

Научный журнал

# БИОМАШСИСТЕМЫ

Том 5, № 1, 2021

## *Искусственный интеллект, алгебраическая биология и теория систем*

*в математических исследованиях  
российских ученых . Том 1*

**Тематический выпуск**



Москва 2021



# Биомашсистемы

**Том 5, №1, январь-март, 2021 г.**

*Главный редактор*

академик РАН **Черноиванов В.И.**

*Первый заместитель главного редактора,*

руководитель Издательства

к.ф.-м.н. **Толоконников Г.К.**

*члены Редакционной коллегии*

академик РАН **Быков В.А.** (медицина, сельское хозяйство)

академик РАН **Ганиев Р.Ф.** (математические методы,  
теория управления)

академик РАН **Измайлов А.Ю.** (автоматизация  
в машиностроении)

академик РАН **Гулюкин М.И.** (ветеринария, биотехнология)

академик РАН **Сигов А.С.** (искусственный интеллект,  
*Computer Science*, физика твердого тела)

чл.корр. РАН **Судаков С.К.** (физиология, медицина,  
функциональные системы)

**Учредитель Журнала** — МОО «Международная инженерная академия»  
(МИА, ИНН 7710066947), **Издатель Журнала** — ООО «Центр информационных  
технологий» (ИНН 7729648836).

© МОО «МИА», ООО «ЦИТ», 2021

*Все права защищены. Никакая часть данного издания не может быть воспроизведена  
в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав*

В журнале публикуются результаты открытых научных исследований в областях знаний, разрабатываемых учеными Российской академии наук, МИА, других научных, включая зарубежные, учреждений, высших учебных заведений и граждан, ведущих научные исследования в порядке личной инициативы, а также научно подготовленные информационные материалы о научной деятельности, в том числе, в следующих областях и на их стыке:

теории управления интеллектуальными машинами и механизмами;  
искусственного интеллекта и *Computer Science*;

теории категорий, категорной и математической логики, других разделов категорной и традиционной математики и их приложений в *Computer Science*;

теоретической и математической физики;

нейробиологии, нейрофизиологии и нейробионики;

биотехнологии, включая приложения в ветеринарии и медицине;

общей теории систем и категорной теории систем, эргатических, функциональных, биомашсистем и других типов систем с приложениями в медицине и ветеринарии, в теории и практике старения машин и механизмов, включая сельхозтехнику;

других отраслях науки.

*Электронная версия журнала* размещается на информационном сервере поддерживаемом Издателем и имеет электронный адрес: <http://www.biomachsys.com>. Адрес электронной почты: [info@biomachsys.com](mailto:info@biomachsys.com). Порядок публикации в журнале предусматривает обязательное рецензирование. Порядок принятия публикаций и рецензирования, правила и требования к оформлению статей для авторов размещены <http://www.biomachsys.com/papers>

*Журнал издаётся на русском и английском языках* (перевод русскоязычного варианта). Английский вариант каждого выпуска издаётся одновременно или после, но не позднее шести месяцев с момента выпуска русскоязычного варианта издания.

*Журнал включается в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК* (в международные реферативные базы, системы цитирования), в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук, специальностей, соответствующих тематике Журнала.

*Разделы Журнала:* научные публикации и научные сообщения, научная жизнь, информационный бюллетень, публицистика, дискуссия, информатизация и информационные ресурсы, книжная полка, официальный раздел, литературные страницы, персоналия, содержания номеров журнала и аннотации публикаций на русском и английском языках; авторский указатель публикаций; рекламные вставки и другие разделы.

## Тематический выпуск

### *Труды Совещания*

### "МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ БИОЛОГИИ, ТЕОРИИ СИСТЕМ И ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА"

27-29 января 2021 г.,

организованного Международным междисциплинарным Семинаром  
"Алгебраическая биология и теория систем" совместно с Научным Советом  
по методологии искусственного интеллекта и когнитивных исследований  
при Президиуме РАН и Российским физиологическим обществом  
имени И.П.Павлова

### *Искусственный интеллект, алгебраическая биология и теория систем в математических исследованиях российских ученых. Том 1*

### Proceedings of the Meeting

### "INTERDISCIPLINARY INTERACTION ALGEBRAIC BIOLOGY, SYSTEMS THEORY AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE "

January 27-29, 2021

organized by the International Interdisciplinary Seminar "Algebraic Biology and  
Systems Theory" in cooperation with the Scientific Council  
on the methodology of artificial intelligence and cognitive research  
at the Presidium of the Russian Academy of Sciences and the Russian  
Physiological Society named after I.P. Pavlov

### *Artificial intelligence, algebraic biology and systems theory in mathematical research by Russian scientists. Volume 1*

#### Оглавление

стр.

Междисциплинарный подход к проблематике искусственного  
интеллекта, основанный на исследованиях на стыке  
фундаментальной математики и нейробиологии

*Алексеев А.Ю., Анохин К.В., Дорохов А.С., Еришов Ю.Л.,  
Лекторский В.А., Островский М.А., Перцов С.С., Петухов С.В.,  
Сигов А.С., Судаков С.К., Умрюхин А.Е., Черноиванов В.И.*

5

<b>Черноиванов В.И., Судаков С.К., Толоконников Г.К.</b> Востребованное научное направление на стыке фундаментальной математики и нейрофизиологии для нужд искусственного интеллекта	8
<b>Савельев А.В., Алексеев А.Ю., Толоконников Г.К., Петухов С.В.</b> Обзор исследований по искусственному интеллекту, алгебраической биологии и теории систем. Исторический аспект, современное состояние и перспективы. Часть 1.	20
<b>Островский М.А.</b> Механизм генерации и обработки зрительного сигнала в сетчатке глаза	77
<b>Петухов С.В.</b> Алгебраическая биология, гештальт-генетика, наследственный и искусственный интеллект.	82
<b>Толоконников Г.К.</b> Категорные склейки, категорные системы и их приложения в алгебраической биологии	148
<b>Витяев Е.Е.</b> Математическая вероятностная модель когнитивных и функциональных систем	236
<b>Лабунец В.Г., Часовских В.П.</b> Является ли мозг компьютером, работающим в алгебре Клиффорда?	291
<b>Жданов А.А.</b> Что сегодня понимается под искусственным интеллектом	390
<b>Юматов Е.А.</b> Системная организация психической деятельности мозга	416
<b>Мазуров М.Е.</b> Моделирование когнитивных свойств таламуса мозга как синхронизируемой релаксационной системы с самоорганизованной критичностью	442
<b>Савостьянов Г.А.</b> Теория разделения труда как основа управления развитием биосистем. Элементы математического моделирования	463
<b>Алоджанц А.П., Баженов А.Ю., Гнидко К.О.</b> Квантовоподобные феномены усиления распространения эмоционально окрашенных сообщений в сетевых сообществах	507
Авторский указатель	544

***Междисциплинарный подход к проблематике  
искусственного интеллекта, основанный на исследованиях  
на стыке фундаментальной математики и нейробиологии***

С 27 по 29 января 2021 года состоялось Совещание «Междисциплинарное взаимодействие алгебраической биологии, теории систем и искусственного интеллекта», организованное Международным междисциплинарным Семинаром "Алгебраическая биология и теория систем" совместно с Научным Советом по методологии искусственного интеллекта и когнитивных исследований при Президиуме РАН (НСМИИ РАН) и Российским физиологическим обществом имени И.П.Павлова.

Совещание посвящено крайне востребованному сегодня научному направлению на стыке фундаментальной математики и нейрофизиологии, результаты усилий в области которого применяются для создания искусственного интеллекта и сильного искусственного интеллекта, в том числе. Направление поддерживается как НСМИИ РАН, так и Физиологическим обществом, являющимся головными структурами в стране по искусственному интеллекту и нейрофизиологии, которые сосредоточили усилия на развитии этого направления. Таким образом, с учетом ведущих специалистов страны по теории систем, математике, искусственному интеллекту и нейробиологии, являющихся участниками Семинара, организатора Совещания, принятые на Совещании решения отражают как состояние дел по искусственному интеллекту, системам и алгебраической биологии, так и служат рекомендациями РАН и научного сообщества страны по развитию указанных направлений.

В последнее десятилетие имеют место известные впечатляющие успехи в применениях технологий искусственных нейронных сетей (*deep learning, big data, data mining* и т.п.). Необходимо реализовывать имеющийся потенциал и их дальнейшее внедрение. Однако, если говорить на языке физиологии, указанные подходы отвечают лишь уровню рефлексов, настоящий столь востребованный искусственный интеллект, в особенности, сильный искусственный интеллект, по большому счету, как это обсуждалось и обосновывалось во многих докладах на Совещании, недоступен перечисленным технологиям. Следующий после рефлексов уровень, который необходимо моделировать искусственным интеллектом, отвечает способности вырабатывать незаложенные в систему алгоритмы поведения с использованием элементов сознания, как это происходит у человека и животных.

Конкретным подходом, много обсуждавшимся на Совещании, здесь является интеграция математики с теорией функциональных систем по П.К.Анохину, интеграция предполагает поэтапную формализацию элементов функциональной системы, их математическое моделирование на основе

фундаментальной математики с дальнейшим построением с помощью полученных знаний искусственного интеллекта, способного на большее, чем рефлекторно действовать в парадигме «стимул-реакция».

Насколько фундаментальной должна быть математика дают представление доклады и материалы участников Совещания. Мазуров М.Е. строит математическую модель таламуса на основе теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром у производных. Е.Е.Витяев применяет математическую логику и семантический вероятностный вывод для моделирования элементов сознания по Tononi G. (интегрированная информация, как количественное измерение сознания) при формализации функциональной системы. Лабунец В.Г. при моделировании работы мозга использует гиперкомплексные числа, алгебры Клиффорда и теорию представления групп. Толоконников Г.К. развивает теорию свёрточных поликатегорий и категорных склеек, которые использованы для формализации постулатов общей теории систем по П.К.Анохину. Матричная генетика и алгебраическая биология, основателем которых является С.В.Петухов, использует гиперкомплексные числа, тензорное произведение матриц, то есть по сути теорию модулей над кольцами и моноидальные категории. К.В.Анохин в теории когнитива, продолжающей теорию функциональных систем, использует теорию гиперсетей (предложенную Аткиным для  $q$ -анализа, необходимые здесь разделы симплициальных гомотопий и гомотопических групп доработаны Лубенбанчером с коллегами). «Теория гомотопии и высшие категорные структуры будут играть все большую роль в математическом моделировании нейробиологии», как об этом говорит Ю.И.Манин в большом обзоре (arXiv:2006.15136v1, 2020, 80с.) по гомотопическим и категорным моделям нейроинформационных сетей, в котором также затрагиваются вопросы теории сознания. Так что на Совещании затронута почти полная шкала математических методов от традиционных дифференциальных уравнений до алгебры модулей над кольцами, кохомологий и высших категорий. Для контраста следует указать, что в ядре теории искусственных нейронных сетей лежит поиск нулей производных функций многих переменных (метод обратного распространения ошибки и т.п.). А сама, основанная на нейронах-сумматорах искусственная сеть является одним из многих способов приближения функций нескольких переменных, при этом в основе успеха здесь лежит знаменитая теорема А.Н.Колмогорова о представлении непрерывной функции нескольких переменных суммами функций одного переменного и их композицией.

Руководство страны понимает необходимость развития искусственного интеллекта, в особенности, сильного искусственного интеллекта для науки, образования и народного хозяйства, что, в частности, публично подчеркивалось в выступлении В.В.Путина на конференции «Искусственный интеллект — главная технология XXI века» (см. <https://www.youtube.com/watch?v=nfwEUOIPobw>).

Настоящим кратким введением в издание трудов Совещания подчеркивается востребованность обсуждаемого научного направления, необходимость его интенсивного развития, включая реализацию выработанной на Совещании стратегии образования в области искусственного интеллекта, которая находится в русле поручений Президента В.В.Путина по совершенствованию преподавания искусственного интеллекта в высшей школе.

**Лекторский В.А.**, академик РАН  
Председатель Совета по методологии  
искусственного интеллекта и когнитивных  
исследований при Президиуме РАН

**Островский М.А.**, академик РАН  
Президент Российского физиологического  
общества им. И.П.Павлова

**Алексеев А.Ю.**, д.ф.н.  
Ученый секретарь Совета по методологии  
искусственного интеллекта и когнитивных  
исследований при Президиуме РАН

**Умрюхин А.Е.**, д.м.н., проф.  
Председатель Московского Отделения  
Физиологического общества им. И.П.Павлова

**Черноиванов В.И.**, академик РАН,  
**Судаков С.К.**, чл.-корр. РАН, **Петухов С.В.**, д.ф.-м.н.  
Сопредседатели Международного междисциплинарного Семинара  
«Алгебраическая биология и теория систем»

**Ершов Ю.Л.**, академик РАН,  
Председатель Объединенного ученого совета  
по математике и информатике СО РАН

**Анохин К.В.**, академик РАН,  
Директор Института перспективных  
исследований мозга МГУ имени  
М.В.Ломоносова

**Сигов А.С.**, академик РАН,  
Президент МИРЭА

**Дорохов А.С.**, чл.-корр. РАН,  
заместитель директора ФНАЦ ВИМ

**Перцов С.С.**, чл.-корр. РАН,  
директор НИИ нормальной физиологии им. П.К.Анохина РАН

#### **От Редколлегии**

В публикуемых в данном выпуске Журнала материалах по фундаментальной математике и квантовому компьютеру чл.-корр. РАН Манина Ю.И., математическому моделированию функциональных систем чл.-корр. РАН Умрюхина Е.А., математическому моделированию животноводческого производства чл.-корр. Цоя Ю.А. также явно отражены высказанные выше положения, к которым Редколлегия Журнала и входящие в ее состав члены РАН присоединяются с надеждой успешного развития взаимодействия фундаментальной математики и нейробиологических наук с приложением результатов в искусственном интеллекте.

**Редколлегия Журнала  
«Биомаисистемы»**



***Востребованное научное направление на стыке  
фундаментальной математики и нейрофизиологии  
для нужд искусственного интеллекта***

Черноиванов В.И.,  
академик РАН, ФНАЦ ВИМ  
РАН, Москва, Россия,  
e-mail: vichernoivanov@mail.ru

Судаков С.К.,  
чл. -корр. РАН, НИИ нормальной  
физиологии им.П.К.Анохина РАН,  
Москва, Россия  
e-mail: s-sudakov@nphys.ru

Толоконников Г.К.,  
к.ф.-м.н., ФНАЦ ВИМ  
РАН, Москва, Россия  
e-mail: admcit@mail.ru

**Аннотация.** Приводится с обоснованиями формулировка востребованного в настоящее время научного направления по созданию искусственного интеллекта, в том числе сильного искусственного интеллекта, на основе интенсивных усилий на стыке фундаментальной математики и нейробиологии. Обсуждается неразрывно связанная с указанной задачей проблематика приложений теории систем и искусственного интеллекта к практическим вопросам реализации машин и механизмов, оснащенных искусственным интеллектом.

**Ключевые слова:** системы, функциональные системы, биомашсистемы, искусственный и сильный искусственный интеллект, логика, категории, гомотопии, когомологии, физиология, нейробиология, нейронные сети, рефлекс, геном, сельхозмашины.

С 27 по 29 января 2021 года проводилось Сопределение «Междисциплинарное взаимодействие алгебраической биологии, теории систем и искусственного интеллекта», организованное Международным междисциплинарным Семинаром "Алгебраическая биология и теория систем" (Семинар) при участии Научного Совета по методологии искусственного интеллекта и когнитивных исследований при Президиуме РАН (Совет) и Российского физиологического общества имени И.П.Павлова (Физиологическое общество). Сопределение проводилось на базе НИИ нормальной физиологии им.П.К.Анохина РАН, открыл Сопределение один из соавторов, сопредседатель Семинара, директор этого института С.К.Судаков приветственным словом и небольшим докладом, одной из задач которого было дать установку и направление всему Сопределению (см. запись на youtube-канале Семинара <https://youtu.be/Eo0cljiGIrg>) и касалось в этой задаче физиологии и нейробиологии. Второй соавтор сопредседатель Семинара В.И.Черноиванов и третий соавтор, ученый секретарь Семинара Г.К.Толоконников добавили в развитие как прикладную, так и математическую стороны направления (см. запись на youtube-канале Семинара <https://youtu.be/gu5tQdEQ4Eg>). Сопредседатели Семинара уже в своих выступлениях поддержали эту линию, С.В.Петухов в отношении алгебраической биологии (см. запись на youtube-канале Семинара <https://youtu.be/QIWFAdEcGis>) и президент МИРЭА

А.С.Сигов в отношении стратегии образования в области искусственного интеллекта (см. запись на *youtube*-канале Семинара <https://youtu.be/qbbd-RMdu1g>). К сожалению, Ю.И.Манин не смог непосредственно поучаствовать в Совещании, но он передал материалы, отражаемые в обзоре, публикуемом в трудах Совещания.

Важнейшим фактором на Совещании была поддержка и развитие указанного направления Советом РАН, от которого в Совещании приняло участие руководство, с приветственным словом и небольшим сообщением выступил Председатель Совета В.А.Лекторский (см. запись на *youtube*-канале Семинара <https://youtu.be/h99hqvwB5DQ>) и ученый секретарь Совета А.Ю.Алексеев, сделавший большой содержательный доклад (см. запись на *youtube*-канале Семинара <https://youtu.be/UJMm4r7468c>), а также Российским физиологическим обществом имени И.П.Павлова, от которого в Совещании приняло участие руководство, с приветственным словом (см. запись на *youtube*-канале Семинара <https://youtu.be/sbwTAg3Pn0c>) и замечательным докладом (см. запись на *youtube*-канале Семинара <https://youtu.be/pKngDIzjvY0>) выступил Президент Общества М.А.Островский и председатель Московского физиологического общества имени И.П.Павлова А.Е.Умрюхин, также сделавший совместно с Е.А.Умрюхиным содержательный доклад о замечательной информационной модели функциональной системы (см. запись на *youtube*-канале Семинара <https://youtu.be/TaYg8храMzU>).

Подчеркнем, что в Совещании приняли участие головные организации в России по *искусственному интеллекту* в лице Совета РАН, *физиологии и нейробиологии* в лице Российского физиологического общества имени И.П.Павлова и ведущие специалисты страны по теории систем, математике, искусственному интеллекту и нейробиологии, являющиеся участниками Семинара. Таким образом, принятые на Совещании решения отражают как *состояние дел* по искусственному интеллекту, системам и алгебраической биологии, так и служат *рекомендациями* РАН и научного сообщества страны по развитию указанных направлений.

В данной статье, в частности, на основе докладов и сообщений на Совещании, сделанных соавторами, обсуждается указанное научное направление, на котором была сосредоточена работа Совещания и которое имеет следующую формулировку.

Впечатляющие успехи в последнее десятилетие в применениях технологий искусственных нейронных сетей глубокого обучения (*deep learning* и *big data, data mining* и т.п.) общеизвестны. Потенциал для их дальнейшего внедрения значителен и его необходимо реализовывать. Однако, перечисленное, если говорить на языке физиологии, отвечает лишь уровню рефлексов, настоящий столь востребованный искусственный интеллект, в особенности, сильный искусственный интеллект, принципиально, как это обсуждалось и обосновывалось во многих докладах на Совещании, *недоступен*

*перечисленным технологиям.* Следующий после рефлексов уровень, который будет моделироваться искусственным интеллектом, отвечает способности вырабатывать незаложенные в систему алгоритмы поведения с использованием элементов сознания, как у человека и животных.

Квинтэссенцию (см. рис. 3) научного направления мы выразим на абстрактной модели интеграции функциональной системы и универсального зомби-агента искусственного интеллекта, а общая канва Совещания показана на схеме рис.1.

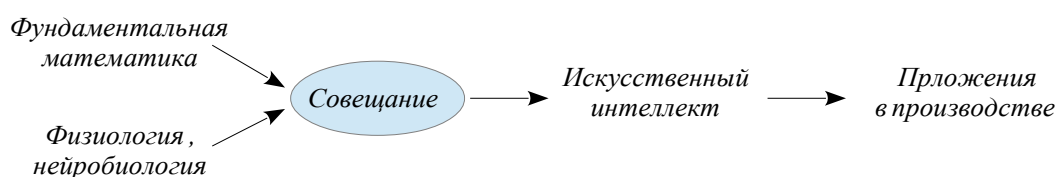


Рис.1. Канва Совещания

Искусственный интеллект реализуется в машинах и механизмах и на схеме идёт в паре с приложениями в производстве, наиболее масштабным здесь является востребованность ИИ в сельхозмашиностроении, о котором в контексте биомашсистем указано далее.

Интеграция предполагает поэтапную **формализацию** элементов функциональной системы, их математическое моделирование на основе фундаментальной математики с дальнейшим построением с помощью полученных знаний искусственного интеллекта, способного на большее, чем рефлекторно действовать в парадигме «стимул-реакция». Обсуждение теории функциональных систем (основы см. в [1]), биомашсистем (см. в [2]) и категорных систем (см. в [3]) в соответствующем контексте дано в работе авторов [4].

Насколько фундаментальной должна быть математика дают представление доклады и материалы участников Совещания, публикуемые в трудах Совещания. Мазуров М.Е. строит математическую модель таламуса на основе теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром у производных, с помощью этой модели он выходит на когнитивные понятия формируемые по D.LaBerge [5] в отношении сознания в цепочке с положительной обратной связью «таламус - неокортекс - базальные ганглии - таламус». Витяев Е.Е. применяет математическую логику и семантический вероятностный вывод для моделирования элементов сознания по Tononi G. (интегрированная информация, как количественное измерение сознания) [6] при формализации функциональной системы. Лабунец В.Г. при моделировании работы мозга использует гиперкомплексные числа, алгебры Клиффорда и теорию представления групп. Один из соавторов (Т.Г.К.) развивает теорию свёрточных поликатегорий и категорных склеек, которые использованы для

формализации постулатов в общей теории систем по П.К.Анохину [3]. В матричной генетике и алгебраической биологии С.В.Петухов, использует гиперкомплексные числа, тензорное произведение матриц, то есть по сути теорию модулей над кольцами и моноидальные категории (см. запись доклада С.В.Петухова на *youtube*-канале Семинара <https://youtu.be/QIWFAdEcGis>). Наибольшие обсуждения и острую дискуссию вызвал на Совещании доклад К.В.Анохина (см. запись на *youtube*-канале Семинара <https://youtu.be/tZoGXoN8hv8>), в своей теории когнитома, продолжающей теорию функциональных систем, он пока из математики использует теорию гиперсетей (предложенную Аткиным для  $q$ -анализа, необходимые здесь разделы симплициальных гомотопий и гомотопических групп доработаны Лубенбанчером с коллегами [7, 8]), но поиск адекватной математики в его подходе продолжается [9]. «Теория гомотопии и высшие категорные структуры будут играть все большую роль в математическом моделировании нейробиологии», как утверждает в большом обзоре Ю.И.Манина [10] по гомотопическим и категорным моделям нейроинформационных сетей, в котором также затрагиваются вопросы теории сознания по G. Tononi. Так что мы уже сейчас имеем здесь почти полную шкалу математических методов от традиционных дифференциальных уравнений до алгебры модулей над кольцами, кохомологий и высших категорий.

Для контраста отметим, что в ядре теории искусственных нейронных сетей лежит поиск нулей производных функций многих переменных (метод обратного распространения ошибки и т.п.). А сама, основанная на нейронах-сумматорах искусственная нейронная сеть суть лишь один из многих способов приближения функций нескольких переменных, при этом в основе успеха здесь лежит знаменитая теорема А.Н.Колмогорова о представлении непрерывной функции нескольких переменных суммами функций одного переменного и их композицией (использование в практике нейросетей других математических методов, конечно, имеется, но они играют вспомогательную роль, что принципиально для нашего обсуждения). Да, собственно, упоминание нейронов здесь по мнению патриарха нейросетевого подхода А.И.Галушкина (открывшего, в том числе, и метод обратного распространения ошибки [11], успешно обобщившего методы на континуальное число «нейронов» в сети) мешает и даже вредит работе [12].

Под формализацией понимается построение формального логического языка для имеющегося явления. Именно, выбирается алфавит, дедуктивная система для построения имеющих «смысл» слов в алфавите, выбирается несколько слов в качестве аксиом, правила вывода для получения из аксиом теорем и, далее, строится интерпретация для той предметной области, которой соответствует формальная теория. Формализация суть обратная задача к описанному только что процессу построения формальной теории. Поэтому формализаций может быть много, что мы и видим на примерах докладов

Совещания в отношении формальных построений для функциональных систем.

