотри”, говорят они, “Здесь нечто новенькое!”  
Но нет, это случилось довольно давно, задолго до  
того как мы родились.*

Good News Bible, Eccl.1:10

## **Предисловие**

Одной из ведущих тенденций в науке начала XXI века является стремление к синтезу знаний, полученных в рамках отдельных научных дисциплин и развитие исследований на «стыке наук». Наряду с дисциплинарной организацией науки и усиливающейся ее специализацией идет активное формирование междисциплинарного знания. Возникли и успешно развиваются кибернетическая физика, физическая химия, химическая физика, биологическая химия, биологическая физика и многие другие

Приставка «меж» указывает на наличие некоего провала между дисциплинами, «ничейной земли», не являющейся традиционным объектом исследования ни одной из дисциплин. В этом случае на стыке нескольких научных дисциплин может возникнуть новая дисциплина, способная выявить «ничейный» объект исследования и заимствовать язык и методы из «материнских» дисциплин, порождая новый междисциплинарный инструментарий. Причем «материнские» дисциплины после подобного интегрирования не прекращают своего существования, а лишь обогащаются новыми принципами исследования.

С организационной точки зрения, междисциплинарность понимается как взаимодействие двух или более научных дисциплин, каждая из которых

имеет свой предмет, свою терминологию и методы исследования. Непосредственно такое взаимодействие реализуется в форме работы над конкретными исследовательскими проектами, создания междисциплинарных центров при академических организациях, проведения междисциплинарных конференций, издания проблемно, а не дисциплинарно ориентированных журналов и т. п.

Современная научная литература убедительно свидетельствует о том, что алгебраические методы, совершившие подлинный переворот в чистой математике, оказывают теперь не менее сильное влияние на различные разделы биологии. Примером «алгебраизации биологии» может служить алгебраический подход к генетическому коду. Методы общей алгебры, игравшие большую роль при формировании наиболее абстрактных и глубоких разделов современной математики, в последнее время начали приобретать более важное значение при решении фундаментальных физических и биологических проблем. С их помощью оказывается возможным выделять и изучать общие закономерности у сложных биомолекулярных и когнитивных систем и добиваться удивительно сильных результатов в тех случаях, когда старые аналитические методы оказываются или чрезвычайно громоздкими, или совершенно бессильными. Алгебраическая формулировка физики, информатики и биологии обладает большими преимуществами, как в методическом отношении, так и в отношении выяснения нового подхода к нерешенным проблемам и лучшего понимания математических названных выше теорий. Ныне алгебраические методы по праву можно назвать областью, в которой тесно переплелись интересы биологии, физики и математики.

Вопрос о зарождении и существовании живой материи, в том числе высшего ее проявления – интеллекта и сознания, принадлежит к числу величайших проблем естествознания. Научные исследования, проведенные в последние годы, показывают, что эта проблема созрела для того, чтобы

начать ее комплексное рассмотрение силами математиков, физиков, биологов с использованием современного алгебраического аппарата. Стало понятным, что для проведения подобного рода междисциплинарных научных исследований, необходимо объединение усилий научных коллективов с различной специализацией. Именно эту цель преследует серия коллективных монографий по направлению «Математические основы классической и квантовой теории интеллекта», в которой планируется публикация научных исследований по таинственным и захватывающим проблемам возникновения жизни на Земле, ее эволюции вплоть до возникновения сознания и интеллекта.

В настоящей работе предлагается новый подход к анализу и синтезу систем обработки и распознавания цветных, мультицветных и гиперспектральных изображений, основанный на использовании коммутативных триплетных (мультиплетных) алгебрах и некоммутативных алгебрах Клиффорда. В последние годы выяснилось, что эти алгебры обладают еще неостребованным потенциалом для разработки продвинутых алгоритмов цифровой обработки изображений. Главное достоинство предлагаемого подхода заключается в том, что он опирается на универсальную алгебро-геометрическую теорию и позволяет создавать принципиально новые быстродействующие алгоритмы обработки изображений.

Новый подход к обработке и распознаванию цветных, мультицветных и гиперспектральных изображений, основанный на коммутативных мультиплетных алгебрах и некоммутативных алгебрах Клиффорда в своей основе опирается на три базовых предположения:

- 1 Интерпретация мультиспектральных и гиперспектральных пикселей как гиперкомплексных чисел.
- 2 Интерпретация преобразований цвета, мульти-цвета и гипер-цвета как умножений пикселей на гиперкомплексные числа единичного модуля, которые порождают так называемые перцептуальные преобразования.

3 Интерпретация геометрических изменений в окружающем физическом мире не как матричных преобразований, а как перемножений гиперкомплексных чисел с физическими векторами.

С этой точки зрения предлагаемый подход может быть охарактеризован как универсальный алгебраический метод анализа, обработки и распознавания изображений. В нашем подходе мы основываемся на следующих гипотезах [1-4].

1. Мозг интерпретирует каждый пиксель изображения не как многомерный вектор, а как многомерное гиперкомплексное число. Если мы допускаем существование векторной природы пикселей, то можно пойти и дальше: допустить возможность умножения этих векторов. Тем самым мы не опровергаем векторную природу пикселя, а обогащаем ее дополнительными математическими возможностями. Речь идет о расширении возможностей математического языка описания реальной действительности за счет введения операции умножения пикселей.

2. Для решения двух типов задач мозг животных использует два типа гиперкомплексных алгебр на двух уровнях головного мозга. А именно, он использует коммутативные мультиплетные алгебры для обработки цветных и многокомпонентных изображений на уровне ретины глаза и некоммутативные алгебры Клиффорда - для распознавания таких изображений в высших разделах головного мозга (в так называемом отделе “Visual Cortex”).

3. Визуальные системы животных с различной эволюционной историей используют различные коммутативные гиперкомплексные алгебры и алгебры Клиффорда для обработки и распознавания цветных и мультиспектральных изображений.

Мы знаем, что животные способны почти мгновенно и эффективно распознавать окружающие объекты. Для инженера важно описать это явление на таком математическом языке, который позволил бы ему

построить техническую систему способную работать не менее эффективно, чем исходная биологическая система, а вопрос об адекватности, используемой математической модели для инженера (в отличие от биолога и физика) стоит на втором плане.

Главной целью настоящей работы является демонстрация того факта, что Природа (возможно посредством эволюции) научалась использовать свойства алгебр Клиффорда для конструирования различных визуальных систем животных.



*Научное издание*

Лабунец Валерий Григорьевич

Часовских Виктор Петрович

**ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ МОЗГ КЛАССИЧЕСКИМ КОМПЬЮТЕРОМ,  
РАБОТАЮЩИМ В АЛГЕБРЕ КЛИФФОРДА? МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
ОСНОВЫ ТЕОРИИ**

Монография

ISBN 978-5-6045940-2-5



Технический редактор *Г.А. Акчурина*  
Компьютерная верстка *Г.А. Акчурина*

Подписано в печать 18.01.2022.  
Формат 60 x 84 1/16. Бумага офсетная. Печать плоская.  
Уч.-изд. л. 9,0. Усл. печ. л. 12,8. Печ. л. 13,8. Заказ 412. Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии ООО «Акдениз»