Традиционная теория функциональных систем весьма интуитивная наука, в физиологии уровня абстракции традиционной теории достаточно во многих вопросах применения функциональных систем и вопросы формализации здесь не стоят столь остро, как это оказалось в приложениях теории биомашсистем, использующих функциональные системы. Детальное обсуждение можно найти в работах авторов [13, 14, 15], а суть формулируется просто: то, чего достаточно для физиологии в виде приближенных словесных описаний традиционной теории функциональных систем в машинах и механизмах не работает, *машина просто не поедет*, нужны точные параметры, а получить их можно только формализуя функциональные системы доводя формализацию до вычислений и оценок.

Поскольку понятие формализации чётко сформулировано, то и вопрос о формализации функциональных систем, отражающей все их содержание, кажется звучащим осмысленно. Здесь слово «кажется» употреблено не случайно, физиологам с их ежедневными столкновениями в экспериментах с необозримой сложностью биообъектов обсуждения математиками формализации функциональных систем вызывают, можно сказать, грустную улыбку. Распластанный аксон на предметном стекле для измерений потенциалов действия и получения уравнений для спайков и аксон «в деле», в живом нейроне живого организма очень, даже, разные вещи, то же самое и для сгустков крови (тромбоз), изучаемых в изъятых из организма участках тромбозных сосудов для выяснения зависимости рассасывания тромба от воздействия лекарств... С.Н.Бернштейн, имевший солидное математическое образование, в своих глубоких изысканиях для простейших локомоций, движений фаланг пальцев руки и т.п., пришел к выводам о невозможности расчетов и даже создания одних и тех же начальных условий для движения живой руки и других частей скелета человека [16]. Для физиологии схема функциональной системы поведенческого акта по П.К.Анохину суть лишь методологический принцип исследования, а не строгая существующая в организме в математическом смысле конструкция. Действительно, где искать нейроны акцептора результата действия у организма, вдруг оказавшегося в смертельной опасности, когда вся нервная система и другие клетки представляют собой один «аферентный синтез» поиска спасения.

По-видимому, вопрос о возможности указанной полной формализации функциональных систем, а заодно и биомашсистем (см. далее), столь же вечный как и «неисчерпаемость», по словам классика, электрона. Но машина должна поехать и искусственный интеллект должен становиться все сильнее... Получаем не прихоть, а суровую реальность для физиологов смотреть на функциональные системы, как на методологию экспериментов и теоретических изысканий, а математикам как на диаграмму строгой категорной теории, моделируемую математическими средствами. Для искусственного интеллекта

здесь необходимый междисциплинарный стык усилий физиологов и математиков, который при любом продвижении суть достижение всех трех фундаментальных направлений математики, физиологии и искусственного интеллекта с его приложениями в машинах и механизмах.

Следующая схема функциональной системы поведенческого акта предложена П.К.Анохиным [17] как основа для общей теории систем.

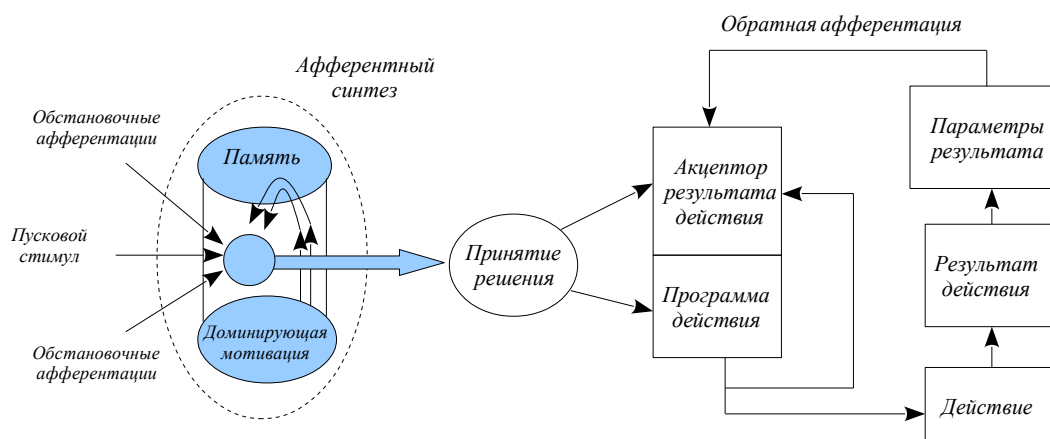


Рис. 2. Схема функциональной системы поведенческого акта по П.К.Анохину

Теоретическое решение всех ключевых проблем искусственного интеллекта олицетворяют теоремы об универсальных исчислениях Э.Поста, С.Ю.Маслова и Ю.В.Матиясевица [18], [19], [20] (универсальное исчисление вырабатывает без пропусков все возможные исчисления и алгоритмы, так что запустив используемый в биомашсистемах вариант зомби-агента «блок Поста» в виде такого исчисления робот получит, в принципе, - проблема «всего лишь» с фактором времени! - выход из любой ситуации, конечно, при существовании неизвестного роботу алгоритма поведения). Универсальный агент искусственного интеллекта предложен одним из соавторов (Т.Г.К.) (см. [21] и ссылки там) и опирается на теоремы об универсальных исчислениях.

В следующей схеме [21] рис. 3 демонстрируется, что принципиально искусственный интеллект, олицетворяемый универсальным зомби-агентом, при дальнейшей формализации **должен дополняться** получаемыми указанным стыком нейрофизиологии и математики элементами, ибо любой «прихоти», выработанной в афферентном синтезе функциональной системой, зомби-агент добивается при её существовании со стопроцентным результатом.

Проблема перешла к внедрению формализации в осознаваемые или неосознаваемые фрагменты формирования параметров потребного результата для организма.

По модели А.А.Жданова [22], сделавшего на Совещании замечательный доклад (см. запись на youtube-канале Семинара <https://youtu.be/tZoGXoN8hv8>),

для живых организмов их нервная система занимается в целях выживания постоянно двумя задачами - поиском знаний (наука в нашем смысле) об окружающей среде и принятием текущих решений (практика в нашем смысле) на основе этих знаний.

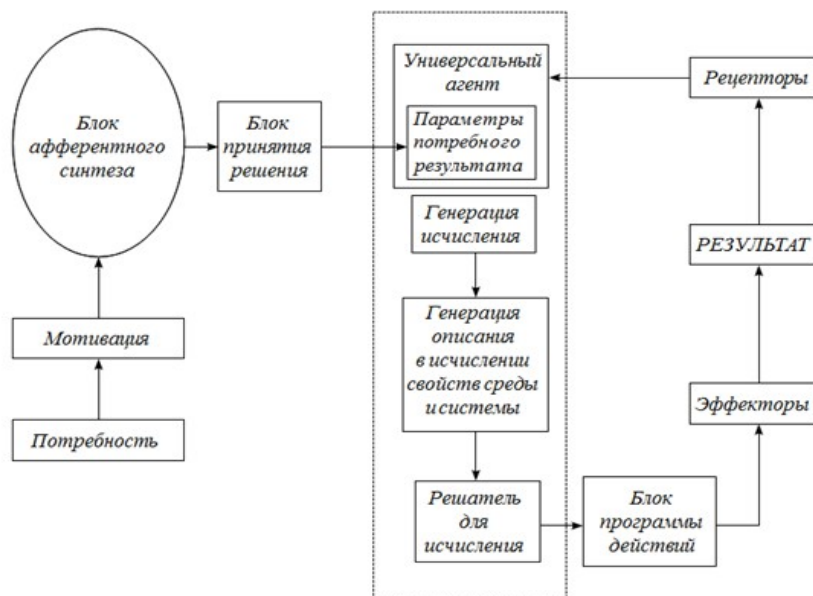


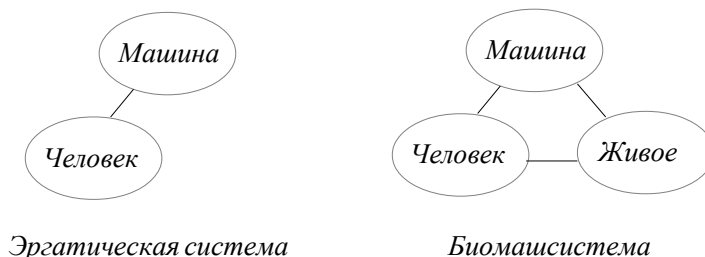
Рис.3. Функциональная система, интегрированная с универсальным агентом ИИ.

Важнейший момент модели состоит в том, что эти две задачи решаются параллельно и *одна без другой не существуют*. В нашем обсуждении мы подошли к задаче практического использования искусственного интеллекта, которая собственно и определяет концептуально, что такое искусственный интеллект.

Руководство страны понимает необходимость развития искусственного интеллекта, в особенности, сильного искусственного интеллекта для науки, образования и народного хозяйства, что, в частности, публично подчеркивается в выступлении Президента России В.В.Путина во время основной дискуссии конференции по искусственному интеллекту Artificial Intelligence Journey (AI Journey 2020) «Искусственный интеллект — главная технология XXI века» (см. <https://www.youtube.com/watch?v=nfwEUOIPobw>).

Важнейшая из стоящих перед страной задач, для которой в настоящее время необходим искусственный интеллект и, как минимум, фрагменты сильного искусственного интеллекта, является производство продуктов питания для граждан с обеспечением продовольственной безопасности страны. Необходимое внимание на Советании к этому вопросу и, вообще, к вопросам практического применения теории искусственного интеллекта поддерживал один из соавторов (Черноиванов В.И.). Осмысление подходов в современной ситуации с конструированием сельхозмашин привело к возникновению теории биомашсистем [2], поскольку оказалось недостаточно методов, разработанных в

теории эргатических («человек-машина») и других систем. Ключевую роль в биомашсистемах играет подсистема живого, того объекта, для которого работают машина и человек



Биомашсистемы не сводятся к эргатическим системам (или функциональным системам), имеют свои критически важные, отличающие их от других систем качества.

Одним из важных результатов развития теории биомашсистем явилось кардинальное переосмысление назначения машины, работающей с продуктивными животными, растениями и живыми организмами, что приводит к необходимым изменениям в процесс конструирования таких машин.

При выводе новой породы животных или сорта растений селекционер закладывает в требования технологии найденные им условия для реализации и полной отдачи в производстве заложенных в геноме потенциалов. Фактически и селекционер, и конструктор сельхозмашины работают сейчас отдельно, по старинке, не принимая во внимание факта их причастности к биомашсистеме, не учитывают ее требований, с точки зрения которых дело часто перевернуто с ног на голову: не машину приспособливают к живому, а наоборот к готовой машине подгоняют (параметры животных, растений) живые объекты, с которыми она работает. При таком подходе остаётся в значительной степени нереализованным потенциал живого, страна не получает необходимой продукции нужного качества в необходимых количествах.

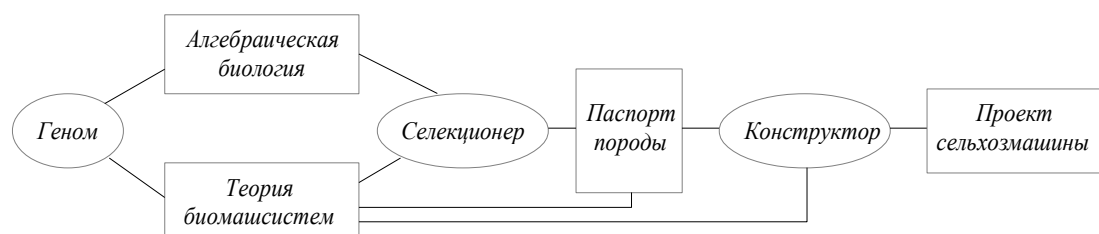
Итак, в чем назначение машины, работающей с продуктивным живым. Ставится задача вывода породы (для конкретности говорим о животных) с тем или иным свойством. Проводится анализ генома (непосредственно или с помощью подбора в экспериментах) и свойств биомолекул, влияющих на фенотип будущих особей. Прогнозируются, в том числе, с помощью алгебраической биологии, свойства, отвечающие данному геному и последовательности экспрессии генов. Последнее не менее важно, чем сам код ДНК. Для экспрессии генов, дающих то или иное свойство организма, необходим учет внешней и внутренней среды, определяющих подходящее для экспрессии состояние организма. Условно можно говорить о том, что, например, 40% свойств особи реализуется при обычных условиях содержания животного, а 60% свойств обеспечивает подходящее состояния окружающей среды. Назначение машины состоит как раз в обеспечении предписанных в



паспорте породы условий внешней среды для раскрытия потенций генома. Таким образом, геном определяет конструкцию машины и это должно учитываться для обеспечения машиной указанных 60% свойств особи. Безусловно, необходимы соответствующие позиции в паспорте породы, что требует совершенствования работы селекционера, отвечающие биомашсистеме, в которой работает машина, как составная часть.

Как видим, в данной задаче проектирования оптимальной машины для биомашсистемы востребованы **все компоненты** обсуждаемого научного направления, геном и предсказание по нему свойств организмов, искусственный интеллект, даже элементы сильного искусственного интеллекта (для блока Поста в решателе биомашсистемы [2]) и требования задачи практического эффективного использования машины.

Не останавливаясь на деталях, приведём общую схему, адекватную указанному научному подходу в назначении и проектировании сельхозмашин.



Резюмируя проведенное обсуждение востребованного в настоящее время научного направления, кратко укажем, что оно состоит в сосредоточении усилий на стыке математики и нейрофизиологии в целях получения результатов для создания искусственного интеллекта, включая сильный искусственный интеллект, и его применения в решении необходимых человеку интеллектуальных задач.

### *Литература*

1. Судаков К.В. Нормальная физиология. Курс физиологии функциональных систем. М., Медицинское информационное агентство, 1999, 718 с.
2. Черноиванов В.И. Биомашсистемы: возникновение, развитие и перспективы, *Биомашсистемы*, 2017, т.1, №1, С.7-58.
3. Толоконников Г.К. Неформальная категорная теория систем, *Биомашсистемы*, т.2, №4, 2018, С.41-144.
4. Черноиванов В.И., Судаков С.К., Толоконников Г.К. Теория функциональных систем в контексте общего системного подхода 6-99 *Биомашсистемы*, Т.2, №1 2018.
5. Laberge D. Clarifying the triangular circuit theory of attention and its

relations to awareness replies to seven commentaries. *PSYCHE: An Interdisciplinary Journal of Research On Consciousness* 6 (2000)

6. Tononi G. Integrated information theory of consciousness: an updated account. *Arch Ital Biol.* 150, 2012, 56–90.

7. Barcelo E., Kramer X., Laubenbacher R., Weaver C. Foundations of a connectivity theory for simplicial complexes. *Adv. Appl. Math.*, 2001, vol. 26, pp. 91-128.

8. Babson E., Barcelo H. Homotopy theory of graphs. *J.Algeb.Comb.*, 2006, vol. 24, pp. 31-44.

9. Анохин К.В. Когнитом: в поисках фундаментальной нейронаучной теории сознания. *Журнал высшей нервной деятельности им. И. П. Павлова.* 2021, № 1, с. 39-71.

10. Manin Yu., Marcolli M. Homotopy Theoretic and Categorical Models of Neural Information Networks, arXiv:2006.15136v1, [cs.LO], 23, Jun, 2020. 80 p.

11. Галушкин А. И. Синтез многослойных систем распознавания образов. М., Энергия, 1974.

12. Галушкин А. И. Нейронные сети: основы теории, М., Горячая линия, 2012, 496 с.

13. Tolokonnikov G. K. , Chernoiivanov V. I., Sudakov S. K., Tsoi Y. A. Systems Theory for the Digital Economy, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, V. 1127, 2020, pp. 447-456, [https://doi.org/10.1007/978-3-030-39216-1\\_41](https://doi.org/10.1007/978-3-030-39216-1_41).

14. Черноиванов В.И., Судаков С.К., Толоконников Г.К. Категорная теория систем, функциональных систем и биомашсистем, часть 1, Сборник научных трудов Международной научно-технической конференции «Нейроинформатика 2017», т.2, стр.131-138.

15. Черноиванов В.И., Судаков С.К., Толоконников Г.К. Категорная теория систем, функциональных систем и биомашсистем, часть 2, Сборник научных трудов Международной научно-технической конференции «Нейроинформатика 2017», т.2, стр.139-147.

16. Бернштейн Н.А. Биомеханика и физиология движений. Избранные психологические труды, Москва-Воронеж, 1997, 605 с

17. Анохин П.К. Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем, Принципы системной организации функций. М., «Наука», 1973, с. 5-61.

18. Post E.L. «Formal reduction of the general combinatorial decision problem», *Amer. J.Math.*, v.65, N2, 1943.

19. Маслов С.Ю. «Некоторые свойства аппарата канонических исчислений», Труды МИАН им.В.А.Стеклова, т.72, 1964, стр.5-56.

20. Матиясевич Ю.В. «Простые примеры неразрешимых канонических исчислений», Тр. МИАН СССР, т.93, 1967г., стр.50-88.

21. Tolokonnikov G.K. Functional Systems Integrated with a Universal Agent of Artificial Intelligence and Higher Neurocategories, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, volume 1315, 2021, pp. 3-12, DOI <https://doi.org/10.1007/978-3->

030-67133-4.

22. Жданов А.А. Автономный искусственный интеллект. М., БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008, (монография), 359 с.

***A sought-after scientific direction at the intersection of fundamental mathematics and neurophysiology for the needs of artificial intelligence***

Chernoivanov V.I.,  
*Academician of RAS, FNATS  
VIM RAS, Moscow, Russia,*  
e-mail: vichernoivanov@mail.ru

Sudakov S.K.,  
*member correspondent RAS,  
Research Institute of Normal  
Physiology named after P.K.Anokhin  
RAS, Moscow, Russia*  
e-mail: s-sudakov@nphys.ru

Tolokonnikov G.K.,  
*Candidate of Physics  
and Mathematics,  
FNATS VIM RAS,  
Moscow, Russia*  
e-mail: admcit@mail.ru

**Abstract.** The formulation of the currently demanded scientific direction of creation on the basis of intensive efforts at the intersection of fundamental mathematics and neurobiology of artificial intelligence, including strong artificial intelligence, is given with justifications. The problem of applications of systems theory and artificial intelligence to the practical issues of the implementation of machines and mechanisms equipped with artificial intelligence is discussed.

**Keywords:** systems, functional systems, biomachsystems, artificial and strong artificial intelligence, logic, categories, homotopy, cohomology, physiology, neurobiology, neural networks, reflex, genome, agricultural machinery.

**References**

1. Sudakov K.V. Normalnaya fiziologiya. Kurs fiziologii funktsionalnikh sistem [Normal physiology. Physiology of functional systems]. М., Medical Information Agency, 1999, 718 p.
2. Chernoivanov V.I. Biomashsistemi: voniknovenie, razvitie i perspektivi [Biomashsystems: emergence, development and prospects], *Biomachsystems*, 2017, vol. 1 No. 1, pp. 7-58.
3. Tolokonnikov G.K. Neformalnaya kategornaya teoriya sistem [Informal categorical theory of systems], *Biomachsystems*, vol. 2, no. 4, 2018, pp. 41-144.
4. Chernoivanov V.I., Sudakov S.K., Tolokonnikov G.K. Teoriya funktsionalnikh sistem v kontekste obshego sistemnogo podhoda [The theory of functional systems in the context of the general systems approach], *Biomachsystems*, Vol.2, No. 1, 2018.
5. Laberge D. Clarifying the triangular circuit theory of attention and its relations to awareness replies to seven commentaries. *PSYCHE: An Interdisciplinary Journal of Research On Consciousness* 6 (2000).
6. Tononi G. Integrated information theory of consciousness: an updated account. *Arch Ital Biol.* 150, 2012, 56–90.
7. Barcelo E., Kramer X., Laubenbacher R., Weaver C. Foundations of a connectivity theory for simplicial complexes. *Adv. Appl. Math.*, 2001, vol. 26, pp. 91-128.
8. Babson E., Barcelo H. Homotopy theory of graphs. *J. Algeb. Comb.*, 2006, vol. 24, pp. 31-44.
9. Anokhin K.V. Kognitom: v poiskakh fundamentalnoy neironauchnoy teorii soznaniya [Cognitom: In Search of a Fundamental Neuroscientific Theory of Consciousness]. *Journal of Higher Nervous Activity I.P. Pavlova.* 2021, no. 1, pp. 39-71.
10. Manin Yu., Marcolli M. Homotopy Theoretic and Categorical Models of Neural

Information Networks, arXiv: 2006.15136v1, [cs.LO], 23, Jun, 2020. 80 p.

11. Galushkin A.I. Sintez mnogosloinikh sistem raspoznavaniya obrazov [Synthesis of multilayer image recognition systems]. M., Energy, 1974.

12. Galushkin A.I. Neironnie seti: osnovi teorii [Neural networks: fundamentals of the theory], M., Hotline, 2012, 496 p.

13. Tolokonnikov G. K., Chernoiivanov V. I., Sudakov S. K., Tsoi Y. A. Systems Theory for the Digital Economy, Advances in Intelligent Systems and Computing, V. 1127, 2020, pp. 447-456, [https://doi.org/10.1007/978-3-030-39216-1\\_41](https://doi.org/10.1007/978-3-030-39216-1_41).

14. Chernoiivanov V.I., Sudakov S.K., Tolokonnikov G.K. Kategornaya teoriya sistem, funktsionalnikh sistem i biomashsistem. 1 [Category theory of systems, functional systems and biomash systems], part 1, Collection of scientific papers of the International Scientific and Technical Conference "Neuroinformatics 2017", v.2, pp. 131-138.

15. Chernoiivanov V.I., Sudakov S.K., Tolokonnikov G.K. Kategornaya teoriya sistem, funktsionalnikh sistem i biomashsistem. 2 [Category theory of systems, functional systems and biomass systems], part 2, Collection of scientific papers of the International Scientific and Technical Conference "Neuroinformatics 2017", v.2, pp. 139-147.

16. Bernstein N.A. Biomokhanika i fiziologiya dvizheniy [Biomechanics and physiology of movements]. Selected psychological works, Moscow-Voronezh, 1997, 605 p.

17. Anokhin P.K. Printsipialnie voprosi obshei teorii funktsionalnikh sistem [Fundamental questions of the general theory of functional systems], Principles of the systemic organization of functions. M., "Science", 1973, p. 5-61.

18. Post E.L. Formal reduction of the general combinatorial decision problem, Amer. J. Math., V. 65, N2, 1943.

19. Maslov S.Yu. Nekotorie svoistva apparata kanonicheskikh vichisleniy [Some properties of the apparatus of canonical calculus], Proceedings of the Steklov Steklov Steklov Institute, v. 72, 1964, pp. 5-56.

20. Matiyasevich Yu.V. Prostie primeri nerazreshimikh kanonicheskikh ischisleniy [Simple examples of undecidable canonical calculi], Tr. Steklov Mathematical Institute of the USSR, vol. 93, 1967, pp. 50-88.

21. Tolokonnikov G.K. Functional Systems Integrated with a Universal Agent of Artificial Intelligence and Higher Neurocategories, Advances in Intelligent Systems and Computing, volume 1315, 2021, pp. 3-12, DOI <https://doi.org/10.1007/978-3-030-67133-4>.

22. Zhdanov A.A. Avtonomniy iskusstvenniy intellekt [Autonomous artificial intelligence]. M., BINOM. Knowledge Laboratory, 2008, (monograph), 359 p.

**Обзор исследований по искусственному интеллекту,  
алгебраической биологии и теории систем. Исторический  
аспект, современное состояние и перспективы. Часть 1.**

**Савельев А.В.,**

Москва, [gmkristo@rambler.ru](mailto:gmkristo@rambler.ru)

**Алексеев А.Ю.,**

Москва, НСММИ при Президиуме РАН, [mail@scmai.ru](mailto:mail@scmai.ru)

**Толоконников Г.К.,**

ФНАЦ ВИМ, Москва, [admci@mail.ru](mailto:admci@mail.ru)

**Петухов С.В.,**

Москва, ИМАШ РАН, <http://petoukhov.com>

**Аннотация** Обзор посвящен исследованиям по искусственному интеллекту, алгебраической биологии и теории систем в историческом аспекте с охватом современного состояния и перспектив развития. В обзор включены материалы, в том числе, обзорного характера озвученные в докладах участников Совещания «Междисциплинарное взаимодействие алгебраической биологии, теории систем и искусственного интеллекта» организованного и проведенного 27-29 января 2021 г. Международным междисциплинарным Семинаром "Алгебраическая биология и теория систем" совместно с Научным Советом по методологии искусственного интеллекта и когнитивных исследований при Президиуме РАН и Российским физиологическим обществом имени И.П.Павлова. Определенный акцент делается на работах в указанных областях, выполненных отечественными учеными. Предлагаемый обзор не может рассматриваться как в каком-либо смысле исчерпывающий, скорее, это попытка авторов основываясь на своих представлениях дать описание работ с акцентом на работы отечественных ученых в указанных в заглавии областях науки.

**Ключевые слова:** системотехника, общая теория систем, системный анализ, нейрокомпьютинг, российские классики мировой науки, квантовые компьютеры, категории, теория вычислений, машина Корсакова .

## **0. Введение**

В январе 2021 года (с 27-29 по января) состоялось Совещание «Междисциплинарное взаимодействие алгебраической биологии, теории систем и искусственного интеллекта», организованное Международным междисциплинарным Семинаром "Алгебраическая биология и теория систем" совместно с Научным Советом по методологии искусственного интеллекта и когнитивных исследований при Президиуме РАН и Российским физиологическим обществом имени И.П.Павлова (далее именуется, как «Совещание»). Стержнем Совещания явилось весьма востребованное в настоящее время междисциплинарное направление взаимодействия фундаментальной математики и нейрофизиологии в отношении применения имеющихся и ожидаемых результатов на стыке указанных наук в искусственном

интеллекте, в особенности, сильном искусственном интеллекте. Отдавая должное известным выдающимся успехам приложений искусственных нейронных сетей глубокого обучения, участники совещания сосредоточились на следующем шаге развития искусственного интеллекта, основанном на указанном взаимодействии фундаментальной математики и нейрофизиологии. Особое внимание во многих докладах и в обсуждениях участников Совещания уделялось фундаментальному вкладу отечественных ученых в указанных областях науки, в особенности, в вопросах приоритета открытий и идей, что повлияло даже на принятое в результате дискуссий между участниками название издаваемых трудов Совещания.

Обзор посвящен исследованиям по искусственному интеллекту, алгебраической биологии и теории систем в историческом аспекте с охватом современного состояния и перспектив развития. В обзор включены материалы, в том числе, обзорного характера, озвученные в докладах участников Совещания. Определенный акцент делается на работах в указанных областях выполненных отечественными учеными. Предлагаемый обзор не может рассматриваться как в каком-либо смысле исчерпывающий, скорее, это попытка авторов основываясь на своих представлениях и мнениях участников Совещания дать описание работ с акцентом на работы отечественных ученых в указанных в заглавии областях науки.

Важным моментом изложения в обзоре является принятое авторами решение о размещении отдельных частей текста в оригинальном исполнении, выполненном отдельными авторами, без попыток найти авторский консенсус в стиле и некоторых оценках (авторство таких частей указывается в их названии). К разнородности текста обзора также привело решение разместить в обзоре в расширенном варианте основные идеи (и их развитие), породившие квантовый компьютер, выдвинутые Ю.И.Маниным (за несколько лет до общеизвестных статей Р. Фейнмана). Авторы выражают благодарность Сопредседателю Семинара "Алгебраическая биология и теория систем" чл.-корр. РАН и академику ряда академий Юрию Ивановичу Манину за выданные им для обзора материалы и ценные советы по изложению. Отметим, что обзор не в последнюю очередь, включает материалы, доложенные на Совещании, некоторые доклады кратко обсуждаются в самом обзоре, на другие доклады ниже даны ссылки на их видеоролики.

Журнал «Биомашсистемы», предоставивший возможность издания трудов совещания, использует не только бумажный вариант публикации, но и размещение материалов на сайтах и видеоканалах. В частности, используется видеоканал Семинара на ютуб-хостинге по адресу

<https://www.youtube.com/channel/UC8JLsuRzzPsRiHwrwEjMCtw>

Те статьи выпуска, которые имеют источником доклад автора на Совещании сопровождаются в данном издании видеороликами самих докладов, следует отметить, что тексты статей издания и опубликованные видеоролики

докладов могут существенно отличаться, но, в любом случае, они дополняют друг друга. Возможны с течением времени изменения в адресах видеороликов, но относительно постоянным являются адреса сайтов журнала [www.biomachsys.com](http://www.biomachsys.com), семинара [www.algbiosys.ru](http://www.algbiosys.ru), и выше указанного ютуб-канала, более того, можно при необходимости запросить информацию по электронной почте Семинара [seminar\\_algbio@biomachsys.com](mailto:seminar_algbio@biomachsys.com).

Ниже указаны адреса ютуб-канала Международного междисциплинарного Семинара "Алгебраическая биология и теория систем" для роликов выступлений участников Совещания, публикуемых в данном томе трудов Совещания.

Анохин К.В. (академик РАН) <https://youtu.be/tZoGXoN8hv8>  
Ершов Ю.Л. (академик РАН) <https://youtu.be/gYSAVZsa1Vw>  
Лекторский В.А. (академик РАН) <https://youtu.be/h99hqvwB5DQ>  
Островский М.А. (академик РАН) <https://youtu.be/pKngDlZjvY0>  
Сигов А.С. (академик РАН) <https://youtu.be/qbbd-RMdu1g>  
Судаков С.К. (чл.-корр. РАН) <https://youtu.be/Eo0cljiGIrg>  
Черноиванов В.И. (академик РАН) <https://youtu.be/gu5tQdEQ4Eg>

Алексеев А.Ю. <https://youtu.be/UJMm4r7468c>  
Алоджанц А.П. <https://youtu.be/KmwmomPGVZA>  
Витяев Е.Е. <https://youtu.be/ks6MUmjDaxI>  
Жданов А.А. <https://youtu.be/9PtDw6F87d4>  
Лабунец В.Г. <https://youtu.be/1A6s1nLY30Q>  
Мазуров М.Е. <https://youtu.be/s5lKHLE08NQ>  
Петухов С.В. <https://youtu.be/QIWFAdEcGis>  
Савельев А.В. <https://youtu.be/D4CUmuKMclA>  
Савостьянов Г.А. <https://youtu.be/Bz70J9uWso0>  
Толоконников Г.К. <https://youtu.be/Bz70J9uWso0>  
Юматов Е.А. [https://youtu.be/U7dR6\\_pL5lo](https://youtu.be/U7dR6_pL5lo)

Обзор разбит на части, вторая часть размещена во втором томе трудов Совещания.

### ***1. Теория систем и системотехника*** (раздел написан А.В.Савельевым)

Стоит начать обзор с теории систем, как теперь общепризнанно, являющейся «наукой наук» [Yi-Lin Forrest, 2018] и системотехники, при этом акцентируем внимание на вкладе отечественных ученых, как оказывается, приоритет открытий которых, часто остаётся за кадром во многих публикациях, особенно, западных авторов.

Сразу укажем на прекрасный авторский обзор [Нерушай, 2015] по существу и истории системотехники. Обычно, в западной литературе основоположником теории систем называют Берталанфи и его коллег (М.Месаровича и других). На самом деле, является хорошо известным факт, что до того как родились продекларированные «основоположники» общей теории систем – Г.Х. Гуд, Р.Э. Макол, Л. Берталанфи, была хорошо известна и даже более детально проработана общая теория систем в лицах В.М. Бехтерева, сформулировавшего ещё в 1907 г. 23 универсальных общесистемных закона [Бехтерев, 1907], А.А. Богданова (Малиновского), 1913 г. [Богданов, 1913], Т.Котарбиньского [Kotarbiński, 1929], П.М. Керженцева (Лебедева), 1921 г. [Керженцев, 1921], А.К. Гастева [Гастев, 1921].

Первые общесистемные представления восходят вовсе не к Берталанфи, а к И.М. Сеченову и И.П. Павлову, а ещё раньше — к К. Марксу [Кузьмин, 1986] и ещё раньше — к М.В. Ломоносову [Ломоносов, 1744]. Интересно, что Ломоносов сформулировал основные положения общей теории систем практически в современном виде, опередив на пару веков время (и «основоположника» Берталанфи!). Однако, тогда не нашлось её реализации в виде сложных искусственных систем — технических и организационных, появление которых стимулировало развитие теории систем как организационной науки о всеобщих принципах организации в «Тектологии» Богданова (1913-1925 гг.), технических систем в «Общей задаче устойчивости движения» А.М. Ляпунова (1892 г.) или «Общей теории структуры и синтеза механизмов» П.Л. Чебышёва (1861 г.) [Чебышёв, 1849], и математических основ теории систем в его же «Общей теории сравнений» (1849) [Чебышёв, 1849, 2014]. Как только состоялось достаточное продвижение в изучении биосистем и осознание их грандиозной сложности, была выработана методология работы с ними на уровне общесистемных свойств, практически не изменившаяся до настоящего времени, разве что, изрядно утратившая уже свои компоненты и упростившаяся в трудах Берталанфи и последователей. Первоначальный более богатый вариант этого прекрасно отображён хотя бы в программной работе И.М. Сеченова «Рефлексы головного мозга», положения которой блестяще применены И.П. Павловым в конце XIX — начале XX веков. Также необходимо обратить внимание на Теорию функциональных систем (ТФС) академика П.К. Анохина, разработанную им в 1925-1935 гг. [Анохин, 1927, 1935], которую не любят цитировать, особенно за рубежом, но явно или неявно до сих используют нейрофизиологи всего мира. Правда, опять же далеко не в полном объёме, поскольку в общей теории систем П.К. Анохина входит самоорганизация, так и не понятая последующими за ним «основоположниками» — Г.Х. Гудом, Р.Э. Маколом, Л. Берталанфи. Более или менее её начал осознавать бельгийский учёный, Нобелевский лауреат Илья Пригожин ещё 20 лет спустя относительно Берталанфи, за что и получил Нобелевскую премию по химии в 1977 г. Правда, впоследствии отказался от полученных результатов, поскольку полностью по



его же признанию в тайне самоорганизации по Анохину до конца не разобрался.

Теория функциональных систем успешно развивалась в НИИ нормальной физиологии имени П.К.Анохина РАН под руководством В.К.Судакова и в последствии С.К.Судакова, уже после П.К.Анохина. Поскольку на Советании она была одним из основных направлений остановимся здесь на ней чуть подробнее. Современные проблемы искусственного интеллекта стоит решать, привлекая теорию функциональных систем, однако, в своем классическом виде она в значительной степени интуитивна, и то, что может быть эффективным в физиологии, в машинах и механизмах с искусственным интеллектом не работает, нужна формализация. Это понимал уже в деталях сам П.К.Анохин и сам начал работы в этом направлении, в частности, они совместно с Цыганковым В.Д. разрабатывали нейрокомпьютер Эмбрион [Цыганков, 2018]. На советании представлены разработанные и находящиеся в процессе разработки различные формализации функциональных систем, в теории когнитива К.В.Анохина [Анохин, 2014], [Анохин, 2021], которая представляется как развитие теории функциональных систем, в вероятностном подходе к функциональным системам Витяева Е.Е. [Витяев, 2009, 2012, 2015], [Мухортов, 2012], [Vityaev, Martinovich, 2015], [Vityaev, 2013, 2015], сами постулаты общей теории систем данные П.К.Анохиным в 1973 году формализованы в виде категорной теории систем, разрабатываемой Толоконниковым Г.К. [Толоконников, 2016, 2017, 2018 Нейрокомпьютеры; 2018 *Биомасшсистемы*, т.2, №1; 2018 *Биомасшсистемы*, т.2, №4] [Tolokonnikov, 2020 v. 938, 2020 v. 1126, 2021], идеи теории функциональных систем заложены в подход Жданова А.А. в его модели автономного искусственного интеллекта [Жданов, 2012], в теорию биомашсистем, развиваемую группой академика В.И.Черноиванова [Черноиванов, 2017]. Перечисленные направления формализации теории функциональных систем детально изложены в томах трудов Советания, включая данный том.

Хорошо известно, что диссипативные структуры, открытые И.Пригожиным, основывались на реакции Б.П. Белоусова (1951 г.) [Белоусов, 1951] и теории А.М. Жаботинского (1964 г.) [Жаботинский, 1964]. Справедливости ради, необходимо заметить, что в упомянутом обзоре [Нерушай, 2015], к сожалению, не указаны важнейшие западные основоположники математической теории систем — Р.Э. Калман (1964), разработавший оценку состояний систем на основе теории А.Н. Колмогорова (1922-25, 1946 гг.), и М. Месарович (1978 г.) [Месарович, 1973, 1978], бывший студент крупнейшего отечественного идеолога системного подхода и математической теории систем (системного анализа, с 1956 г.) классика академика Н.Н. Моисеева (одному из авторов - А.С. - рассказывал об этом сам Никита Николаевич!), впервые выполнившего на этой основе моделирование «ядерной зимы» в 1983 г. Р.Э. Калман в 1959 г. разработал знаменитый фильтр

Калмана, являющийся частным случаем общего фильтра Р.Л. Стратоновича (1955 г.) [Стратонович, 1961]. Н. Винер так писал о А.Н. Колмогорове: «*Вот уже в течение тридцати лет, когда я читаю труды академика Колмогорова, я чувствую, что это и мои мысли. Это всякий раз то, что я и сам хотел сказать*» [Винер, 1964]. Не упомянут также американский основоположник инженерного подхода в системотехнике — Дж. Клир, который в 1989 г. ввёл термин «Системология», явившийся названием книги, а до него этот термин ввёл Б.С. Флейшман (ИРЭ и Институт Океанологии АН СССР), также опубликовав книгу с таким же названием (1971, 1984 г.г.). Также стоило бы упомянуть Дж. Форрестера, разработавшего в 1971 г. теорию мировой динамики, и академика Г.И. Марчука, разработавшего на основе теории систем в 1962 г. математическую модель погоды. Также следует упомянуть, собственно, как и главного системщика искусственных технических систем председателя Совета по комплексной проблеме «Кибернетика» при Президиуме АН СССР академика Б.Н. Петрова, благодаря общей теории технических систем которого, в частности, до сих пор осуществима стыковка на космической орбите. К сожалению, незаслуженно забыты выдающиеся вклады отечественных учёных — академика Г.С. Поспелова, Д.А. Поспелова, Ю.А. Урманцева (ОТСУ — общая теория систем управления, созданная им в 1968 г.), Тюхтина, А.И. Уёмова, В.Т. Морозовского, М.В. Меерова, хотя и дела их говорят сами за себя. Не можем обойти стороной и великолепную украинскую научную школу теории систем в лице академиков В.М. Глушкова и Н.М. Амосова (онлайн сеть ОГАС — общегосударственная автоматизированная система управления, проект глобальной системы искусственного интеллекта для полностью автоматического общественного управления в 50-60-х гг. XX в., проект которого «воспет» в рок-опере об искусственном интеллекте «2032», написанной Виктором Аргоновым [Аргонов, <http://argonov.ru/2032.html>]), Минскую научную школу академика Н.С. Мисюка (теория системной комбинаторной памяти, откуда берут начало все компьютерные архиваторы) и грузинскую научную школу академика В.В. Чавчанидзе, итогом системного подхода которой явились ключевые идеи модной сейчас мировой идеологии квантовых компьютеров и квантовых вычислений. Значительный вклад в развитие общей теории систем на международном уровне внёс проф. В.А. Геодакян [Геодакян, 1971, 1984], впервые открыв таким образом новое направление теоретической биологии, признанное сейчас во всём мире. Значительный вклад в математическую теорию систем, включая разработку наиболее общего определения системы на основе первопорядковой логики предикатов и теории типовых кванторов внесли В.М. Матросов (системы процессов) [1974], [1980] и С.Н. Васильев [1981, 2000, 2015] и их ученики, разработанное в их школе J-исчисление во многих случаях оказалось существенно мощнее известного подхода резолюций Робинсона и обратного метода С.Ю. Маслова [Маслов, 1980], нашло и находит многочисленные применения на практике.

Необходимо не забывать, что хотя как единичное явление нейрокомпьютинг и возник в 1832 г. [Алексеев, 2013, 2018], востребованность и распространение он получил с появлением и распространением сложных электрических средств обработки информации, когда возникла необходимость работы со сложными многокомпонентными системами. Общая теория систем (ОТС), таким образом, явилась непосредственным теоретическим базисом нейрокомпьютинга [Савельев, 1983]. Не случайно многие из теоретиков ОТС были профессиональными биологами. Успехи ОТС и системного анализа в создании искусственных технических систем (БПЛА, стыковка на орбите, РВСН и ПРО, радиолокация, ядерная энергетика и так далее и системы управления ими) настолько вскружили головы, что этот эффективнейший аппарат попытались применить и для описания биосистем. Так до сих пор, как известно, основным «разрешительным документом» нейрокомпьютинга является теорема А.Н. Колмогорова, решающая 13-ю проблему Гильберта [Колмогоров, 1957]. Она утверждает, что любая непрерывная функция  $f$ , определенная на  $n$ -мерном единичном кубе, может быть представлена в виде суммы  $2n+1$  суперпозиций непрерывных и монотонных отображений единичных отрезков:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} g_n \sum_{p=1}^n \phi_{pq}(x_p),$$
$$x = (x_1, \dots, x_n), 0 \leq x_i \leq 1$$

Слева в этой формуле стоит произвольная непрерывная функция, определенная на многомерном кубе, справа функции, определенные на отрезках  $[0, 1]$ . Собственно, в этой формуле и помещается нейрокомпьютинг. Однако, эта же теорема явилась и существенным ограничительным фактором нейрокомпьютинга, ограничив его рамки вычислительной математикой и, конкретно, решением задачи аппроксимации данных, в которые попали и схема МакКаллока — Питса, и перцептрон Розенблатта, и перцептроны Цыпкина. Задача аппроксимации хоть и является достаточно универсальной, но чрезвычайно мало приближает нейрокомпьютинг к биологическим объектам и нисколько не оправдывает приставки «нейро-» [Савельева, 1995]. Тем не менее, ОТС сыграла важнейшую роль в становлении самой концепции нейрокомпьютинга и искусственного интеллекта [Савельев, 2015].

Теперь мы обратимся, как это уже произошло с упоминанием работы А.Н.Колмогорова, к более формальному обсуждению некоторых результатов и направлений, связанных, в частности, с теорией функциональных систем и общей теорией систем, представленных докладами на Совещании.

Рассмотрим основанное на общесистемных и общебиологических подходах направление, развиваемое А.А.Ждановым, под названием автономного искусственного интеллекта [Жданов, 2012] - теорию автономного адаптивного управления (ААУ). Эта теория описывает логически вынужденное представление о принципе действия, составе, структуре и алгоритме работы

нервной системы (и мозга) любого живого организма, как управляющей системы (УС), помещенной внутрь объекта управления (ОУ), в свою очередь помещенного в среду с малоизвестными ему при рождении свойствами. Механизм, предлагаемый теорией ААУ, состоит в следующем.

Мозг является информационной машиной и управляющей системой (УС), призванной обеспечить выживание тела за счет целесообразного управления, под которым нужно понимать управление, учитывающее реальные свойства системы «среда-тело-мозг». Эти свойства мозг должен выявить в потоке дискретной информации в процессе взаимодействия со средой через свои датчики и исполнители (интерфейс между преимущественно дискретным мозгом и аналоговым внешним миром), отразить в виде информационных структур – «знаний» и запомнить в соответствующем разделе памяти. Алгоритм работы мозга должен состоять из решения двух задач – добывания «знаний» и их использования для управления. «Знания» можно представить себе в виде структурированной коллекции «элементарных знаний», описываемых приведенным ниже выражением.

Мы используем для этого выражения и далее (в том числе в двух указанных других примерах) логические связки конъюнкции & (A & B - читается «A и B») и импликации  $\rightarrow$  (A  $\rightarrow$  B - читается «из A следует B») математической логики:

$$(\{O_i(t)\} \& D_j(t+1)) \rightarrow \{O_k(t+2)\} \rightarrow \{Z_k(t+3)\}.$$

Здесь  $t$  – это текущий момент времени упорядочивающего события в причинно-следственном отношении.

$\{O_i(t)\}$  – это множество представляющих текущее состояние распознанных образов, из тех, которые умеет распознавать система распознавания УС.

$D_j(t+1)$  – это одно из множества альтернативных действий, которые согласно эмпирическим знаниям УС может совершить при данных распознанных образах;

$\{O_k(t+2)\}$  – это образы результатов, которые будут получены, если УС выберет и совершит действие  $D_j(t+1)$ , согласно эмпирическому опыту, либо другим знаниям, хранящимся в памяти БЗ;

$\{Z_k(t+3)\}$  – это совокупность качественных оценок от аппарата эмоций, которые будут получены как следствие распознавания образов  $\{O_k(t+2)\}$ , что также основано на опыте или на других знаниях.

Смысл приведенного логического выражения состоит в том, что, распознав текущую ситуацию в виде множества распознанных образов  $\{O_i(t)\}$ , УС обращается к своей памяти (БЗ), находит там список возможных в этой ситуации действий  $D_j(t+1)$  и их следствий, и выбирает для реализации то из них, которое

приведёт к результирующей ситуации  $\{O_k(t+2)\}$  с максимальными положительными из возможных здесь эмоциональных оценок  $\{Z_k(t+3)\}$ . Это действие и выбирается УС для совершения.

Для успешного функционирования такого механизма принятия решений необходимо постоянное самообучение - формирование новых образов, формирование их качественных (эмоциональных) оценок, формирование новых действий, формирование новых знаний, и формирование самих процедур такого формирования. Само функционирование УС по необходимости сводится к текущему параллельному решению двух задач - принятию оптимальных решений в текущей ситуации (оптимизационный алгоритм) и постоянному накоплению добываемых знаний (гносеологический алгоритм). Настоящие интеллектуальные системы, которые мы видим в природе, и не только у человека, но и у животных, работают, как считает автор теории ААУ, по этому принципу.

Но под системами ИИ сегодня понимают, в основном, автоматические системы анализа данных, к каковым относятся активно разрабатываемые сегодня нейросетевые системы классификации, системы распознавания образов, системы поиска корреляций (deep learning, big data, data mining), а также использование рефлекторной формы организации управления.

Перечисленное, как это детально показано в докладе А.А.Жданова (см. также его статью в данном издании), — лишь незначительная часть механизма ААУ и поэтому не может считаться полноценным интеллектом.

Биологический мозг, как это предлагается считать А.А.Ждановым, является реализацией описанного принципа ААУ, предполагается, что его реализация в основных чертах возможна также в технических системах. Теория ААУ формализована до уровня, позволяющего программировать на ее основе системы управления с автономным поведением, имеются примеры реально функционирующих прикладных систем. Важной отличительной чертой систем ААУ является наличие в них «аппарата эмоций» — многофункциональная подсистема качественного оценивания информации и мотивации управления. Аппарат эмоций является системообразующей подсистемой в любой нервной системе и должен быть таковой в системах ИИ. Основные задачи аппарата эмоций решены в теории ААУ и реализовывались во всех из указанных разработанных примеров.

По сравнению с теорией ААУ в подходе Витяева Е.Е. проведено более детальное построение математической модели для функциональной системы поведенческого акта по П.К.Анохину. Указанное построение основано на развиваемом Витяевым Е.Е. с коллегами аппарате семантического вероятностного вывода, как строго математического подхода для индуктивно-статистических выводов предсказаний и прогнозов.

Фундаментальная проблема, в частности, искусственного интеллекта состоит в том, как организм (или анимат) познаёт свойства окружающего мира для их использования в целях своего выживания. Один из ключевых вопросов

здесь в проверке непротиворечивости получаемых знаний. Например, о продукционной модели в этом отношении Л.С.Болотова пишет: «Продукционным моделям не хватает строгой теории. Пока на практике при работе с продукционными моделями в них используются эвристики. При задании модели проблемной области в виде совокупности продукций нельзя быть уверенным в её полноте и непротиворечивости» (см. [Болотова, 2012] стр.163). Для иллюстрации обычно используют классический пример статистической двусмысленности. В общепринятые модели предсказания некоторого высказывания  $G$  входит следующая схема

$$\frac{L_1, \dots, L_m}{\frac{C_1, \dots, C_n}{G}}$$

Здесь  $L_1, \dots, L_m$  - множество законов,  $C_1, \dots, C_n$  - множество фактов,  $G$  – предсказываемое высказывание.

Пример состоит в следующем. Пусть есть следующие высказывания:

$L_1$  = «Почти все случаи заболевания стрептококком быстро вылечиваются инъекцией пенициллин»;

$L_2$  = «Почти всегда устойчивая к пенициллину стрептококковая инфекция не вылечивается после инъекции пенициллина»;

$C_1$  = «Джонс заболел стрептококковой инфекцией»;

$C_2$  = «Джонс получил инъекцию пенициллина»;

$C_3$  = «Джонс имеет устойчивую к пенициллину стрептококковую инфекцию».

Отсюда можно вывести два противоречивых утверждения, одно, объясняющее почему Джонс выздоровеет быстро ( $E$ ), и другое, объясняющее, почему Джонс не выздоровеет быстро ( $\neg E$ ).

Объяснение 1	Объяснение 2
$L_1$	$L_2$
$C_1, C_2$	$C_2, C_3$
$E$	$\neg E$

Условия обоих объяснений не противоречат друг другу, оба они могут быть одновременно истинными. Тем не менее, их выводы противоречат друг другу.

В подходе Витяева Е.Е. построены максимально специфические статистические законы, для которых им доказана теорема, что индуктивно-статистический вывод по таким законам не приводит к противоречиям. Приведём фрагмент формализма и саму теорему о непротиворечивости.

Это построение опирается на следующий аппарат точно определённых понятий: вероятностной причинности, семантического вероятностного вывода, максимально специфической причинной связи и других вероятностных формальных понятий.

Пусть  $G$  - множество объектов и  $M$  - непересекающееся с  $G$  множество атрибутов (этих объектов),  $I \subseteq G \times M$  - задает какими атрибутами обладает тот или иной объект, тройка  $K = (G, M, I)$  называется **контекстом**. Определим для множества объектов  $A$  следующее множество атрибутов  $A^\uparrow = \{m \in M \mid \forall g \in A, (g, m) \in I\}$ , а для множества  $B$  атрибутов множество объектов  $B^\downarrow = \{g \in G \mid \forall m \in B, (g, m) \in I\}$ , тогда пара  $(A, B)$  называется (формальным) **понятием**, если  $A^\uparrow = B, B^\downarrow = A$ . Такое определение вполне соответствует интуиции: понятие определяется некоторым набором свойств и набором объектов, имеющих эти свойства. Атрибутам  $m$  можно сопоставить предикаты  $m(\_)$ , определяемые так: « $\_$  имеет свойство  $m$ ». Это можно использовать для сигнатуры  $\Omega_K$  первогопорядковой логики с переменными  $x, t, \dots$  из множества  $X_K$ , пробегающими множество  $G$ , атомами и их отрицаниями  $m(x), \neg m(t), x, t \in X_K$ , образующими множество литералов  $L_K$ , и формулами  $\Phi_K$  (используем бескванторные формулы), определяемыми обычным образом. Далее, на множестве объектов задаётся вероятностная мера  $\mu: G \rightarrow [0, 1]$ , которая задаёт вероятностную меру  $\nu$  на множестве формул. **Отношением** называется формула

$$R = (H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_k \rightarrow C), R^+ = C, R^- = H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_k, R_s^- = \{H_1, H_2, \dots, H_k\}, k \geq 0,$$

литерал  $C$  не содержится среди литералов  $H_i$ . Вероятность отношения  $\eta(R) = \nu(R^+ \wedge R^-) / \nu(R^-)$  при пустой посылке ( $\nu(\emptyset) = 0$  и в других таких случаях) не определена. С помощью отношений определяются основные понятия подхода Е.Е.Витяева, для чего понадобятся некоторые виды отношений.

Отношение  $R_1$  называется **подотношением** отношения  $R_2$ , если  $R_1^+ = R_2^+, R_1^- \subset R_2^-$ , это обозначается как  $(R_1 \sqsubset R_2)$ .

Отношение  $R_1$  **уточняет** отношение  $R_2$ , что обозначается как  $R_2 > R_1$ , если  $\eta(R_2) < \eta(R_1)$  и  $R_2 \sqsubset R_1$ .

Отношение  $R$  называется **вероятностной причинной связью**, если для каждого  $\tilde{R}$  выполнено  $(\tilde{R} \sqsubset R) \Rightarrow (\tilde{R} < R)$ . Как видим,  $R$  уточняет все свои подотношения

**Сильнейшей вероятностной причинной связью** называться отношение  $R$ , для которого не существует такой вероятностной причинной связи  $\tilde{R}$ , что  $(R < \tilde{R})$ .

Теперь можно определить **Семантический Вероятностный Вывод** предсказаний некоторого литерала  $C$ , который есть по определению последовательность вероятностных причинных связей  $R_0 < R_1 < R_2 < \dots < R_m, R_0^- = \emptyset, R_m$  – сильнейшая вероятностная причинная связь и  $R_0^+ = R_1^+ = R_2^+ = \dots = R_m^+ = C$ .

**Максимально специфичное причинное отношение** для предсказания некоторого  $C$  – это сильнейшее вероятностное причинное отношение совокупности всех семантических вероятностных выводов предсказаний литерала  $C$ , имеющее максимальную условную вероятность.

Обозначим через  $MSCR$  множество всех максимально специфичных причинных отношений для предсказания некоторого литерала  $C$ . Под *системой причинных отношений* будем понимать любое подмножество  $\mathcal{R} \subseteq MSCR$ .

Определим **оператор предсказания** для системы  $\mathcal{R}$

$$\Pi_{\mathcal{R}}(L) = L \cup \{C \mid \exists R \in \mathcal{R} : R^{\leftarrow} \subseteq L, R^{\rightarrow} = C\}.$$

**Вероятностное формальное понятие** на контексте  $K$  – это пара  $(A, B)$ , удовлетворяющая следующим условиям:

$$\Pi_{\mathcal{R}}^{\infty}(B) = B, \quad A = \bigcup_{\Pi_{\mathcal{R}}^{\infty}(C) = B} C^{\downarrow}.$$

Другими словами, вероятностные понятия определяются как неподвижные точки оператора предсказания. Пусть  $K=(G,M,I)$  – формальный контекст, можно доказать, что если  $(A,B)$  – формальное понятие на  $K$ , то существует вероятностное формальное понятие  $(S,T)$  на  $K$  такое, что  $A \subseteq S, B \subseteq T$ .

Набор литералов  $L$  *непротиворечив*, если он не содержит одновременно атом  $C$  и его отрицание  $\neg C$ . Набор литералов  $L$  *совместен*, если  $v(\wedge L) \neq 0$ .

*Теорема Витяева Е.Е.*

Если  $L$  – совместно, то  $\Pi_{\mathcal{R}}(L)$  совместно и непротиворечиво для любой системы  $\mathcal{R}$ .

Анимату, находящемуся в некоторой окружающей среде неизвестно вероятностное распределение, но на основе приведённой схемы он может получать информацию и формировать вероятностные формальные понятия.

Подход успешно реализован на ряде практических приложений, в отношении моделирования функциональных систем оказывается, что причинных связей действий и результата достаточно для реализации схемы Витяева Е.Е., что можно интерпретировать, как модель общего принципа - мозг обнаруживает во внешнем мире все возможные причинные связи и осуществляет выводы по ним. В рамках развиваемой Витяевым Е.Е. формализации помимо построенной эффективной модели функциональных систем строго моделируются гиперсимплексы сетей сетей ... используемых в когнитоме в подходе К.В.Анохина, другими словами, построена также математическая вероятностная модель когнитома [Витяев, 2006], [Vityaev, 2015], [Мухортов, 2012], [Demin, 2014].

Отметим, что варианты решения проблемы получения непротиворечивых знаний о внешней среде имеются в упомянутом подходе Жданова А.А., а также в направлении, разрабатываемом Фином В.К. и его школой под общим



наименованием ДСМ-метода [Финн, 2021]. Об этом направлении детально рассказано во второй части обзора.

Возникшая в последние годы категорная теория систем [Толоконников, 2016, 2017, 2018 Нейрокомпьютеры; 2018 *Биомасиистемы*, т.2, №1; 2018 *Биомасиистемы*, т.2, №4] [Tolokonnikov, 2020 v. 938, 2020 v. 1126, 2021] в существенной степени представляет собой, как уже упоминалось, формализацию с помощью теории свёрточных поликатегорий и категорных склеек постулатов, предложенных для общей теории систем П.К.Анохиным [Анохин, 1973].

Анализ [Черноиванов, 2018] последних работ П.К.Анохина, в которых он уже говорит не только о нейрофизиологии, но и о системных образованиях в производстве, других разделах науки, социальной сфере, искусстве и так далее, то есть в которых он строит общую теорию функциональных систем, пытаясь распространить успехи теории в нейрофизиологии на другие области, показывает выделенные и обоснованные им постулаты, сводящиеся к следующим.

Некоторое системное образование, которое можно назвать системой должно удовлетворять следующим трём требованиям (принципам, постулатам).

1. Необходимо наличие системообразующего фактора, обычно являющегося результатом, к которому будет стремиться формируемая система. Предполагается, что в некоторое время возник системообразующий фактор и сформировал, отвечающую ему систему. Предполагается, что энергия и другие ресурсы и механизмы, необходимые для формирования системы, имеются в достаточном количестве. Эти механизмы осуществляют по большому счету два действия: изменяют будущие подсистемы, так, чтобы они содействовали получению результата целостной системы, которые войдут в целостную систему как составляющие ее части и устанавливают связи между ними, которые нужны целостной системе для достижения ее результата.

Ключевым моментом является часть данного постулата, состоящая в утверждении П.К.Анохина [Анохин, 1973] о том, что система рассматривается как нечто целое и её построение идёт от целого к частям, опирается на известные ввиду достаточной изначальной определённости системообразующего фактора связи будущей системы с другими уже существующими системами. Итак, возник системообразующий фактор ("осознаны" цель, потребный результат и т.п.). Система начинает формироваться, возникают подсистемы и постепенно вся структура целостной системы. Процесс идет *реально* от целого к частям (подсистемам), количество, тип и свойства которых изначально неизвестны, но диктуются системообразующим фактором.

Подчеркнем, что речь идёт о произвольных системах, не обязательно относящихся к физиологии.

Вариант, когда система уже существует и требуется ее изучение,

аналогичен: мы обязаны вычленить системообразующий фактор, механизмы и ресурсы для её возникновения и поддержания и процесс изучения также проходит от целого к частям (система дана как готовое целое, видны её связи с другими системами, задача состоит в изучении, исходя из её свойств как целого и связей с другими системами, структуры её подсистем, их свойств и связей).

Итак, **первый постулат** общей теории систем по П.К.Анохину требует:

(1а) наличия **системообразующего фактора**,

(1б) наличия **механизмов и ресурсов** для реализации системы,

(1в) движения как при формировании системы, так и при изучении готовой системы, **от целого к частям**.

2. **Второй постулат**. Должен выполняться **принцип иерархии**: всякая подсистема данной системы сама является системой.

3. **Третий постулат**. Должен выполняться **принцип изоморфизма**.

П.К.Анохин утверждает [Анохин, 1973], что помимо наличия системообразующего фактора и выполнения принципа иерархии у систем должны быть общими ключевые шаги алгоритма получения результата, именно четыре блока: афферентный синтез, принятие решения, акцептор результата действия и блок программы действий, заимствованные из теории функциональных систем в физиологии. **Общей функциональной системой** П.К.Анохин назвал системное образование, удовлетворяющее трём перечисленным постулатам, при этом в третьем постулате использован изоморфизм по указанным шагам алгоритма достижения результата.

В категорной теории систем под этим понимают общую **функциональную** систему, но просто **общей системой** называется такое системное образование, в котором выполнены все три принципа П.К.Анохина, за исключением фиксации четырёх блоков алгоритма достижения результата. Для достижения результата возможны иные, заранее не ограниченные условиями алгоритмы. Например, такие варианты систем доставляют биомашсистемы, теория которых развивается академиком Черноивановым В.И. [Черноиванов, 2017] и его группой специалистов.

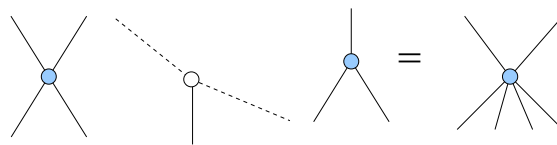
Выписанное интуитивное определение общей системы и общей функциональной системы получило строго математическую категорную формализацию [Толоконников, 207, 2018], опирающуюся на сверточные поликатегории и категорные склейки.



Примеры категорных стрелок (направления снизу вверх не указаны)

Категорию можно определить как набор стрелок, которые можно умножать (композиция), когда начало одной стрелки совпадает с концом другой. Аналогичные композиции определяются в классических случаях мульти- и поликатегорий.

В обычных поликатегориях композиция основана на соединении одного входа первой стрелки с одним выходом второй, соединения нейронов используют куда более богатый арсенал возможностей (то есть обычных поликатегорий для моделирования связей нейронов не хватает), который учтён в теории свёрточных поликатегорий, в которых композиция заменена на свёртку, необходимую для моделирования спайковых каналов связи нейронов



*Пример свёртки (пунктир) полистрелок*

Таким образом появилась категорная модель нейронов и нейронных сетей [Толоконников, 2016, 2017, 2018 Нейрокомпьютеры; 2018 *Биомасшсистемы*, т.2, №1; 2018 *Биомасшсистемы*, т.2, №4] [Tolokonnikov, 2020 v. 938, 2020 v. 1126]. В последние годы интенсивно развиваются подходы для учета неспайковых видов связи нейронов (с помощью медиаторов и так далее) [Кузнецов, 2018], для моделирования подобных видов связи поликатегорной модели нейрона недостаточно. Однако, появилась теория категорных склеек [Толоконников, 2017, 2018, 2021], которая позволила дать категорные модели для нейронов и их сетей с наличием помимо спайковой активности других видов связи и межклеточной коммуникации. Категорная склейка, если говорить неформально, получается, если, стрелку, которая состоит из начала, конца и имени разломить пополам и уже, в том числе, и полистрелки собирать из таких половинок. Категорная формализация постулатов П.К.Анохина оказалась выводящей далеко за пределы обычной теоретико-множественной математики, среди универсумов категорной теории систем возникают топосы и другие арены системных действий. Стоит отметить, что теория вычислений давно работает без использования закона исключенного третьего (то есть в конструктивной логике), а категорные методы широко применяются в индустрии программного обеспечения (например, в подходе Гогена [Goguen, 1991]), где программные блоки суть подсистемы вышестоящих программ.

Теория категорных склеек в моделях систем позволяет не только описывать разнообразные связи (и сети), но и естественным образом описывать историю формирования системы из подсистем, а также процедуры разложения имеющейся системы на подсистемы на основе указанной истории. Построение категорной теории систем основано на формальных первопорядковых

логических теориях, а сами склейки и поликатегории являются их моделями. В частности, приведенные схемы стрелок являются графическими обозначениями соответствующих логических формул, как это впервые сделано для категорий в [Hatcher, 1982]. Отметим, что приведённое напоминание (по поводу!) строгих математических понятий пригодится в следующих пунктах обзора, в особенности, в последнем разделе, где рассматривается достаточно детально категорная модель теории вычислений по Ю.И.Манину.

Возвратимся к системотехнике в ракурсе текущих политических изменений, на чём и закончим настоящий раздел обзора.

Было бы несправедливым списывать упущения, касающиеся отечественных достижений системотехники, поскольку, как известно, новые сформированные традиции современного российского образования полностью противоположны советским традициям, то есть теперь являются исключительно прозападными, совершенно не приемлющими отечественные достижения, особенно, передовые. В этом одна из объективных сегодняшних причин «забвения» многих достижений отечественной науки. Однако, отрадно заметить, что тем не менее, появляется литература, пытающаяся, хотя бы пока не восстановить, но поднять вопросы о восстановлении хоть какого-то минимума исторической справедливости [Грейг, 2014]. До последнего времени это, по всей видимости не было политически оправданным, особенно, учитывая (наконец, «поправленную» в прошлом году) 15 статью Конституции, но как быть сейчас в контексте кардинальной смены курса на «импортозамещение», когда «прозападность» вдруг начала выходить из столь переменчивой моды?

Во второй части обзора, помимо прочего, некоторые из затронутых тем (математической теории систем и других тем) будут разобраны более детально.

## ***2. Интеллектуальная машина Корсакова (1832 г.)***

(раздел написан А.Ю. Алексеевым)

Важной частью проблематики Совещания явился раздел методологии и философии искусственного интеллекта, представленный в нескольких докладах (см. например, <https://youtu.be/UJMm4r7468c>). Основной материал, относящийся к этой теме, размещен во второй части обзора, здесь мы достаточно детально осветим малоизвестный, но крайне важный и уникальный исторический факт создания не потерявшей до сих пор актуальности вычислительной машины, разработанной С.Н.Корсаковым за десятилетие до «аналитической машины» Ч.Бебиджа.

Самый первый в истории действующий проект интеллектуального компьютера в контексте современной научной рациональности предложен в 1832 г. российским инженером Семёном Николаевичем Корсаковым (1787-1853) в статье «Очерк о новом способе исследования посредством машин сравнения идей». Статья была опубликована на французском языке и впервые переведена на рус-

ский спустя 175 лет. Можно говорить про *мировое первенство* С.Н.Корсакова в искусственном интеллекте, в программировании, в организации хранения информации на перфокартах, в формировании коннекционистской парадигмы мышления. *Когнитивистский замысел* С.Н.Корсакова состоит в следующем:

- 1) антирепрезентативный отказ от модели мышления как логико-лингвистического исчисления;
- 2) антиэссенциалистская ориентация на многоаспектное сравнение связей между признаками идей, осуществляемое, по возможности, посредством механических манипуляций;
- 3) усиление человеческого разума, но не его компьютерная имитация;
- 4) инвариантность проектных решений относительно предметной области использования (его машина успешно применялась в демографии и гомеопатии);
- 5) экономическая эффективность и простота применения, предполагающие персональный бытовой компьютеринг.

С этой машины следует отсчитывать идею коннекционизма, нейрокомпьютинга, искусственного интеллекта, когнитивно-компьютерной технологии в мировом масштабе.

*Семён Николаевич Корсаков* (другое написание фамилии – Карсаков) (1787-1853) – выдающийся российский мыслитель, гениальный инженер, действительный статский советник (чин соответствовал генеральскому на воинской службе), известный гомеопат, практикующий врач-инженер. Родился в г. Херсоне накануне русско-турецкой войны 1787-1791 годов. С 1827 года и до конца дней проживал в Дмитровском уезде Московской губернии в собственном имении Тарусово на берегу реки Дубны [Мищенко, 2012]. С.Н.Корсаков является дальним родственником Н. А. Римского-Корсакова. В период написания статьи служил в Министерстве внутренних дел по статистике по части демографии городов и народонаселения России. Предложил метод обработки больших объёмов статистических данных и их каталогизации, согласно которому многие рутинные операции можно производить с помощью перфокарт и механизмов. Так же впервые он создал семейство «интеллектуальных механизмов», которые совместно моделировали сложную логику работы человеческого мышления. Именно с момента их появления предлагается отмечать день рождения коннекционизма как современной когнитивистской парадигмы. «Интеллектуальные механизмы» успешно использовались им в статистике и в гомеопатии. По сей день гомеопатические средства, подобранные по корсаковской методике, принято помечать литерой «К». С.Н.Корсаков сформировал объёмные «базы знаний» и снабдил их инструкцией работы машины для быстрого поиска гомеопатических лекарств в зависимости от многообразных симптомов заболевания. Данная инструкция – первая в мире компьютерная программа.

Интеллектуальная машина С.Н.Корсакова предназначена для работы со «сложными идеями». Коннекционистский замысел С.Н. Корсакова прост: «Все позитивные знания человек приобретает путем наблюдения и сравнения фак-

тов... [, однако] человек все же не способен проводить сложные сравнения с учетом многочисленных элементов. Между тем подобные сравнения можно реализовать с использованием механических манипуляций с ними. С этой целью необходимо лишь применять знаки с более выраженной физической сущностью, чем те, которыми мы обычно пользуемся [т.е. когда пользуемся словами естественного или искусственного языка – А.А.]. Разум извлекает информацию из письменного источника посредством образов, не имеющих материального выражения и не доступных для физического восприятия. Однако стоит ту же самую мысль облечь в материальную оболочку, существующую в трех измерениях, как мы получим возможность не только воспринимать информацию всеми своими чувствами, но и использовать физические свойства схожих элементов для решения умственных задач» [Корсаков, 2009]. В этом суждении чётко просматривается антирепрезентативная ориентация когнитивистской установки С.Н. Корсакова. Более выраженная физическая сущность мыслей – это не семиотическая модель сложной мысли, представленная на некотором специальном языке, например, на языке исчисления предикатов. Это – коннекционистская модель, построенная на установлении связей между признаками идей, очень схожая с современными нейрокомпьютерными моделями. Задача машины состоит не только в реализации рутинных операции, которые человек затрудняется осуществлять в уме при сравнении простых идей. Цель машины – *усилить человеческий разум*, так как она способна формировать сложные идеи исходя из системы связей между признаками более простых идей. Область применения машины не ограничивается научной деятельностью. Она применима «в повседневной жизни, когда человеку часто приходится одновременно держать в уме множество разных идей, извлекая их из памяти для сравнения с данной сложной идеей с тем, чтобы сделать тот или иной вывод» [Корсаков, 2009]. С.Н.Корсаков учёл даже «инновационные» особенности своей машины: «Стоимость подобных интеллектуальных машин сравнительно невысока, поскольку механизм их функционирования не сложен, а, следовательно, набор услуг, которые они могут оказать обществу, будет постоянно расширяться» ([Корсаков, 2009] стр.17).

Только недавно, с начала XXI века, в мировом и отечественном научном сообществе С.Н.Корсаков начинает получать признание как изобретатель первых в мире искусственных интеллектуальных систем. Спустя 175 лет после публикации оригинальной статьи С.Н.Корсакова [Karsakof, 1832] появились её переводы с французского языка на русский [Корсаков, 2009] и перевод [Корсаков, 2009, Пер. с франц. под ред. А.С.Михайлова], изданный отдельной книгой и снабжённый прекрасными биографическими сведениями о С.Н.Корсакове и Г.Н.Поварове, описанием истории возрождения забытой корсаковской идеи, а так же теоретико-множественной интерпретацией корсаковской машины.

**Состав интеллектуальной машины С.Н.Корсакова.** Всего в статье С.Н.Корсаков предлагал пять механизмов (эти устройства С.Н.Корсаков назы-

вал «машинами сравнения идей». Мы будем называть их механизмами, так как способ их функционирования предпочтительно рассматривать в целостном, коннекционистском формате работы единой машины – машины Корсакова): три гомеоскопа – устройств исследования подобий в идеях («Гомео» – составная часть слова, обозначающая сходство или похожесть, «скоп» – составная часть слова, означающая прибор или инструмент для рассматривания, изучения, исследования, проверки чего-либо), идеоскоп – прибор анализа сложной идеи и построения сложной идеи из более простых, компаратор – прибор оперативного сравнения идей по признакам.

Сегодня предложены две альтернативные трактовки корсаковского проекта, которые с учётом терминологических особенностей методологии искусственного интеллекта правомочно назвать репрезентативной и коннекционистской интерпретациями.

**Репрезентативная интерпретация** предложена А.С.Михайловым [Корсаков, 2009, Пер. с франц. под ред. А.С.Михайлова]. Репрезентативизм – это парадигма философии искусственного интеллекта, объясняющая феномен мышления и другие когнитивные феномены как процесс формирования, запоминания и обработки лингвистических конструкций. В этой работе детально представлено описание способа функционирования всех пяти машин на языке теории множеств. Показано, что «интеллектуальная машина» реализует функции экспертных систем, обеспечивают эффективный многокритериальный поиск информации, фасетную классификацию, программное управление «базой знаний» и прочие функции современных репрезентативных когнитивно-компьютерных систем.

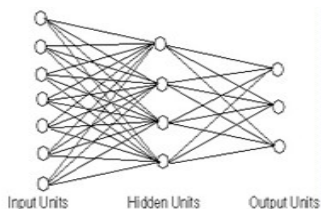
Однако, если подгонять идею машины Корсакова (1830-е гг.) под более поздний теоретико-множественный базис (1850-70-е годы), это означает вычеркнуть из оригинальной идеи то, что может послужить принципиальной основой реконструирования компьютеринга. Теория множеств упрощает идею и преимущества её очевидны – математические конструкции реализуемы на классе субстанциально инвариантных устройств: у Корсакова – механических, сегодня – электронных. Но при упрощении теряется главное – машина Корсакова лишается «машинной энергии», каузальные связи между механизмами машины и выражаемыми с помощью её когнитивными феноменами становятся призрачными, абстрактное математическое описание становится конкретным, конституируя многообразие способов реализации машины на современной микроэлементной базе, хотя, на самом деле, это описание является лишь формальной «тенью» динамики реальной машины. В работе [Алексеев, 2018] предложена иная, коннекционистская интерпретация, на которой мы остановимся, которая идентична первоначальной идее и намечает новые пути развития когнитивно-компьютерной технологии, которые превосходят булевы принципы современных логических вентилях микроэлектроники.

**Коннекционистская интерпретация** машины Корсакова [Алексеев, 2010, 2011, 2012], [Алексеев, 2012, нейрокомпьютеры]. Коннекционизм – это парадигма когнитивно-компьютерных наук, которая объясняет интеллектуальные способности человека посредством искусственных нейронных сетей [Garson, 2010]. Очевидно, что коннекционизм предлагает упрощённую модель биологического мозга «из мяса и крови». Модель состоит из большого числа связанных друг с другом «нейронов» и весовых коэффициентов, которые характеризуют силу связей между ними. Веса моделируют действия синапсов, которые связывают нейроны в сложные структуры – паттерны нейральных взаимодействий. Коннекционизм часто представляют исключительной альтернативой классической (репрезентативной) парадигмы, согласно которой интеллектуальная деятельность моделируется обработкой символического языка посредством цифрового компьютера.

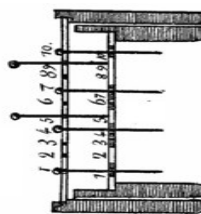
Для раскрытия коннекционистских аспектов машины Корсакова её следует упростить. В оригинале машина состоит из брусков, деревянных рамок, медных проводов, рычагов, подвижных частей из слоновой кости, штырей, пружин и прочего. В нашем варианте она состоит из: *перфокарт*; *подперфокарт* – частей перфокарты, разрезанной поперёк на несколько частей, каждая из которых, например, соответствует признаку объекта; *отверстий в перфокартах*; *игло*к, которыми прокалываются отверстия в перфокарте; *перфораторов*, которые проделывают отверстия в перфокартах – при фиксированной пробивке они действуют по принципу дырокола или компостера, при формировании отверстий произвольной ширины и глубины – круговыми движениями ножа; *табуляторов* – устройств «считывания» перфокарт и формирования результатов изучения идей; *игло*к табуляторов, которые попадают в отверстия перфокарт. Машиной должен управлять *Машинист*, разрабатывать и программировать её – *Инженер*. «Нейрон» – это перфокарта. На перфокарте может быть представлена совокупность «нейронов», тогда нейрон соответствует подперфокарте. Сложная идея «материализуется» посредством ряда перфокарт, наложенных друг на друга. На каждой перфокарте представлены простые идеи, они обозримы при задании признаков частного предмета. Отверстие в перфокарте, которое формирует инженер прокалыванием иглы перфоратора в процессе «экспликации знаний» – это «возможный синапс». Действительным «синапс» становится при прокалывании этого отверстия иглой табулятора в процессе работы машины при анализе и синтезе сложной идеи. Таким образом, актуальные «коннекции» между нейронами образуются в результате применения табулятора к стопке перфокарт: если иглы попадают в отверстия, то образуются «синаптические связи». Перфокарты, накладываемые друг на друга, соответствуют латентным узлам «сети». Начальная и конечная перфокарты – входные и выходные узлы. Результат образования «синаптической связи» во многом зависит от ширины отверстий в перфокарте, величины игл табулятора, взаимного совпадения отверстий при наложении перфокарт, от усилия, которое затрачивается как для пробивки отвер-



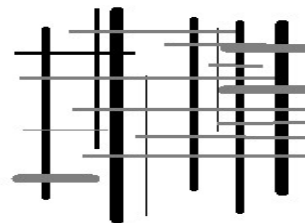
ствий перфоратором, так и для попадания игл табулятора в отверстия. По сути, это – перфокарточный аналог «весового коэффициента» связи между нейронами.



*Иллюстрация простой  
нейронной сети*



*Фрагмент  
планшетного  
гомеоскопа Корсакова  
(поворот на 90°)*



*Абстрактная модель  
планшетного гомеоскопа*

*Рис. Аналоги примитивных коннекционистских моделей*

На рисунке для сравнения приведены примеры: 1) фрагмент современной простейшей нейронной сети, предложенный известным коннекционистом Дж. Гарсоном (2010 г.); 2) фрагмент планшетного гомеоскопа С.Н.Корсакова, на котором чётко просматривается идея перфокарточной «коннекции» посредством игл и отверстий, а так же выдачи результата на «выходном нейроне», который образуют иглы, прошедшие сквозь него; 3) абстрактная модель планшетного гомеоскопа, на котором весовой коэффициент "синаптической связи" характеризуется шириной отверстия в перфокартах (вертикальные линии различной ширины), толщиной и длиной игл табулятора (горизонтальные линии). Раскроем подробнее коннекционистские особенности интеллектуальной машины Корсакова, обратив вначале внимание на строение его перфокарты.

**Перфокарта Корсакова.** С.Н.Корсаков впервые в истории применил перфокарты в той сфере научно-технической деятельности, которая в нашей стране сегодня называется «информатикой». Сделанная из картона, перфокарта выступает в роли материального носителя информации. Имеются/отсутствуют отверстия, пробитые в перфокарте – имеем «информацию» во всех её возможных теоретико-информационных трактовках, например: 1) *алгоритмический подход* (А.Н.Колмогоров) – количество информации, представленное в перфокарте – это значение некоторой функции сложности от относительной плотности отверстий и их количества, а так же длины алгоритма, задаваемого временем работы перфоратора и табулятора; 2) *вероятностный подход* (К.Шеннон) – вероятность снятия неопределённости при сравнении конфигураций из отверстий; 3) *разнообразностный подход* (А.Д.Урсул) – разнообразие конфигураций отверстий одной перфокарты от другой перфокарты и тому подобное. Очевидно, что перфокарта Корсакова – это классическая метафора носителя информации.

В [Алексеев, 2018] предложен тезис: *все современные носители информации – это электронные перфокарты Корсакова*. В самом деле, одно значение устойчивого состояния триггера – наличие отверстия в перфокарте, другое значение – отсутствие отверстия. Далее, соответственно: положительный потенциал/отрицательный потенциал; наличие тока/отсутствие тока; модулирующий сигнал/несущий сигнал при радиопередаче данных; низкое напряжение на плавающем затворе транзистора флэш-памяти/высокое напряжение; выступ на поликарбонатной основе CD-ROM/углубление, выдавленное в этой основе и др. интерпретации. Разумеется, каждая электронная «перфокарта» требует специального устройства: 1) *перфоратора*, например, пишущего привода CD-ROM, модулятора и 2) *табулятора* – устройства чтения «перфокарт», например, лазерного луча, попадающего на фотодиод от поликарбонатной основы CD, демодулятора и так далее.

Выделим следующие формы коннекции между перфокартами-«нейронами»:

1) *градуальная коннекция*, означающая постепенное нарастание или ослабление признака при движении иглы табулятора от одной перфокарты к другим перфокартам в стопке. Определяется «весами», которые задаются различной шириной отверстий перфокарт или, например, толщиной игл, которая увеличивается у основания иглы и уменьшается у острия. Данный способ «активации» перфокарт-«нейронов» воспринимается как метафора непрерывной деятельности мозга. Непрерывные весовые значения – вариант, наиболее интересный для нейрокомпьютерной интерпретации;

2) *градуированная коннекция* – интервальная параметризация градуальной коннекции. Устанавливается аналогично тому, как на термометре фиксируется шкала непрерывных значений температуры. Данный тип связи указывает на количество перфокарт, проткнутых иглой табулятора. В логическом отношении это означает, например, группирование сложных идей по степени общности связываемых признаков;

3) *n-значная коннекция* – характеризует степень связанности конкретного отверстия перфокарты с другими отверстиями в стопке перфокарт. Для подперфокарты данная форма связи учитывает отношение с перфокартой как часть/целое;

4) *бинарная коннекция* означает наличие связи/отсутствие связи в результате попадания иглы в отверстие либо не попадания её туда. Это – вырожденный вариант связи, он применим для анализа лишь единичного признака на перфокарте и не характерен ни для одного корсаковского механизма, так как признаки в них изучаются не порознь, но лишь в составе целостного варианта анализа сложной идеи.

Итак, назначение перфокарты Корсакова – фиксация связей между признаками сложной идеи. Для подчёркивания нейрокомпьютерного, коннекционист-

ского способа её использования отметим принципиально иное предназначение перфокарт в машине Ч. Бэббиджа.

**Перфокарта Бэббиджа.** Перфокарта используется в контексте репрезентативной парадигмы. Впервые идея перфокарт Ч.Бэббиджа была опубликована через 10 лет после статьи С.Н.Корсакова, в 1842 г. Способ использования перфокарт предложила Ада Лавлейс в программе, которую «вики-история» считает самой первой программой в истории человечества. Программа выдавала список чисел Бернулли. Как известно, для вычисления чисел Бернулли – суммы последовательных натуральных чисел, возведённых в одну и ту же степень, требуется применение цикла. Поэтому на перфокарте (управляющего типа) кодировались параметры цикла, далее машина Бэббиджа принимала данные с перфокарт ввода, обрабатывала данные в регистрах в соответствии с кодами обработки, представленными на управляющей перфокарте, и выводила результат на перфокарты вывода. Ввод данных из внешней памяти в оперативную, организация вычислений, где коды операций и коды операндов представлены в оперативной памяти, вывод информации на внешние накопители – это современная классическая принципиальная схема компьютеринга. Программная инструкция – итерация – была задумана для уменьшения количества перфокарт, требуемых для ввода рекуррентных значений формулы Бернулли. Программа А.Лавлейс представлена в примечаниях к книге «Очерк об аналитической машине, изобретенной Чарльзом Бэббиджем» итальянского математика Луиса Менебреа в 1842 г. – спустя 10 лет после публикации статьи С.Н.Корсакова. Так же, как и статья Корсакова, книга была написана на языке науки того времени – на французском. Ада Лавлейс по просьбе Ч. Бэббиджа переводила ее на английский язык и в одном из своих примечаний, собственно, и привела пример первой компьютерной программы, выполнимой на современном техническом базисе. Однако, отметим, данная программа выполнена в формате репрезентативной парадигмы, что принципиально отличает её от корсаковской коннекционистской «программы».

Таким образом, в методологии искусственного интеллекта не сегодня, а в начале 1840-х годов, наметилось противостояние двух парадигм использования носителей информации (перфокарт): 1) коннекционистский (С.Н.Корсаков) – конфигурация связей на перфокарте является непосредственным результатом анализа и синтеза связей между признаками сложных идей, и 2) репрезентативный (Бэббидж-Лавлейс) – на перфокарте кодируются программы вычисления. Второй подход делает более длинный путь к сравнению сложных идей, нежели первый, так как требуется кодирование слов и программа исчислений над кодами этих слов для получения не арифметического (что, по сути, делает машина Бэббиджа), но логико-лингвистического результата. Путь, конечно, неудобный для анализа сложных мыслей, но именно по этому косому пути идёт сегодня современный компьютеринг. Машина Корсакова спрямляет дорогу «нейро-компьютерингом» сложных идей.

**Простой компаратор** [Корсаков, 2009]. Начнем с этого наиболее простого механизма машины Корсакова. Это – две перфокарты, одна фиксирует признаки объекта  $X$ , другая – признаки объекта  $Y$ . В примере С.Н.Корсакова признаками выступали физические показатели людей. Перфокарты разрезаются поперёк на подперфокарты. Количество подперфокарт равно количеству признаков у сравниваемых объектов. Каждая перфокарта помещается в рамку, ширина которой превышает вдвое ширину перфокарты. В рамках установлены поперечные желобки, по которым можно свободно вправо и влево перемещать подперфокарты. Далее перфоратором пробиваются достаточно широкие отверстия в перфокартах  $X$  и  $Y$ , чтобы иглы в них могли свободно перемещаться вверх/вниз. В перфокарту  $X$  втыкаем иглы со шпильками, чтобы не проваливались при сравнении признаков. Осуществляем определение признаков у объекта  $X$ . Если признак имеется, то соответствующую подперфокарту сдвигаем влево. Так же поступаем и с объектом  $Y$ . Далее накладываем две перфокарты (точнее, их рамки) друг на друга. В результате всего одной (!) операции – наложения перфокарт – мгновенно получаем результат. Он характеризуется: 1) четырёхзначной логикой; 2) параллельным исполнением (операция производится сразу над всеми подперфокартами).

**Планишетный гомеоскоп** [Корсаков, 2009]. В этом механизме ещё более чётко проявляется нейрокомпьютерная идея. Устройство состоит, как минимум, из двух перфокарт  $X$  и  $Y$ , располагающихся одна над другой. Выступив в роли инженера, С.Н.Корсаков представил первую коннекционистскую программу как инструкцию по работе с этим механизмом. Как машинист, он часто применял данный механизм в практике гомеопатического лечения. Так, с 12 февраля 1829 г. по май 1834 г. он диагностировал 11725 болезненных случаев.

На одной части перфокарты  $X$  инженер вписывает буквенные обозначения различных частей и органов, то есть фиксируется своеобразная «топография» человеческого тела (голова, нос, глаза, желудок и другие). На другом конце перфокарты  $X$  («патография» человека) цифрами обозначаются различные недуги (опухоли, покраснения на коже, стреляющая и режущая боль, жар, озноб, обморок и т.д.). Например, если буква  $e$  обозначает грудь, цифра 4 – режущую боль, то квадрат  $e4$  соответствует режущей боли в груди. Для фиксации данного симптома в центр квадрата  $e4$  втыкается игла и на карте  $Y$  появляется отверстие. Подобным образом фиксируются остальные симптомы. В таблице, содержащей по сто ячеек по вертикали и горизонтали, с помощью игл можно было представить десятки тысяч различных симптомов, осуществляя тем самым сложную конструктивную диагностику.

Теперь на краях карты  $Y$  помечаются наименования лекарств, которые рекомендуется применять для лечения в соответствии с симптомами таблицы  $X$ . Эти наименования должны совпадать с отверстиями, полученными в результате предыдущего шага. На другом краю перфокарты  $Y$  могут быть отмечены дополнительные сведения, например, предупреждения о последствиях применения

лекарств. Общая эталонная перфокарта  $\langle X, Y \rangle$  сформирована, она «запрограммирована» врачом-инженером.

На прием к врачу-машинисту приходит пациент. Машинист фиксирует топографию/топографию пациента прокалыванием иглами соответствующих ячеек перфокарты  $Z$ . Накладывает  $Z$  на  $\langle X, Y \rangle$ , иглы  $Z$  проваливаются в эталонные перфокарты и мгновенно получается результат – рекомендуемое лекарство. Все это осуществляется быстро, механически и без участия эксперта-инженера.

Имеется ряд дополнительных соображений по поводу гомеоскопа, который ещё более приближает машину Корсакова к коннекционистской парадигме мышления.

1) Эталонных перфокарт может быть сколь угодно много. Например, перфокарты  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ,  $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$  – это различные медицинские теории, которые можно связать общими и отличительными признаками, «накладывая друг на друга». Инженер выражает личные предпочтения, прокалывая иглами соответствующие отверстия перфокарт, и игнорирует положения, с которыми не согласен, не прокалывая иглами. Теперь  $\langle X, Y \rangle$  характеризует компендиум медицинских знаний, индексированный пропозициональными установками врача-инженера по изучению патологии/топографии/лечению. В этих массивах перфокарт мы имеем входные, выходные, латентные узлы нейронов-перфокарт. Перфокарта  $Z$  так же может быть составной и выражать не только объективные признаки болезни пациента, но и субъективные предпочтения врача-машиниста  $Z = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_l\}$ . Связи между составными нейронами-перфокартами  $X, Y, Z$  задаются конфигурацией отверстий на перфокартах и наличием игл, которые попали в эти отверстия. Таким образом, между признаками задаются градуированные связи.

2) Иглы, которые прокалывают отверстия, могут быть различной толщины, остроты, со шляпками (задающие границы проникновения в перфокарты) и без шляпок (насквозь пронизывающие стопки  $X, Y$ ), шляпки могут иметь различные цвета, формы и пр. В нейрокомпьютинге это означает задание весовых коэффициентов порогов срабатывания нейронов. Таким образом, между признаками задаются градуальные коннекции.

3) При представлении «знаний» важно, чтобы и инженер, и машинист обладали некоторым художественным вкусом. Ведь работая перфоратором и выражая личные предпочтения, они, по сути, «рисуют» картину, скажем, топографии. *Машина Корсакова – это версия квазиалгоритма работы художника.* Данный тезис инспирирован аналогией с тем, как А.М.Тьюринг предлагал в 1936 г. алгоритм работы математика на основе концепции машины Тьюринга [Turing, 1936]. Обоснование тезиса требует основательной теоретико-алгоритмической проработки, но идея уже сейчас очевидна.

*Линейный гомеоскоп с неподвижными частями* [Корсаков, 2009]. Разница в способе функционирования между планшетным гомеоскопом и линейным гомеоскопом такая же, как сегодня между планшетным и линейным сканерами.

В планшетном варианте для получения результата мы накладываем табулятор (перфокарту с иглами) на эталонную перфокарту и получаем результат по тому, как иглы проваливаются в отверстия, образуя «коннекции». В линейном варианте табулятор двигается по эталонной перфокарте

Неподвижные части линейного гомеоскопа, из-за которых данная машина получила свое наименование – это иглы табулятора, которые выступают из него, чётко фиксируя признаки искомой идеи. Машинист вдавливают иглы в табулятор при наличии признака, например, симптома заболевания. Далее двигает табулятор по перфокарте. Иглы проваливаются в отверстия. Если поисковые и эталонные признаки не совпадают, т.е. не все иглы провалились в отверстия, то действие машины продолжается. В зависимости от плотности фиксации признаков на отдельных участках табулятора, при попадании в столь же плотно скученные отверстия перфокарты, табулятор будет изменять своё положение по вертикали и горизонтали. Тогда задача машиниста состоит в том, чтобы выровнять табулятор и продолжать движение. Для этого у машиниста должно быть достаточно сил. Табулятор останавливается, когда все иглы табулятора провалятся в отверстия перфокарты, например, в результате совпадения всех симптомов заболевания. Остановка может произойти раньше, когда провалившиеся иглы (но не все) уже не позволяют двигаться табулятору по причине нехватки «сил» у машиниста. Т.е. машина остановится вследствие образования кластера совпавших признаков. Проблема остановки машины Корсакова аналогична известной теоретико-алгоритмической проблеме остановки машины Тьюринга, которая была сформулирована столетием позже, в 1936 г. [Turing, 1936]. Последняя проблема имеет исключительно формально-математический характер. У С.Н.Корсакова не так. Остановится машина или нет, зависит от прилагаемых внешних усилий, от степени сложности знаний, факторов работы машины, динамики внешних и внутренних условий функционирования. **Машина Корсакова – прототип динамической компьютерной системы.** Компьютинг динамических систем – важное исследовательское направление современного искусственного интеллекта. Разве можно утверждать, что машина Корсакова – это историческое наследие? Машина очень востребована для развития принципов компьютерной технологии.

*Линейный гомеоскоп с подвижными частями* ([Корсаков, 2009] стр. 18-21). «Подвижные части» – это иглы-рычаги табулятора. Конструкция табулятора такова: на раме фиксируется ось, вокруг которой могут свободно вращаться иглы табулятора, закреплённые на этой оси. Один конец иглы-рычага закруглен – он будет опускаться в отверстия эталонной перфокарты. К другому концу иглы прикрепляется метка с указанием номера признака. Как и в предыдущем случае, табулятор продвигается вдоль эталонной перфокарты. На этапе настройки механизма машинист отводит иглы, соответствующие признакам, таким образом, чтобы по мере движения машины закруглённые концы игл попадали в отверстия и фиксировали его положение при остановке. Табулятор продвигается

по перфокарте, отмеченные признаки попадают в отверстия, машинист прикладывает усилия для движения табулятора. В принципе, то же самое, что и в предыдущем варианте. Однако в этом механизме имеется главное усовершенствование: к иглам-рычагам, которые опрокидываются по мере движения машины, попадая в отверстия и сигнализируя о совпадении признака на табуляторе и эталонной перфокарте, прикрепляются бирки с наименованием признаков. Причем в зависимости от степени важности признака, бирка может располагаться от основания до вершины иглы. «Схожим образом – используя разные цвета, можно указать и относительную важность элементов идеи, с которой производится сравнение, что в свою очередь, неизбежно придаст больше точности процессу сравнения в целом» ([Корсаков, 2009] стр.21). Поэтому при движении табулятора, по мере попадания игл в отверстия, машинист обзревает *раскрашенную динамику развития сложной идеи* в соответствии с признаками, установленными машинистом на табуляторе и экспертными знаниями, зафиксированными инженером на эталонной перфокарте. В этом устройстве мы видим выход на логико-лингвистическую интерпретацию коннекционистской схемы – ведь иглы табулятора проваливаются в отверстия в соответствии с коннекционистской парадигмой, в результате образования «синапсов» между эталонными перфокартами-нейронами, а на выходе имеем логико-лингвистические признаки. В следующем механизме современная проблема совмещения репрезентативной и коннекционистской парадигм получила наибольшее воплощение.

**Идеоскоп** ([Корсаков, 2009] стр.23-25). Данный механизм демонстрирует прототип *гибридной, нейро-лингво-компьютерной машины*. Идеи «гибридизации» прослеживались во всех механизмах, так как сравниваемые признаки имели вербальное выражение. Однако для них лингвистические характеристики не были принципиальными. Идеоскоп изначально ориентирован на выработку системы языковых высказываний.

Табулятор представляет собой брусок с иглами-рычагами, каждый из которых обозначает некоторый признак, обозначенный языковым выражением. Машинист, настраивая табулятор, формирует сложное высказывание в виде вербальных признаков сложной идеи. Табулятор движется по эталонной перфокарте, его иглы проваливаются в отверстия и пр. – все почти как в предыдущем устройстве. Имеется отличие – идеоскоп обеспечивает *целостный охват* идеи: в ходе текущей операции одновременно (параллельно) выделяются признаки поисковой идеи, которые присутствуют или отсутствуют в эталонной идее; признаки, отсутствующие в поисковой идее, но присутствующие в эталонной; признаки, отсутствующие в сравниваемых идеях, но являющиеся частью других сложных идей, представленных в эталонном наборе перфокарт (рычаги имеют различные углы наклона); признаки, распределённые по степени важности, которые присутствуют либо отсутствуют, полностью либо частично в поисковой и эталонной идеях – рычаги раскрашены, бирки имеют различное расположение по степени важности. На каждом шаге работы идеоскоп позволяет нам обзре-

вать целостную картину распределения признаков именно у *идеи*, а не у понятия как набора существенных признаков предмета исследования. Одновременно демонстрируются не только существенные, но также несущественные и даже несовместимые признаки в градуальном, градуированном и n-арном формате. В целом идеоскоп эксплицирует динамику идеи, её *логико-лингвистическую мультипликацию*. Коннекционистская парадигма играет роль обоснования/опровержения логико-лингвистических моделей репрезентативной парадигмы, так как на табуляторе отмечаются высказывания, требующие обоснования «знаниями» эталонной перфокарты. Совершенно гениальная конструкция!

**Заключение.** В 2012 году исполнилось 225 лет со дня рождения С.Н.Корсакова и 180 лет со дня написания статьи, которая может сыграть важную роль в развитии когнитивно-компьютерной технологии. Изобретения С.Н.Корсакова были слишком революционны, и современники не смогли их по достоинству оценить как в силу субъективных причин – академической невосприимчивости к новаторству изобретений, так и объективных причин – для практической пригодности устройства требуется мощь современной электронной техники. В наших силах должным образом применить наследие нашего выдающегося соотечественника, более полутора века пребывавшее в забвении.

Имеется множество шуток по поводу «вселенской» роли нашей страны: Россия – родина слонов, в пермской деревне родился Заратустра, доегипетская цивилизация возникла на Южном Урале. Однако факт остается фактом: *первая коннекционистская машина была создана в России*. В этом протонейрокомпьютере не применяются термины: «нейрон», «синапс», «аксон», «дендрит». В науке «нейронные» термины появятся позже, в конце XIX века, после изучения под микроскопом нервных клеток, и закрепятся с 1906 года после получения нобелевской премии итальянцем К.Гольджи и испанцем С.Рамоном-и-Кахалем. Однако в машине Корсакова имеется много схожего с современной парадигмой коннекционизма и теорией нейрокомпьютинга.

*Машина Корсакова – это чистая коннекционистская парадигма искусственного интеллекта.* «Чистая» в силу того, что к концепции сложной взаимосвязи признаков не примешиваются нейрофизиологические, биологические и социальные метафоры. Машина Корсакова – это не только факт истории. Это – концептуальный проект, очень востребованный в перспективной технологии. Однако доведение машины Корсакова до современных проблем искусственного интеллекта требует больших исследовательских усилий. Необходимы работы по усилению машины Корсакова, позволяющие ближе «подъехать» к решению фундаментальных проблем искусственного интеллекта: динамических систем, естественных видов, социо-гуманитарных понятий, фреймов, индукции, моделирования «смыслов». Требуется как практическая модификация наносистемо-



техники элементарных логических вентилей, так и теоретическая разработка коннекционистского компьютеринга.

## **2. Квантовые и классические вычисления в категории конструктивной вселенной**

(раздел написан Петуховым С.В. и Толоконниковым Г.К.)

Квантовым компьютерам, квантовым вычислениям и квантовым эффектам в биологии, в частности, в информационных процессах в сетчатке глаза на Совещании были посвящены большие доклады В.Г.Лабунца В.Г. (<https://youtu.be/1A6s1nLY30Q>) и Островского М.А. (<https://youtu.be/pKngDIzjvY0>). В задачи обзора входит как исторические вопросы искусственного интеллекта, включая вопросы приоритетов, так и современное состояние дел. Здесь мы остановимся на недостаточно известном факте открытия [Манин, 1980] ключевых идей квантовых вычислений и квантового компьютера одним из крупнейших математиков современности Юрием Ивановичем Маниным, сопредседателем Семинара «Алгебраическая биология и теория систем», и на разработанном им категорном подходе к теории классического и квантового вычислений. В основном мы будем опираться на доклад, сделанный Ю.И.Маниным на семинаре Н.Бурбаки [Manin, 2000] и некоторые его недавние работы в данном направлении. Во второй части обзора из указанных недавних работ рассмотрена статья [Manin, 2020] (и близкие результаты), в которой разработан новый математический формализм для моделирования нейронных информационных сетей наделенных дополнительными структурами в виде вычислительных метаболических информационных ресурсов, опирающийся на понятия суммирующих функторов (*summing functors*) и гамма-пространств Сигала в теории гомотопий.

Традиционный подход в теории вычислений опирается на микроскопический анализ интуитивного представления о вычислении и реализован в машине Тьюринга в виде операций и конструкций состоящих из одного-двух бит, которую можно уподобить генетическому коду для организма. Системный подход требует рассмотрения явления (организма и тому подобное) в целом, с переходом от целого к частям, чему адекватен язык теории категорий. Категорный подход предлагается Ю.И.Маниным для теории вычислений.

**Определение категории конструктивной вселенной.** Пусть  $L$  категория с объектами  $Ob(L)$  в виде вычислимых и конечных множеств  $U$ . Стрелками  $U \rightarrow V, U, V \in Ob(L)$  категории  $L$  являются частичные отображения, то есть пары  $(D(f), f)$ , где  $D(f) \in U$  и  $f: D(f) \rightarrow V$  отображение множеств.

Композиция стрелок определяется равенством

$$(D(g), g) \circ (D(f), f) = (g^{-1} D(f), g \circ f) .$$

В качестве стрелок категории рассматриваются не все, а только **полувычислимые функции**, определяемые через наличие такого алгоритма  $\varphi$

для этой функции, который для каждого  $u \in U$  реализует одну из возможностей:

(i) если  $u \in D(f) \subseteq U$ , то за конечное число шагов  $\varphi$  выдаёт результат  $f(u) \in V$ ;

(ii) если  $u \notin D(f) \subseteq U$ , то за конечное число шагов  $\varphi$  выдаёт результат в виде знака НЕТ;

(iii) если  $u \notin D(f) \subseteq U$ , то  $\varphi$  работает без остановки бесконечно долго, не выдавая никакого результата.

Множества  $D(f) \subset U$  называются *перечислимыми*, а в случае перечислимости также и множества  $U \setminus D(f)$ , множество  $D(f)$  называется *разрешимым*.

Сужение частичных функций на полувывчислимые не нарушает определения композиции, так как можно показать, что образ полувывчислимой функции перечислим.

Понятия вычислимости, полувывчислимости, перечислимости и разрешимости имеют обычный смысл (см. например, [Манин, 1980]).

Теперь можно определить конструктивную вселенную.

Определение

Пусть дана определённая выше категория  $L$ . Тогда она называется категорией *конструктивной вселенной*, если среди ее объектов имеются конструктивные миры - натуральный ряд  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$  и конечные множества  $\emptyset, \{1\}, \dots, \{1, \dots, n\}, \dots$  всех конечных мощностей. При этом справедливы следующие условия

(a) множество стрелок  $L(N, N)$  является множеством всех частично-рекурсивных функций;

(b) любой бесконечный объект категории  $L$  изоморфен  $N$ ;

(c) если  $U$  бесконечно, то  $L(U, V)$  состоит из всех частичных отображений  $U \rightarrow V$ , если  $V$  - конечно, то  $L(U, V)$  состоит из таких отображений, что прообраз каждого элемента из  $V$  перечислим;

(d) для любых двух конструктивных миров  $U$  и  $V$  существуют универсальные методы программирования.

Дадим необходимые комментарии к определению.

Требование (b) является частью известного тезиса Чёрча.

Всякий изоморфизм (вычислимая биекция)  $N \rightarrow U$  в категории  $L$  называется *нумерацией*. Две разные нумерации одного и того же конструктивного мира отличаются на рекурсивную перестановку  $N$ . Две нумерации *эквивалентны*, если они отличаются на рекурсивную перестановку.

Два конечных конструктивных мира изоморфны, как это вытекает из (c), если и только если они имеют одну и ту же мощность, и группа автоморфизмов любого конечного  $U$  состоит из всех перестановок  $U$ .

Мы, что важно подчеркнуть, рассматриваем категорию  $L$ , как открытую, в том смысле, что имеем возможность ее расширить добавляя новые конструктивные миры. Если некоторый бесконечный конструктивный мир  $U$  добавляется к  $L$ , то он входит с некоторым классом эквивалентных нумераций. Любое конечное объединение конструктивных миров может быть естественным образом превращено в конструктивный мир так, что погружения становятся вычислимыми морфизмами, а их образы - разрешимыми морфизмами.

Другой пример даёт мир  $N^*$  конечных последовательностей чисел из  $N$  («слова в алфавите  $N$ »), снабжённый гёделевской нумерацией

$$(n_1, \dots, n_k) \rightarrow 2^q 3^{n_1-1} \dots p_{k+1}^{n_k-1} - 1 ,$$

где  $p_k$  -  $k$ -е по счету простое число,  $q = \max \{ i \mid n_1 = \dots = n_{k-i+1} = 1 \}$  .

Категория  $L$  замкнута по отношению к конструкции  $U \rightarrow U^*$  . Все естественные функции, такие как длина слова  $U^* \rightarrow N$  или  $i$ -я буква слова  $U^* \rightarrow U$  вычислимы.

Аналогично  $L$  может быть сделана замкнутой по отношению к конечным прямым произведениям с помощью использования (обратной ) нумерации для  $N^2$

$$(m, n) \rightarrow m + \frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2) .$$

Проверяется, что проекции, диагональные отображения, отображения  $V \rightarrow U \times V, v \rightarrow (u_0, v)$  являются вычислимыми.

Разрешимые подмножества конструктивных миров также разрешимы.

Тезис Чёрча часто используется в качестве замены явной конструкции нумерации, он означает, что категория  $C$  определена однозначно с точностью до эквивалентности.

Перейдем к свойствам вычислимости для множеств морфизмов  $L(U, V)$ .

Важно отметить, что  $L(U, V)$  не является конструктивным миром для бесконечных  $U$ .

Для описания свойств вычислимости аксиоматически рассматриваем в  $L$  сначала произвольную диаграмму

$$ev: P \times U \rightarrow V .$$

Она определяет частичное отображение  $P \rightarrow L(U, V), p \rightarrow \bar{p}$  , где  $\bar{p} = ev(p, u)$  .

### Определение

Мы будем называть конструктивный мир  $P(U, V)$  вместе с оценивающим отображением (evaluation map) **методом программирования** (для вычисления некоторых отображений  $U^* \rightarrow U$  . Метод программирования называется **универсальным**, если выполнены два условия.

Во-первых, отображение  $P \rightarrow L(U, V)$  является сюръективным.

Во-вторых, для любого метода программирования  $Q=Q(U,V)$  с теми же самыми источником  $U$  и целью  $V$  множество морфизмов  $L(U,V)$  содержит морфизмы трансляции

$$trans: Q(U,V) \rightarrow P(U,V) ,$$

являющиеся всюду определенными вычислимыми отображениями  $Q \rightarrow P$  , такими что если  $q \rightarrow p$  , то  $\bar{q} = \bar{p}$  .

Стандартными промерами  $P$  для  $U=V=N$  являются формализованные описания машин Тьюринга или рекурсивных функций.

Из (d) следует, что композиция морфизмов может быть поднята до вычисляемых функций на уровне методов программирования. Точнее говоря, если  $Q$  (соответственно,  $P$ ) является методом программирования для  $U, V$  (соответственно,  $V, W$ ) и  $R$  - универсальный метод программирования для  $U, W$ , то существуют вычисляемые отображения композиции

$$comp: P(V,W) \times Q(U,V) \rightarrow R(U,V), (p,q) \rightarrow r ,$$

такие, что  $\bar{r} = \bar{p} \circ \bar{q}$  .

Конкретный вид  $P(U,V)$  уточняется выбором того, что называется в компьютерных науках «моделью вычислений». Это понятие включает в себя подробное описание не только программ, но также и всех шагов вычислительного процесса. На этом этапе впервые появляются модели кинематики и динамики процесса, можно начинать рассмотрение квантования.

Будем называть *историей вычисления* или *протоколом* (длины  $n$ ) формализованное описание первых  $n$  шагов. Для фиксированной модели протоколы (любых длин) также образуют конструктивный мир. В [Manin, 2000] рассмотрены два формализованных описания, для функций с бесконечными и конечными областями. Первое описание (нормальные модели) подходит для задач вычислимости за полиномиальное время, второе (булевские схемы) является основой для квантового вычисления.

**Нормальные модели вычислений.** Пусть  $U$  бесконечный конструктивный мир, рассматриваем частичные функции  $U \rightarrow U$  , общий случай сводится к этому переходом к дизъюнктивному объединению  $U$  и  $V$ .

**Нормальная модель вычислений** - это структура  $(P, U, I, F, s)$ , состоящая из четырех множеств и отображения

$$I \subset U, F \subset P \times U, s: P \times U \rightarrow P \times U ,$$

где  $s$  - всюду определенная функция, удовлетворяющая равенству  $s(p,u) = (p, s_p(u))$  для любой пары  $(p,u) \in P \times U$  . Содержательно,  $p$  - это программа подсчета времени,  $s_p(u)$  - новая конфигурация полученная из  $u$  за один временной такт. Два подмножества  $I \subset U$  (начальные конфигурации или входы) и  $F \subset P \times U$  (заключительные конфигурации) должны быть заданы так, что, если  $(p,u) \in F$  , то  $s(p,u) = (p,u)$ , то есть  $u$  является неподвижной точкой  $s_p$  .

Далее через  $f_p$  мы обозначим такую частичную функцию  $f_p: I \rightarrow U$ , что  $u \in D(f_p)$  и  $f_p(u) = v \Leftrightarrow$  для некоторых  $n \geq 0, (p, s_p^n(u)) \in F$  и  $s_p^n(u) = v$ .

Минимальное из таких  $n$  будет называться временем (числом временных тактов), необходимым для вычисления  $f_p(u)$  с использованием программы  $p$ .

Любая конечная последовательность  $(p, u, s_p^n(u), \dots, s_p^m(u)), u \in I$  называется **протоколом вычисления** длины  $m$ .

Вводим явно условия конструктивности.  $P, U$  должны быть конструктивными мирами,  $s$  - вычислимым.  $I, F$  - разрешимые подмножества в  $U$  и  $P \times U$ , соответственно. При этих ограничениях  $f_p$  - вычислимы и протоколы данной длины (произвольной длины или, соответственно, останавливающиеся в  $F$ ) образуют конструктивные миры.

Обозначая через  $Q$  мир протоколов, останавливающихся в  $F$ , а через  $ev: Q \times U \rightarrow U$  - отображение  $(p, u) \rightarrow s_p^{max}(u)$  мы получаем метод программирования. Если метод программирования оказывается универсальным, то такая модель называется универсальной.

Понятие нормальной модели обобщает как нормальные алгоритмы Маркова, так и машины Тьюринга. Действительно, в широком смысле  $p \in P$  - это список подстановок алгоритма Маркова или таблица, определяющая работу машины Тьюринга, миры  $U, I, P$  состоят из разных слов в рабочем алфавите.

#### Теорема

Для любого конструктивного мира  $U$  существуют и могут быть эффективно построены универсальные методы вычислений.

**Булевские схемы.** Схемы из логических элементов являются классическими моделями вычислений, хорошо подходящими для изучения отображений между конечными множествами, элементы которых закодированы последовательностями из нулей и единиц.

Пусть задана булева алгебра  $B$ , порожденная над полем  $F_2$  счётной последовательностью независимых переменных  $x_1, x_2, x_3, \dots$  как алгебра  $F_2[x_1, x_2, x_3, \dots]$  с соотношениями  $x_i^2 = x_i$ . Каждый булевский многочлен определяет функцию  $\bigoplus_{i=1}^{\infty} F_2 \rightarrow F_2, F_2 = \{0, 1\}$ .

#### Теорема

Любое отображение  $F_2^m \rightarrow F_2^n$  может быть представлено единственным вектором булевых многочленов.

Теперь мы можем вычислить любой вектор булевых многочленов, повторяя операции из небольшого конечного списка, например,

$\mathcal{R} = \{x, 1, x + y, xy, (x, x)\}$ , элементы которого называются **классическими гейтами**. Последовательность таких операторов вместе с указанием их

аргументов из ранее вычисленных битов называется *булевой схемой*, число шагов в схеме рассматривается как время (мера времени) вычисления.

Протокол вычисления в этой модели можно представить как конечную таблицу, состоящую из строк (в общем случае различной длины) нулей и единиц. Начальная строка - это входные данные. Каждая следующая строка таблицы должна получаться из предыдущей путем применения одной из базовых функций в  $\mathcal{R}$  к последовательности соседних битов (оставшиеся биты копируются без изменения). Последняя строка - выходные данные. Физически эти строки можно реализовать как различные регистры памяти.

Имеется соответствие двух моделей вычисления. Любой протокол тьюрингова вычисления функции можно рассматривать как протокол вычисления подходящей булевой схемы. Вычисляемая функция  $f$  с бесконечной областью определения есть предел последовательности функций  $f_i$  на конечных множествах, графики которых расширяют друг друга. Тьюрингова программа для  $f$  порождает вычисляемую последовательность булевых схем, которые, в свою очередь, вычисляют все  $f_i$ .

Проблема P/NP и ее категорное рассмотрение в рамках конструктивной вселенной  $L$  детально разбирается в [Manin, 2000]. Во второй части обзора мы вернёмся к подходу Ю.И.Манна при обсуждении этой проблемы, являющейся, как известно, «проблемой тысячелетия»: проблема равенства классов  $P$  и  $NP$  является одной из семи задач тысячелетия, за решение которой Математический институт Клэя назначил премию в миллион долларов США.

**Квантовый параллелизм.** Пусть  $N$  - большое натуральное число,  $F: \{0, \dots, N-1\} \rightarrow \{0, \dots, N-1\}$  - функция, для которой вычисление частных значений  $F(x)$  просто, точнее, может быть сделано за время, ограниченное полиномом от  $\ln(x)$ . Мы хотим вычислить (распознать) некоторое свойство графика  $(x, F(x))$ , например,

- (i) найти наименьший период  $r$  функции  $F$ , то есть такой наименьший вычет  $r \bmod N$ , что  $F(x+r \bmod N)=F(x)$  для всех  $x$  (ключевой шаг в проблеме разложения  $N$  на множители);
- (ii) найти такое  $x$ , что  $F(x)=1$ , или установить, что такого  $x$  нет (проблема поиска).

Обычная стратегия решения подобных задач требует экспоненциального времени, одновременное (параллельное) классическое вычисления требует непропорционально много оборудования. Здесь срабатывает замечательная идея Д.Дойча [Deutsch, 1985] использовать квантовую суперпозицию классических состояний вместо объединения классических регистров.

**Квантовые параллельные вычисления, версия 1.** Пусть  $N=2^n$ ,  $F$  - биективное отображение (множество всех выходов является перестановкой множества всех входов). **Квантовое пространство** входов и выходов - это  $2^n$ -мерное комплексное гильбертово пространство  $H_n$  с ортогональным

базисом  $|x\rangle, 0 \leq x \leq N-1$ , векторы  $|x\rangle$  называются классическими состояниями. **Квантовая версия  $F$**  - такой единственный унитарный оператор,  $U_F: H_n \rightarrow H_n$ , что  $U_F|x\rangle = |F(x)\rangle$ . **Квантовое параллельное вычисление  $F$**  - это система (физическая реализация) с пространством состояний  $H_n$  и оператором эволюции  $U_F$ .

Если мы имеем начальное состояние, например, с равными коэффициентами, то

$$U_F((1/N) \sum |x\rangle) = (1/N) \sum |F(x)\rangle \quad (*)$$

и мы получаем одновременно все классические значения  $F(x)$ .

Каждое число  $x$  записывается в двоичном виде как  $x = \sum_i \epsilon_i 2^i$ , оно отождествляется с классическим состоянием  $|\epsilon_{n-1}, \dots, \epsilon_0\rangle, \epsilon_i = 0, 1$  интерпретируется как состояние  $i$ -го регистра. Квантовая система  $H_1$  называется **кубитом**, мы имеем  $H_n = H_1^{\otimes n}$ ,  $|\epsilon_{n-1}, \dots, \epsilon_0\rangle = |\epsilon_{n-1}\rangle \otimes \dots \otimes |\epsilon_0\rangle$ , как положено в квантовой механике, гильбертово пространство системы отождествляется с тензорным произведением гильбертовых пространств подсистем.

$U_F$  представляется как произведение некоторых стандартных унитарных операторов  $U_m, \dots, U_1$ , каждый из которых действует на небольшое подмножество (на пару или тройку) классических бит. Эти операторы называются **квантовыми гейтами**.

Рассмотрим ввод и вывод для квантовых вычислений. Ввод можно осуществить так же как и вычисление. Задаем входное состояние, например,  $|0\rangle$  и применяем к нему последовательность основных унитарных операторов. Вывод требует квантовых измерений, для чего фиксируется некоторый базис  $|\chi_i\rangle$ , квадрат модуля коэффициента при базисном векторе будет вероятностью появления состояния  $|\chi_i\rangle$ . Выполняя квантовый параллелизм в виде (\*) и проводя указанные измерения мы получаем отдельное  $F(x)$  с некоторой вероятностью. Этого недостаточно для указанных задач. Поэтому переходим ко второй версии параллельных вычислений.

**Квантовые параллельные вычисления, версия 2.** Здесь мы действуем в четыре шага, на которых должны построить следующее:

(i) вспомогательный унитарный оператор  $U$ , несущий нужную информацию о графике  $F$ ;

(ii) достаточно простую вычислительную реализацию  $U$  с помощью стандартных квантовых гейтов;

(iii) достаточно простую вычислительную реализацию подпрограммы ввода информации;

(iv) достаточно простой с вычислительной точки зрения классический алгоритм для обработки результатов нескольких прогонов квантового вычисления.

**Инициализация.** Заставляя следующий квантовый гейт  $U_1$

$$U_1: H_1 \rightarrow H_1,$$

$$|0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), |1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle),$$

$$U_1^{(i)} = id \otimes \dots \otimes U_1 \otimes \dots \otimes id$$

действовать на каждом бите памяти, можно за  $n$  шагов привести один регистр в начальное состояние, являющееся суперпозицией всех  $2^n$  классических состояний с равными весами. Именно,

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\epsilon_i=0,1} |\epsilon_{n-1} \dots \epsilon_0\rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \right)^{\otimes n} = U_1^{(n-1)} \dots U_1^{(0)} |0 \dots 0\rangle .$$

Для завершения общей схемы квантовых вычислений необходимы рассмотренное в [Manin, 2000] помимо процедуры инициализации также быстрое преобразование Фурье и квантовое вычисление классических функций.

Проиллюстрируем общую схему на примере знаменитого алгоритма Шора.

**Алгоритм факторизации Шора.** Пусть  $M$  число которое необходимо разложить на множители. Возмём нечетные  $M$  и не являющиеся степенью простого числа. Выберем  $N$  такое, что  $M^2 < N = 2^n < 2M^2$  и случайный параметр  $1 < t < M$  с наибольшим общим делителем  $gcd(t, M) = 1$ . Известно, что последнее условие проверяется за полиномиальное время.

Обозначим через  $r$  наименьший период функции  $F: a \rightarrow t^a \bmod M$ , именно,

$$r = \min \{ \rho | t^\rho \equiv 1 \bmod M \} .$$

Опишем один проход алгоритма Шора, вычисляющий  $r$ ; в общем случае таких проходов для сбора статистики требуется полиномиальное число.

Используется рабочий регистр, который содержит пару, состоящую из переменной  $0 \leq a \leq N-1$  и соответствующего значения функции  $t^a \bmod M$ .

Указанные выше шаги (i)-(iv) имеют в данном случае вид:

(i) частичная инициализация создает из вектора  $|0, 0\rangle$  суперпозицию

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a=0}^{N-1} |a, 0\rangle ;$$

(ii) обратимое вычисление  $F$  преобразует это состояние в

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a=0}^{N-1} |a, t^a \bmod M\rangle ;$$

(iii) частичное преобразование Фурье даёт



$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a=0}^{N-1} \sum_{c=0}^{N-1} \exp(2\pi i ac/N) |c, t^a \bmod M\rangle ;$$

(iv) наблюдение этого состояния по отношению к системе классических состояний  $|c, t \bmod M\rangle$  даёт конкретный выход

$$|c, t^k \bmod M\rangle$$

с вероятностью

$$\left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{a: t^a \equiv t^k \bmod M} \exp(2\pi i ac/N) \right|^2 .$$

Оставшаяся часть прогона проводится классическим компьютером выполняя следующие шаги.

(a) Находится наилучшее приближение (снизу) к  $c/N$  со знаменателем  $r' < M < \sqrt{N}$  :

$$\left| \frac{c}{N} - \frac{d'}{r'} \right| < \frac{1}{2N} .$$

Как показывает обоснование, проведенное в [Manin, 2000], можно надеяться что  $r'$  совпадает с  $r$  по крайней мере в одном из не более, чем полиномиального числа прогонов.

(б) Пробуем  $r'$  в роли  $r$ , если  $r' \equiv 0 \bmod 2$ , то следует вычислить  $\gcd(t^{r'/2} \pm 1, M)$ . Если  $r'$  нечетно или, если  $r'$  четно, но мы не получили собственного делителя  $M$ , то следует повторить прогон  $O(\log \log M)$  раз с тем же самым  $t$ . В случае отказа изменяем  $t$  и осуществляем новый прогон.

Теорию вычислимости Р.Пенроуз в своих известных книгах связал со свойствами мозга и сознания. Эти же вопросы находятся и находились в кругу интересов Ю.И.Манина и его работ, на некоторых мы остановимся, показывая направление, в которое входят разобранные выше идеи конструктивной вселенной. В работе [Manin, 2017] используется метафора «мозг-интернет», в интернете маршрутизаторы непрерывно изменяют таблицы маршрутизации, отражая текущие изменения в самой сети. Аналогично, как это предполагается и обосновывается в статье 1987 года [Манин, 1987] в мозге также имеется карта «самого себя» (саморефлексия), в том числе, в мозге имеются информационные каналы способные не только нести информацию о самом себе, но и моделировать состояния психики, отличные от текущего состояния мозга.

В работе [Manin, 2016] обосновывается, что когнитивные процессы в человеческом мозге необходимо рассматривать на один уровень выше индивидуального мозга, переходя на цивилизационный уровень. Узлы, аналоги серверов в сети интернет, это отдельные мозги, а цивилизационный уровень в метафоре «мозг-интернет» - это вся сеть. В работах [Manin, 2014], [Manin, 2016] обосновывается, что мозг, используя нейронные коды, существенно сжимает информацию, по аналогии с физическими законами, являющимися как бы максимально сжатыми по Колмогоровской теории сложности представлениями

программ. В [Manin, 2017] дается необычная, но вытекающая из развиваемого Ю.И.Маннином направления интерпретация художественных произведений. Сообщение на естественном языке обычно рассматривается как несущее информацию. Но его также можно рассматривать как программу, которая запускается в мозгу получателя для того, чтобы создать в нем определенное состояние ума. По этой интерпретации художественное произведение имеет целью не передачу информации, а передачу эмоционального состояния читателю, поэзия как известно «сжимает» язык, расшифровать стихотворение удастся лишь на большом прозаическом тексте, так что «великое стихотворение представляет собой максимально сжатое по Колмогорову представление целевого состояния разума» [Manin, 2017]. Вопросы построения теории сознания также находятся в сфере интересов Ю.И.Манина, как это видно уже в [Манин, 1987] и, в особенности, в [Manin, 2020], где речь, в частности, идет о математическом моделировании сознания в терминах теории гомотопий, категорий и высших категорий известного подхода интегрированной информации по Тонони [Tononi, 2008]. В дальнейшем материале обзора эти вопросы отражены достаточно подробно.

При создании искусственного интеллекта человек старается воспроизвести и даже превзойти способности естественного интеллекта. В этой связи в мире интенсифицируются исследования когнитивных наследуемых способностей мозга, щедро финансируемые в ведущих странах. Они включают углубленный анализ, в частности, биологических феноменов гештальт психологии, константности восприятия и голографических аспектов мышления, давно интересующих науку и представленных во множестве монографий. Одним из примеров является известная книга К.Прибрама «Языки мозга» [Прибрам, 1975], излагающая концепции, близкие к учению о саморегулирующихся функциональных системах П.К.Анохина. Вероятно, образцы искусственного интеллекта будущего будут наделены аналогичными особенностями, например, характерной для психики врожденной способностью искать и находить в разрозненном целом (так, музыкальная мелодия распознается нами, даже когда она играет на разных инструментах и в разных частотных диапазонах). Все живые организмы от рождения наделены наследуемыми способностями совершать действия интеллектуального характера. Например, паук плетет паутину с креплением ее концов к случайным опорам, птицы-ткачи ажурно сплетают гнезда сложной формы из сотен соломинок, пчелы строят соты. Примитивными интеллектуальными способностями обладают также организмы, лишенные нервных клеток. Так, впечатляющий пример опубликован в журнале Nature о способностях плесневых грибов творческим образом находить оптимальные пути в лабиринтах [Nakagaki, 2000]. При создании систем искусственного интеллекта следует подсматривать у живой природы алгоритмы и принципы генетического наследования таких

способностей. Достижения молекулярной биологии привели к новому пониманию самой жизни: «Жизнь есть партнерство между генами и математикой» [Stewart, 1999]. Поиск математики, которая является партнером для генетики, привел к интенсивному развитию алгебраической биологии и матричной генетики, обсуждаемых на международном семинаре “Алгебраическая биология и теория систем” (<https://www.youtube.com/channel/UC8JLsuRzzPsRiHwrwEjMCtw>). При всем многообразии форм жизни основы генетического наследования - на базе молекул ДНК и РНК и их алгебраически структурированных алфавитов - одинаковы у всех организмов. Это позволяет надеяться на нахождение в генетических структурах универсальных алгебро-биологических правил и законов, используемых в биоинформационных патентах живой природы и полезных для развития новых подходов к проблемам искусственного интеллекта, медицины и биотехнологий. Зачатки алгебраической биологии можно видеть уже в работах Г.Менделя, открывшего в опытах по скрещиванию организмов то, что наследование их признаков происходит по алгебраическим правилам бинарной оппозиции доминантных и рецессивных факторов наследования (несмотря на колоссальную сложность молекулярного состава тел). Согласно закону Менделя независимого наследования признаков, информация с уровня молекул ДНК диктует макроструктуры живых тел по многим независимым каналам, несмотря на сильные помехи. Например, цвета волос, глаз и кожи наследуются независимо друг от друга. Этот детерминизм обеспечивается неизвестными алгоритмами многоканального помехоустойчивого кодирования. Соответственно, каждый организм является машиной многоканального помехоустойчивого кодирования наследственной информации. Познание соответствующих биоинформационных принципов является одной из задач алгебраической биологии, опирающейся в своих исследованиях на аналогии с развитыми методами алгебраического кодирования информации в теории связи и компьютерной информатике. Изучение секретов биоинформатики стимулирует развитие математики и информатики. Так, само понятие квантового компьютера, столь перспективное для развития искусственного интеллекта, было введено Ю.И.Маниным в 1980 году в результате анализа и осмысления особенностей скоростной обработки «генетическими автоматами» информации с ДНК в хромосомах. При этом он указывал на важную роль унитарных вращений, тензорных произведений и правил вероятностей в соответствующей модели эволюции, что подтверждается современными данными об универсальных стохастических правилах в геномных ДНК высших и низших организмов (подробнее об этом см. в статье по алгебраической биологии в настоящем тематическом выпуске журнала). В работах по современной алгебраической биологии, начатых и развиваемых в России, постепенно выявляется, что структурированные системы алфавитов и генетических текстов молекул наследственности ДНК и РНК всех организмов

обладают универсальными особенностями, которые соответствуют алгебраическим структурам и алгоритмам, десятки лет применяемым в технике помехоустойчивого кодирования информации, квантовой информатике, бит-реверсной и логической голографии. На этом модельном пути живые организмы предстают как иерархические квантово-информационные алгебро-гармонические сущности, алгебро-генетические структуры которых имеют аналогии с генетически наследуемыми феноменами гештальт психологии и голографических аспектов деятельности мозга [Петухов, 2008, 2018, 2021; Петухов, Толоконников, 2020; Petoukhov, 2016, 2018, 2019, 2020a-c, 2021a,b; Petoukhov, He, 2010; Petoukhov, Petukhova, 2017; Petoukhov, Petukhova, Svirin, 2019].

В научном сообществе давно обсуждается вопрос о соотношении врожденных знаний и знаний, приобретаемых по ходу жизни. Крайняя точка зрения сформулирована в знаменитом утверждении Платона о том, что познать значит вспомнить. Близко к этому то мнение, что наше тело с его нервной системой и всем прочим уже несет в себе полноту знаний, которые частично приходят в наше сознание при их настойчивом запросе. Но наше тело генетически наследуется от поколения к поколению, а значит, видимо, генетически наследуются заложенные в него знания. Возникает вопрос, не является ли удивительно структурированная генетическая система, обладающая обширными алгебраическими фрактало-подобными и иерархическими структурами, носителем или проявителем этих телесных знаний? Замечательным образом эта идея о теле как хранителе информации об опыте поколений рассматривается в обсуждавшейся уже в обзоре работе А.А.Жданова. Продолжение вопроса - не служат ли геномы сложной фрактальной антенной для получения информации извне, и тогда благодаря геномам наше тело является подключенным пользователем неких космических знаний и программ? Возможный гипотетический ответ на этот вопрос обсуждается далее, в завершение первой части обзора. Данные вопросы также исследуются в алгебраической биологии. К теме связи алгебраической биологии и искусственного интеллекта отметим, что системы искусственного интеллекта можно пытаться создавать на десятках разных путей с разной степенью плодотворности разработок. Но здесь уместно вспомнить слова Декарта в его «Трактате о животном»: «Нет более плодотворного занятия, чем познание самого себя».

Предложим некоторую гипотетическую схему (пример с муравьями, возможно, несёт некоторый элемент серьёзной шутки) в качестве частичного ответа на поставленный выше вопрос о взаимодействии организма с внешними силами, вплоть до космических сил. В основе теории функциональных систем П.К.Анохина, биомашсистем и общей категорной теории систем лежит постулат наличия системообразующего фактора для системного образования, которое можно отнести к системам. При этом системообразующий фактор, как

правило, является результатом, потребным системе. Он собирает систему под себя из других систем, меняет их, включая их системообразующие факторы для содействия достижению результата системы. Подчеркнём, что это немалая сила ограничивающая, а если необходимо, то и уничтожающая какие-то из своих подсистем. Никто не будет отрицать, что обычный муравейник - это система, со своим системообразующим фактором, включающим выживание. В работе [Луговской, 2009], которую в своем докладе (см. его статью в данном выпуске) цитирует А.А.Жданов в связи с проблемой выгрузки информации из автомата (организма) в реальном времени, утверждается, что весьма сложное поведение отдельных муравьев не может быть организовано самими отдельными особями из-за крайне малых размеров их нервной системы. Наиболее важной частью нервной системы муравья является надглоточный ганглий, или «мозг» муравьев, в котором образуются временные связи. Объем «мозга» относительно наибольший у рабочих, меньше у самок и самый маленький у самцов. Объем мозга *Formica* составляет  $1/280$  объема тела, у *Dytiscus* это отношение равно  $1/4200$ , у *Ichneumon* —  $1/400$  и у медоносной пчелы —  $1/174$ . По-видимому, самка не предназначена быть центром управления муравейником, даже мозг у нее меньше мозга рабочего муравья.



Предлагается гипотеза о наличии **супермозга** [Луговской, 2009] колонии муравьев (конечно, тут же внимание перебрасывается на супермозг популяции людей... мы этих размышлений не касаемся, муравьев достаточно), который обеспечивает управление многочисленными особями и, в конечном счете, выживание муравейника. По крайней мере, супермозг имеет некоторое закодированное описание результата «выжить», то есть содержит некий вариант акцептора результата действия. Здесь же в супермозге **реализуется вся функциональная система** поступает информация о проблемах муравейника, вырабатывается решение как поступить и программа действия реализуется приведением в упорядоченное движение отдельных муравьев. Отдельный муравей также система со своим системообразующим фактором, но подчиненным системообразующему фактору супермозга муравейника. Очень многое в поведении муравьев объясняет идея супермозга по Луговскому, тем более, что наличие супермозга или иного объекта, обеспечивающего реализацию системных принципов предсказывается теорией систем. Это и есть

наша «гипотетическая схема» - супермозг муравейника это четко выделенная функциональная система по П.К.Анохину ...

Вопрос лишь в том, что пока такой объект, как супермозг, не обнаружен экспериментально.

В первую очередь следует искать, как реализованы каналы связи супермозга с отдельными особями. В [Луговской, 2009] указывается, что не стоит искать каких-то новых типов полей как «биополей», вполне может оказаться достаточным обычных электромагнитных волн. «Существует множество околонучных предположений о некоем "космическом разуме", "интеллектуальной ауре" или различных неизвестных физике полях с разнообразными волшебными свойствами. Но предположения эти обычно не имеют под собой никаких реальных аргументов и хороши видимо лишь для фантастических романов. Здесь они рассматриваться не будут. ... Однако до настоящего времени не было предложено никакой схемы информационной связи особи с популяцией, которая не выходила за рамки современных физических представлений».

Тем не менее, в [Луговской, 2009] приводится пример лазерной технологии подслушивания, сигналы от говорящего как акустические волны падают на стекло окна, а чувствительный лазер считывает колебания стекла, перенося уже электромагнитный сигнал на сотни метров к подслушивающему конечному прибору. Так что, может, проблема с каналами связи решится без всякой лженауки... Вернёмся к муравьям.

Муравьи - животноводы, разводят тлей, самок тлей на зиму прячут в муравейнике, самих тлей пасут, перенося с одного пастбища на другое... строят навесы для тлей от солнца, защищают их от других насекомых ... , охота муравьев на более крупных насекомых очень похожа на забой мамонтов нашими предками, муравьи тщательно следят за жилищем, например, сотни муравьев переносят хвоинки и веточки муравейника внутрь и оттуда наружу, муравейник не гниет, купол его остается сухим даже после дождя... сам муравейник с многочисленными ходами весьма сложное сооружение (не говорим, уж, о термитах, строящих многометровые дворцы...). Мирмекологи этот список могут продолжить весьма далеко.

Однако, стоит отметить, что обращение к малым размерам муравья для обоснования неспособности его к столь сложной жизни становится невыразительным, если упомянуть известное место книг Р.Пенроуза, где он эмоционально рассказывает о сверхсложном поведении парамеции - животного, состоящего из единственной клетки, при этом обсуждаемая им возможность обработки информации за счет смены конфигурации конформаций тубулиновых димеров в микротрубочках цитоскелета эукариотов даёт несоизмеримый с современными компьютерными возможностями резервуар для хранения и обработки информации...

Тем не менее, наличие функциональной системы для муравейника, существует ли она в виде супермозга по Луговскому или реализуется отдельными особями на инстинктивном уровне как это принято считать у мирмекологов. Необходимо искать! Что мы и предлагаем в качестве серьезной шутки сделать, заведя себе в качестве *домашних питомцев* вместо кошек... муравьев, причем целый муравейник (сейчас это модно, все в продаже: террариум-формикалий, инкубаторы, питание...).



Пойманная на даче самка муравейника принесёт первых два десятка рабочих муравьев ..., наверное, супермозг уже может проявиться, будет рядом с вами и его проявления вы сможете наблюдать непосредственно! Новый муравейник самка организует одна, тут сначала супермозг не нужен, мозга самки, который даже меньше, чем у рабочего муравья, хватает. Но когда появляются десятки, сотни муравьёв супермозг возникает и приступает к своим обязанностям... Заложено генетически возникновение супермозга, это можно искать, расшифровывая геном муравьиной самки, в том числе и методами алгебраической биологии, которая обогащается алгебраическими методами прогнозирования фенотипа на основе свойств биомолекул, не связанных с кодом ДНК (развилось большое направление эпигенетики [www.cshperspectives.org](http://www.cshperspectives.org), изучающее свойства фенотипа особи, сформированные не на непосредственной основе кода ДНК, а на особенностях экспрессии генов и свойствах биомолекул). Не исключена теоретическая возможность привнесения супермозга извне, но, конечно, начальная задача состоит в обнаружении его возникновения вместе с живыми организмами, в нашем примере муравьями.

Изучение сигналов между живыми организмами, природа которых не раскрыта, - крайне серьезная экспериментальная задача, статистически достоверные результаты многочисленны, например, в целом направлении

эмоционального стресса [Судаков, 2008] или в публикуемом в данном выпуске докладе Е.А.Юматова, включающем описание серии экспериментов дистанционного влияния на кровь (регистрируемые изменения СОЭ) эмоционального воздействия человека.

В докладе Е.А.Юматова читаем: «В проведённых нами исследованиях впервые достоверно установлено, что выраженное субъективное состояние мозга человека оказывает влияние на физико-химические свойства крови [26-28]. Результаты проведённых исследований убедительно доказывают существование дистанционно-полевого эффекта выраженного субъективного состояния человека. Бесконтактное дистанционное влияние субъективного состояния может осуществляться только посредством поля, создаваемого самим биологическим объектом – мозгом человека. Это мозговое поле названо нами «психогенным полем», поскольку оно отражает психическое, субъективное состояние человека» (ссылки 26-28 это [Юматов, 2013], [Yumatov, 2013], [Yumatov, 2015]).

Авторам, как профессиональным физикам (окончившим Физтех и Физфак МГУ), нелегко слышать про возможное открытие полей, неизвестных физике... Но варианты каналов связи с помощью электромагнитных волн, в том числе, и такие как прослушка лазером в упомянутом примере В.М.Луговского, весьма далеки от исчерпания ... .

В настоящее время поступает информация (<https://ria.ru/20210505/buddizm-1731246353.html>) о том, что российские ученые получили первые научные подтверждения феномена "тукдам", или посмертной медитации, в которой могут находиться буддийские монахи, как заявил руководитель "Проекта исследования медитации и измененных состояний сознания в тибетских буддийских монастырях", основатель Института мозга человека РАН академик С.В.Медведев. «Доказав, что тукдам — это реальное состояние, ученые приблизятся к тому, чтобы обсудить "существование сознания не как функции мозга, а как отдельного фактора, без которого невозможна жизнь».

Сознание ли это, может быть, это всего лишь отключение канала связи супермозга популяции людей от уже умершего сознания? В возникающих математических теориях сознания глубоко осмыслена необходимость того, что при моделировании когнитивного помимо мозгов нужно рассматривать уровень выше индивидуального мозга, то есть уровень цивилизации... [Manin, 2017].

На этом первая часть обзора завершается.

### *Литература*

Алексеев А.Ю., Фатуева Л.А. Корсаков С.Н. – основатель когнитивной науки. В кн. Актуальные проблемы современной когнитивной науки. Материалы четвертой всероссийской научно-практической конференции с международным



участием (20-21 октября 2011 года). Иваново: ОАО «Изд-во «Иваново»». 2011. 350 с., С. 124-131.

Алексеев А.Ю. Очерк о новом способе когнитивных исследований посредством Корсаковских машин сравнения идей, Воин, ученый, гражданин. К 225-летию со дня рождения С.Н.Корсакова. М., Техполиграфцентр. 2012, 132 с., С. 69-103.

Алексеев А.Ю. Роль нейрокомпьютера в электронной культуре. *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*. № 8. 2010. С.14-26.

Алексеев А.Ю., Игнатов С.А., Конькова Т.А. Нейрокомпьютинг в комплексном тесте Тьюринга. *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*. № 5. 2012. С. 41-47.

Алексеев А.Ю. Интеллектуальная машина Корсакова (1832 г.): музыкальная интерпретация. *Биомаши системы*, т.2, №3, 2018, С. 141-161.

Алексеев А.Ю. Протонейрокомпьютер Корсакова. *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*. № 7, 2013, С. 6-17.

Анохин К.В. Когнитом: в поисках общей теории когнитивной науки. Шестая международная конференция по когнитивной науке, Калининград, 2014, С. 26-28.

Анохин К.В. Когнитом: в поисках фундаментальной нейронаучной теории сознания. *Журнал высшей нервной деятельности им. И. П. Павлова*. 2021, № 1, С. 39-71.

Анохин П.К. Взаимодействие клеток условного и безусловного раздражителей в течение применения последнего. Тр. Физиол. лабораторий им. И.П. Павлова, 1927. Т. 2, С. 107-115.

Анохин П. К. Проблема центра и периферии в современной физиологии нервной системы. В кн. Проблема центра и периферии в высшей нервной деятельности. Горький, 1935, С. 9-70.

Анохин П.К. Принципиальные вопросы общей теории функциональных систем. Принципы системной организации функций: М., Наука, 1973, С. 5-61.

Белоусов Б.П. Периодически действующая реакция и её механизм / Сб.: Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький: Изд-во ГГУ, 1951. С.76.

Бехтерев В.М. Объективная психология. В 3-х т. СПб, 1907-1910, 480 с.

Богданов А.А. Тектология: Всеобщая организационная наука. В 2-х т. Пг., 1913. 302+352 с.

Болотова Л.С. Системы искусственного интеллекта: модели и технологии основанные на знаниях. М., 2012, 664 с.

Васильев С.Н., Дружинин А.Э., Морозов Н.Ю. Вывод условий сохранения свойств математических моделей, ДАН, 2015. том 465. № 1. С. 14–19.

Васильев С.Н. и др. Интеллектуальное управление динамическими системами, М., 2000. 352 с.

Васильев С.Н., Метод сравнения в анализе систем. I, Дифференц. уравнения, 1981, том 17, № 9. С. 1562–1573.

Винер Н. Я — математик. М.: Наука, 1964, 354 с.

Витяев Е.Е. Извлечение знаний из данных. Компьютерное познание. Моделирование когнитивных процессов., Новосибирск, НГУ, 2006. 293с.

Витяев Е.Е., Демин А.В., Пономарёв Д.К. Вероятностное обобщение формальных понятий, *Программирование*. Т.38, №5, 2012, С. 219-230.

Витяев Е.Е., Мартынович В.В. Формализация «естественной» классификации и систематики через неподвижные точки предсказаний. Сибирские электронные математические известия. Том 12, ИМ СО РАН, 2015, С. 1006-1031.

Гастев А.К. Как надо работать. Основные правила, разработанные Институтом Труда ВЦСПС. Пермь, 1921, 397 с.

Геодакян В.А. Теория систем и специальные науки. В кн.: Материалы по истории и перспективам развития системного подхода и общей теории систем. М., Наука, 1971, С. 17-70.

Геодакян В.А. Системный подход и закономерности в биологии. Геодакян В. А. В кн. Системные исследования. М., Наука, 1984, с. 329–338.

Грейг О. Русская наука. Украденные открытия. М., Белые альвы, 2014. ISBN 978-5-91464-111-2. 434 с.

Жаботинский А.М. Периодические реакции окисления в жидкой фазе. ДАН СССР. 1964. Т. 157. С. 392–395.

Жданов А.А. Автономный искусственный интеллект. М., БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008, (монография), 359 с.

Керженцев П.М. Принципы организации. М., Гос. Изд-во, 1921, 240 с.

Кузнецов О.П., Базенков Н.И., Болдышев Б.А., Жиликова Л.Ю., Куливец С.Г., Чистопольский И.А. Асинхронная дискретная модель химических взаимодействий в простых нейронных системах, *Искусственный интеллект и принятие решений*. 2018, № 2, С. 3-20.

Кузьмин В.П. Принцип системности в теории и методологии К. Маркса. М., Политиздат, 1986. 398 с.

Колмогоров А.Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения. ДАН СССР. 1957. Т. 114. вып. 5. С. 953-956. Журнал "Нейрокомпьютер", 1994. № 1-2. С. 51-55.

Корсаков С.Н. (1832 г.). Очерк о новом способе исследования посредством машин для сравнения идей. (Перевод с франц. А.В.Сыромятина), Электронная культура: трансляция в социокультурной и образовательной среде. Под ред. А.Ю.Алексеева, С.Ю.Карпук. М., МГУКИ. 2009. 260 с. С. 16.

Корсаков С.Н. Начертание нового способа исследования при помощи машин, сравнивающих идеи. Пер. с франц. под ред. А.С.Михайлова. М., МИФИ, 2009, 44 с.

Ломоносов М. В. Полное собрание сочинений. АН СССР; [Глав. ред.: С. И. Вавилов (гл. ред.), Т. П. Кравец (зам. гл. ред.), А. И. Андреев, П. Н. Берков, Г. П. Блок, А. А. Елисеев (зав. гл. ред.), Г. А. Князев]. М.; Л., 1950-1983. / Т. 4: Труды по физике, астрономии и приборостроению, 1744-1765 гг.

Луговской В.М. Супермозг человечества. М., 2009, 154 с.

Манин Ю.И. Вычислимое и невычислимое, М., Советское радио, 1980, 128 с.

Матросов В.М. Метод сравнения в динамике систем. I, *Дифференц. уравнения*, Т. 10, № 9, 1974, С. 1547–1559.

Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. Метод сравнения в математической теории систем, Новосибирск, Наука, 1980. 480 с.

Месарович М. Общая теория систем: математические основы. М. Месарович, Я. Такахара. Пер. с англ. Э.Л. Наппельбаума, под ред. В.С. Емельянова. М., Мир, 1978.

Месарович М. Теория иерархических многоуровневых систем. Пер. с англ. Под ред. И.Ф.Шахнова. Предисл. чл.-кор. АН СССР Г.С. Пospelова. М., Мир, 1973.

Мищенко В.С., Бондаренко Г.Н., Фатуева Л.А. Семён Николаевич Корсаков – страницы жизни и судьбы, Воин, ученый, гражданин. К 225-летию со дня рождения С.Н. Корсакова. М., Техполиграфцентр. 2012. 132 с. С. 18-33.

Мухортов В.В., Хлебников С.В., Витяев Е.Е. Улучшенный алгоритм семантического вероятностного вывода в задаче 2-мерного анимата, *Нейроинформатика*. 2012. Т.6, № 1, С. 50-62.

Нерушай С.А. Системотехника: методологические и исторические аспекты. *Нейрокомпьютеры: разработка и применение*. 2015. № 11. С.91-97.

Прибрам К. Языки мозга, М., Прогресс, 1975.

Петухов С.В. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. М., Регулярная и хаотическая динамика, 2008, 316 с.

Петухов С.В. Концепция резонансов в генетике. *Биомашсистемы*, 2018, том 2, №4, с. 169-221.

Петухов С.В. Генетические основы алгебраической биологии, гештальтгенетика и тетра-эйдосы Ю.И. Кулакова. Презентация доклада на семинаре «Основания фундаментальной физики» физического факультета МГУ, руководимом Ю.С.Владимировым, 04.03.2021. <https://drive.google.com/file/d/18G0vmhPw82s4BmdLHvNNiLNGhroYkPQ0/view?usp=sharing>.

Петухов С.В., Толоконников Г.К. Алгебраическая биология и матричная генетика. Видео-презентация доклада на международном междисциплинарном семинаре “Алгебраическая биология и теория систем” 13.02.2020, <https://www.youtube.com/watch?v=H2dNtvTM1M&t=330s>.

Савельев А. В. Об одном подходе к созданию кибернетической теории мозга, Докл. на 8-й конф. по нейрокибернетике. – Ростов-на-Дону, 1983. – программа. – С. 10.

Савельева Т.С., Савельев А.В. Трудности и ограничения системного подхода в науке о мозге. В сб. материалов XI Междунар. конференции по нейрокибернетике «Проблемы нейрокибернетики». Ростов-на-Дону. 1995. С. 208-209.

Савельев А.В. Нейрокомпьютеры и общество. *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*, 2015. №7. С. 35-43.

Судаков К.В. Информационный эмоциональный стресс. М., РИЦ МГГУ, 2008, 201 с.

Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М., Сов. Радио. 1961, 558 с.

Толоконников Г.К. Математическая категорная теория систем. С.22 -114 в кн. Биомашсистемы. Теория и приложения, Том 2, М., Росинформагротех, 2016, 213 с.

Толоконников Г.К. Манифест: нейрографы, нейрокатегории и категорные склейки. *Биомашсистемы*, т.1, №1, 2017, С.59-146.

Толоконников Г.К. Классификация функциональных и других видов систем при их моделировании свёрточными поликатегориями. *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*. 2018, №6. С. 8-18.

Толоконников Г.К. Категорные модели искусственных нейронных сетей и системной информации, категорные склейки и парадигма категорной теории систем. *Биомашсистемы*, т.2, №1, 2018, С.127-174.

Толоконников Г.К. Неформальная категорная теория систем, *Биомашсистемы*, т.2, №4, 2018, С.41-144.

Финн В.К. Интеллект, информационное общество, гуманитарное знание и образование, М., Ленанд, 2021, 464 с.

Цыганков В.Д. С Петром Кузьмичем Анохиным с 1969 по 1974 годы, *Биомашсистемы*, т.2, №1, 2018, С. 239-249.

Чебышёв П. Л. Полное собрание сочинений. М., 1944-1951 / Т. 4. Теория механизмов. 1948. 255 с. <http://nasledie.enip.ras.ru/ras/view/publication/general.html?id=45188031>

Чебышёв П. Л. Теория сравнений. СПб., 1849. <http://books.google.ru/books?id=Sv7uAAAAMAAJ&pg=PP5>

Черноиванов В.И. Биомашсистемы: возникновение, развитие и перспективы. *Биомашсистемы*, т.1, №1, 2017, С. 7-58.

Черноиванов В.И., Судаков С.К., Толоконников Г.К. Теория функциональных систем в контексте общего системного подхода, *Биомашсистемы*, т.2, №1, С. 6-99.

- Юматов Е.А., Быкова, Е.В., Джафаров Р. Н. Дистанционное влияние субъективного состояния человека на физико-химические свойства крови. Ж. Бюлл. Эксп. Биол. и мед. 2013, т. 155, № 4, с. 526.
- Boden, M.A. *Mind as Machine: A History of Cognitive Science. Volume 1&2.* Clarendon press, Oxford, 2006, 1631 p.
- Demin A.V., Vityaev E.E. Learning in a virtual model of the *C. elegans* nematode for locomotion and chemotaxis, *Biologically Inspired Cognitive Architectures*. 2014, v.7, pp.9–14.
- Deutsch D. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proc. R.Soc. Lond. A* 400, 1985, pp.97-117.
- Garson, James (2010). Connectionism. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. First published Sun May 18. 1997; substantive revision Tue Jul 27. 2010 [URL]: <http://plato.stanford.edu/entries/connectionism/>
- Goguen J., *A Categorical Manifesto. Mathematical Structures in Computer Science*, 1991, Vol.1, no. 1, pp. 49–67.
- Hatcher W.S. *The logical foundations of mathematics*, PERGAMON PRESS, 1982, 320 p.
- Kotarbi'nski T. *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk.* Lwów, 1929.
- Karsakof S. *Apercu d'un procédé nouveau d'investigation au moyen de machines à comparer les idées.* St. Petersburg, 1832. 22 p., 2 pl.
- Manin D.Yu., Manin Yu.I. Cognitive networks: brains, internet, and civilizations, in “Humanizing mathematics and its philosophy”, pp. 85–96, Birkhäuser/Springer, 2017.
- Manin Yu. “Classical computing, quantum computing, and Shor's factoring algorithm”, *Séminaire Bourbaki*, Vol. 1998/99, Exp. No. 862, Astérisque, 266, 2000, 375–404.
- Manin D.Yu., Manin Yu.I. Cognitive networks: brains, internet, and civilizations, in “Humanizing mathematics and its philosophy”, pp. 85–96, Birkhäuser/Springer, 2017.
- Manin Yu., Marcolli M. Homotopy Theoretic and Categorical Models of Neural Information Networks, arXiv:2006.15136v1, [cs.LO], 23, Jun, 2020. 80 p.
- Manin Yu.I. Cognition and Complexity. In: M. Burgin, C.S. Calude (eds.). *Information and Complexity. World Scientific Series in Information Studies*, 2016, pp. 344–357.
- Nakagaki T., Yamada H., Toth A. Intelligence: Maze-solving by an amoeboid organism. *Nature* 407, 470 (28 September 2000), doi:10.1038/35035159.
- Petoukhov S.V. The system-resonance approach in modeling genetic structures. *Biosystems*, 2016, v. 139, p. 1-11, <http://dx.doi.org/10.1016/j.biosystems.2015.11.001>, [http://petoukhov.com/PETOUKHOV\\_ARTICLE\\_IN\\_BIOSYSTEMS.pdf](http://petoukhov.com/PETOUKHOV_ARTICLE_IN_BIOSYSTEMS.pdf).

Petoukhov S.V. The Genetic Coding System and Unitary Matrices. Preprints 2018, 2018040131, 2018, doi: 10.20944/preprints201804.0131.v2.

Petoukhov S.V. Nucleotide Epi-Chains and New Nucleotide Probability Rules in Long DNA Sequences. Preprints 2019, 2019040011, 17 pages (2019), doi: 10.20944/preprints201904.0011.v1, <https://www.preprints.org/manuscript/201904.0011/v1>

Petoukhov S.V. Hyperbolic Rules of the Cooperative Organization of Eukaryotic and Prokaryotic Genomes. Biosystems, 2020a, 198, 104273.

Petoukhov S.V. Hyperbolic Rules of the Oligomer Cooperative Organization of Eukaryotic and Prokaryotic Genomes. Preprints 2020, 2020050471, 2020b, doi:10.20944/preprints202005.0471.v2, <https://www.preprints.org/manuscript/202005.0471/v2>.

Petoukhov S.V. The rules of long DNA-sequences and tetra-groups of oligonucleotides. arXiv:1709.04943v6, 6th version from 22.05.2020, 2020c.

Petoukhov S.V. Algebraic Rules for the Percentage Composition of Oligomers in Genomes. Preprints 2021, 2021010360, 2021a, (doi:10.20944/preprints202101.0360.v2). <https://www.preprints.org/manuscript/202101.0360/v2>

Petoukhov S.V. Algebraic Rules for the Percentage Composition of Oligomers in Genomes. Preprints 2021, 2021010360 (2021a), (doi:10.20944/preprints202101.0360.v2). <https://www.preprints.org/manuscript/202101.0360/v2>

Petoukhov S.V. Modeling inherited physiological structures based on hyperbolic numbers, BioSystems, Vol. 199, 104285, 2021b, ISSN 0303-2647, <https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2020.104285>.

Petoukhov S.V., He M. Symmetrical Analysis Techniques for Genetic Systems and Bioinformatics: Advanced Patterns and Applications. Hershey, USA, IGI Global, 2010, 271 p.

Petoukhov S.V., Petukhova E.S. Symmetries in genetic systems and the concept of geno-logical coding. Information, 2017, 8(1), 2, doi:10.3390/info8010002, <http://www.mdpi.com/2078-2489/8/1/2/pdf>

Petoukhov S.V., Petukhova E.S., Svirin V.I. Symmetries of DNA alphabets and quantum informational formalisms. Symmetry: Culture and Science, 2019, Vol. 30, No. 2, p.161-179, [https://doi.org/10.26830/symmetry\\_2019\\_2\\_161](https://doi.org/10.26830/symmetry_2019_2_161).

Stewart I. Life's other secret: The new mathematics of the living world. 1999, New York: Penguin

Tolokonnikov G.K. Convolution Polycategories and Categorical Splices for Modeling Neural Networks. Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer, Vol. 938, 2020, pp. 259-267.

Tolokonnikov G. K. The use of convolutional polycategories in problems of artificial intelligence, Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer, Vol. 1126, 2020, pp. 23-32.

Tolokonnikov G.K. Functional Systems Integrated with a Universal Agent of Artificial Intelligence and Higher Neurocategories, Advances in Intelligent Systems and Computing, Springer, Vol. 1315, 2021, pp. 3-12, DOI <https://doi.org/10.1007/978-3-030-67133-4>.

Tononi G. Consciousness as integrated information: A provisional manifesto, Biol. Bull. 215 (2008) N.3, 216–242.

Turing A.M. (1936). On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem [Received 28 May. 1936. Read 12 November. 1936.]; [http://www.thocp.net/biographies/papers/turing\\_oncomputablenumbers\\_1936.pdf](http://www.thocp.net/biographies/papers/turing_oncomputablenumbers_1936.pdf)

Vityaev E.E. The logic of prediction. In: Proceedings of the 9th Asian Logic Conference Mathematical Logic in Asia, Novosibirsk, Russia, August 16–19, World Scientific, Singapore. 2005, pp. 263–276.

Vityaev E.E., Martinovich V.V. Probabilistic Formal Concepts with Negation In: A. Voronkov, I. Virbitskaite (Eds.). PCI 2014, LNCS 8974, 2015, pp. 385-399.

Vityaev E.E. A formal model of neuron that provides consistent predictions. Biologically Inspired Cognitive Architectures 2012. In Advances in Intelligent Systems and Computing, v.196, Springer, 2013, pp. 339-344.

Vityaev E. Purposefulness as a Principle of Brain Activity In: Anticipation: Learning from the Past. Cognitive Systems Monographs, V.25, Springer, 2015, pp. 231-254.

Yi-Lin Forrest J. General Systems Theory. Foundation, Intuition and Applications in Business Decision Making, IFSR International Series in Systems Science and Systems Engineering, V. 32, Springer, 2018, 370 p.

Yumatov E.A., Bikova E. V., Dzhafarov R. N. Long-Distance Effects of Human Subjective Status on the Blood Physicochemical Characteristics. Bulletin of Experimental Biology and Medicine, 2013, v. 155, № 4, p. 527-530.

Yumatov E.A., Bykova E.V., Potapova O.V, Ragimov A.A., Salimov E.L. Remote-Field Manifestations of Mental Activity of the Human Brain. World Journal of Neuroscience, 2015, v.5, № 2, 108-114.

***Overview of Research on Artificial Intelligence,  
algebraic biology and systems theory. Historical  
aspect, current state and prospects. Part 1.***

Savelyev A.V.,

Moscow, [gmkristo@rambler.ru](mailto:gmkristo@rambler.ru)

Alekseev A. Yu.,

Moscow, NSMII under the Presidium of the Russian Academy of Sciences, [mail@scmai.ru](mailto:mail@scmai.ru)

Tolokonnikov G.K.,

FNATS VIM, Moscow, [admci@mail.ru](mailto:admci@mail.ru)

Petukhov S.V.,

Moscow, IMASH RAS, <http://petoukhov.com>

**Abstract.** The review is devoted to research on artificial intelligence, algebraic biology and systems theory in the historical aspect, covering the current state and development prospects. The review includes materials, including a review, sounded in the reports of the participants of the Meeting

"Interdisciplinary interaction of algebraic biology, systems theory and artificial intelligence" organized and held on January 27-29, 2021 by the International Interdisciplinary Seminar "Algebraic Biology and Systems Theory" in cooperation with Council for the methodology of artificial intelligence and cognitive research at the Presidium of the Russian Academy of Sciences and the Russian Physiological Society named after I.P. Pavlov. A certain emphasis is placed on the works in these areas performed by domestic scientists. The proposed review cannot be considered as exhaustive in any sense, rather, it is an attempt by the authors, based on their ideas, to give a description of works with an emphasis on the work of domestic scientists in the fields of science indicated in the title.

**Keywords:** systems engineering, general systems theory, systems analysis, neurocomputing, Russian classics of world science, quantum computers, categories, theory of computation, Korsakov's machine.

### **References**

Alekseev A.Yu., Fatueva L.A. [Korsakov S.N. - Founder of Cognitive Science]. In the book. Actual problems of modern cognitive science. Materials of the fourth all-Russian scientific-practical conference with international participation (October 20-21, 2011). Ivanovo: JSC "Publishing house" Ivanovo ". 2011.350 p., pp. 124-131.

Alekseev A.Yu. [Essay on a new way of cognitive research using Korsakov's machines for comparing ideas, Warrior, scientist, citizen]. To the 225th anniversary of the birth of S.N. Korsakov. M.: Tekhpolygoncenter. 2012.132 p., pp. 69-103.

Alekseev A.Yu. [The role of a neurocomputer in electronic culture]. *Neurocomputers: Development and Application*. No. 8. 2010. pp.14-26.

Alekseev A.Yu., Ignatov S.A., Kon'kova T.A. [Neurocomputing in a complex Turing test]. *Neurocomputers: development and application*. No. 5, 2012, pp. 41-47.

Alekseev A.Yu. Intellektualnaya mashina Korsakova: muzikalnaya interpretatsiya [Korsakov's Intelligent Machine (1832): Musical Interpretation]. *Biomachsystems*, vol. 2, No. 3, 2018, pp. 141-161.

Alekseev A.Yu. Protoneirokompyuter Korsakova [Korsakov's proto-neurocomputer]. *Neurocomputers: development, application*. No. 7, 2013, pp. 6-17.

Anokhin K.V. Kognitom: v poiskakh obshey teorii kognitivnoy nauki [Cognitome: In Search of a General Theory of Cognitive Science]. Sixth International Conference on Cognitive Science, Kaliningrad, 2014, pp. 26-28.

Anokhin K.V. Kognitome: v poiskakh fundamentalnoy neironauchnoy teoriisoznaniya [Cognite: In Search of a Fundamental Neuroscientific Theory of Consciousness]. Journal of Higher Nervous Activity. I.P. Pavlova. 2021, no. 1, pp. 39-71.

Anokhin P.K. Vzaimodeistvie kletok uslovnogo i bezuslovnogo razdrzhiteley v techenie primeneniya poslednego [Interaction of cells of conditioned and unconditioned stimuli during the application of the latter]. Tr. Fiziol. laboratoriy them. IP Pavlova, 1927. Vol. 2, pp. 107-115.

Anokhin P.K. Problema tsentra i periferii v sovremennoy fiziologii nervnoy sistemi [The problem of the center and periphery in modern physiology of the nervous system]. In the book. The problem of the center and the periphery in the higher nervous activity. Gorky, 1935, pp. 9-70.

Anokhin P.K. Printsipialniye voprosi obshey teorii funktsionalnikh sistem [Fundamental questions of the general theory of functional systems]. Principles of the systemic organization of functions: Moscow: Nauka, 1973, pp. 5-61.

Belousov B.P. Periodicheski deistvuyushaya reaktsiya i eye mekhanizm [Periodically acting reaction and its mechanism]. Collection: Autowave processes in systems with diffusion. Gorky: Publishing house of GSU, 1951, p. 76.



Bekhterev V.M. Obyektivnaya psikhologiya [Objective psychology]. In 3 volumes. St. Petersburg, 1907-1910, 480 p.

Bogdanov A.A. Tektologiya: vseobshaya organizatsionaya nauka [Tectology: General Organizational Science]. In 2 volumes. Pg., 1913.302 + 352 p.

Bolotova L.S. Sistemi iskusstvennogo intellekta: modeli i tekhnologii osnovanniye na znaniyakh [Artificial intelligence systems: knowledge-based models and technologies]. M., 2012, 664 p.

Vasiliev S.N., Druzhinin A.E., Morozov N.Yu. Vivod usloviy sokhraneniya svoystv matematicheskikh modeley [Derivation of conditions for the conservation of properties of mathematical models], DAN, 2015. Volume 465. No. 1. pp. 14–19.

Vasiliev S.N. and others. Intellektnoye upravlenie dinamicheskimi sistemami [Intelligent control of dynamic systems], M., 2000, 352 p.

Vasiliev S.N. [Comparison method in systems analysis]. I, *Differential Uravn.*, 1981, Vol. 17, No. 9. pp. 1562–1573.

Viner N. Ya - matematik [I am a mathematician]. Moscow, Nauka, 1964, 354 p.

Vityaev E.E. Izvlechenie znaniy iz dannikh. Kompyuternoye poznanie. Modelirovanie kognitivnykh protsessov [Extracting knowledge from data. Computer cognition. Modeling of cognitive processes], Novosibirsk, NSU, 2006, 293 p.

Vityaev E.E., Demin A.V., Ponomarev D.K. Veroyatnostnoe obobshenie formalnykh ponyatii [Probabilistic generalization of formal concepts], Programming. T. 38, No. 5, 2012, pp. 219-230.

Vityaev E.E., Martynovich V.V. Formalizatsiya estestvennoy klassifikatsii i sistematiki cherez nepodvizhnie tochki predskazanii [Formalization of "natural" classification and systematics through fixed prediction points]. Siberian electronic mathematical news. Vol. 12, IM SO RAN, 2015, pp. 1006-1031.

Gastev A.K. Kak nado rabotat [How to work]. Basic rules developed by the Institute of Labor of the All-Union Central Council of Trade Unions. Perm, 1921, 397p.

Geodakyan V.A. Teoriya sistem i spetsialniye nauki [Systems theory and special sciences]. In the book: Materials on the history and development prospects of the systems approach and general systems theory. M., Nauka, 1971, pp. 17-70.

Geodakyan V.A. Sistemniy podhod i zakonomernosti v biologii [Systems approach and patterns in biology]. Geodakyan V.A. Systemic research. M., Nauka, 1984, p. 329-338.

Greig O. Russkaya nauka. Ukradennye otkritiya [Russian Science. Stolen discoveries]. M., White Alives, 2014. ISBN 978-5-91464-111-2. 434 p.

Zhabotinsky A.M. Periodicheskie reaktsii okisleniya v zhidkoy faze [Periodic oxidation reactions in the liquid phase], DAN SSSR. 1964. Vol. 157, pp. 392–395.

Zhdanov A.A. Avtonomniy iskusstvenniy intellekt [Autonomous artificial intelligence]. M., BINOM. Knowledge Laboratory, 2008, (monograph), 359 p.

Kerzhentsev P.M. Printsipi organizatsii [Organization principles]. M., State. Publishing house, 1921, 240 p.

Kuznetsov O.P., Bazenkov N.I., Boldyshev B.A., Zhilyakova L.Yu., Kulivets S.G., Chistopolskiy I.A. Asinkhronnaya diskretnaya model khimicheskikh vzaimodeistviy v prostakh neironnykh sistemakh [Asynchronous Discrete Model of Chemical Interactions in Simple Neural Systems], *Artificial Intelligence and Decision Making*. 2018, No. 2, pp. 3-20.

Kuzmin V.P. Printsip sistemnosti v teorii i metodologii K.Marksa [The principle of consistency in the theory and methodology of K. Marx]. M., Politizdat, 1986. 398 p.

Kolmogorov A.N. [On the representation of continuous functions of several variables in the form of a superposition of continuous functions of one variable and addition]. DAN USSR. 1957, vol. 114, no. 5. S. 953-956. *Neurocomputer*, 1994. № 1-2. pp. 51-55.

Korsakov S.N. (1832). Ocherk o novom sposobe issledovaniya posrdstvom mashin dlya sravneniya idei [Essay on a new way of research by means of machines for comparing ideas]. (Translated from French by A.V. Syromyatin), *Electronic culture: broadcasting in the socio-cultural and educational environment*. Ed. A.Yu. Alekseeva, S.Yu. Karpuk. M., MGUKI. 2009. 260 p., P. 16.

Korsakov S.N. Nachertaniye novogo sposoba issledovaniya pri pomoshi mashin , sravnivayushikh idei [Outlining a new way of exploring with machines that compare ideas]. Per. with French ed. A.S. Mikhailova. M., MEPhI, 2009, 44 p.

Lomonosov M. V. Polnoe sobranie sochineniy [Complete Works]. Academy of Sciences of the USSR; [Chap. ed.: S. I. Vavilov (chief editor), T. P. Kravets (deputy chief editor.), A. I. Andreev, P. N. Berkov, G. P. Blok, A. A. Eliseev (head of the editor), G. A. Knyazev]. M.; L., 1950-1983. / T. 4: Works on physics, astronomy and instrumentation, 1744-1765.

Lugovskoy V.M. Supermozg chelovechestva [The superbrain of humanity]. M., 2009, 154 p.

Manin Yu.I. Vichislimoe i nevichislimoe [Computable and non-computable], M., Soviet radio, 1980, 128 p.

Matrosov V.M. Metod sravneniya v dinamike sistem [Comparison method in the dynamics of systems]. I, *Differential Equations*, vol. 10, no. 9, 1974, pp. 1547–1559.

Matrosov V.M., Anapolskiy L.Yu., Vasiliev S.N. Metod sravneniya v matematicheskoy teorii sistem [Comparison Method in Mathematical System Theory], Novosibirsk, Nauka, 1980, 480 p.

Mesarovich M. Obshaya teoriya sistem: matematicheskie osnovi [General theory of systems: mathematical foundations]. M. Mesarovich, J. Takahara. Per. from English E.L. Nappelbaum, ed. V.S. Emelyanov. M, Mir, 1978.

Mesarovich M. Teoriya ierarkhicheskikh mnogourovnevnykh sistem [Theory of hierarchical multilevel systems]. Per. from English Ed. I.F.Shakhnova. Preface Corresponding Member USSR Academy of Sciences G.S. Pospelova. M., Mir, 1973.

Mishchenko V.S., Bondarenko G.N., Fatueva L.A. Semen Nikolaevich Korsakov- stranitsi zhizni i sudbi. Voin, ucheniy, grazhdanin [Semyon Nikolaevich Korsakov - pages of life and destiny, Warrior, scientist, citizen]. To the 225th anniversary of the birth of S.N. Korsakov. M., Tekhpoligrafcenter. 2012. 132 p., pp. 18-33.

Mukhortov V.V., Khlebnikov S.V., Vityaev E.E. Uluchshenniy algoritm semanticheskogo veroyatnostnogo vivoda v zadache 2-mernogo animata [Improved semantic probabilistic inference algorithm in 2-dimensional animat problem], *Neuroinformatics*. 2012. Vol. 6, No. 1, pp. 50-62.

Nerushay S.A. Sistemotekhnika: metodologicheskie i istoricheskie aspekty [Systems engineering: methodological and historical aspects]. *Neurocomputers: development and application*. 2015. No. 11. pp. 91-97.

Pribram K. Yaziki mozga [Brain languages], M., Progress, 1975.

Petukhov S.V. Kontseptsiya rezonansov v genetike [The concept of resonances in genetics]. *Biomashsystems*, 2018, volume 2, no. 4, p. 169-221.

Petukhov S.V. Geneticheskie osnovi algebraicheskoi biologii, geshtaltgenetika i tetra-oidosi Yu.I.Kulakova [Genetic foundations of algebraic biology, gestaltgenetics and tetra-oidos by Yu.I. Kulakov]. Presentation of the report at the seminar "Foundations of Fundamental Physics" of the Physics Faculty of Moscow State University, led by Yu.S.Vladimirov, 04.03.2021. <https://drive.google.com/file/d/18G0vmhPw82s4BmdLHvNNiLNGhroYkPQ0/view?usp=sharing>.

Petukhov S.V., Tolokonnikov G.K. Algebraicheskaya biologiya i matrichnaya genetika [Algebraic biology and matrix genetics]. Video presentation of the report at the international interdisciplinary seminar "Algebraic biology and systems theory" 02/13/2020, <https://www.youtube.com/watch?v=H2dNtvTM11M&t=330s>.

Savelyev A.V. Ob odnom podhode k sozdaniyu kiberneticheskoy teorii mozga [On One Approach to the Creation of a Cybernetic Theory of the Brain], Dokl. at the 8th conf. on neurocybernetics. - Rostov-on-Don, 1983. - program. - p. 10.

Savelyeva T.S., Savelyev A.V. Trudnosti i ogranicheniya sistemnogo podhoda v auke o mozge [Difficulties and limitations of the system approach in brain science]. On Sat. materials XI Intern. conferences on neurocybernetics "Problems of neurocybernetics". Rostov-on-Don. 1995. pp. 208-209.

Savelyev A.V. Neurokompyuteri i obshestvo [Neurocomputers and Society]. Neurocomputers: development, application, 2015. No. 7. S. 35-43.

Sudakov K.V. Informatsionniy emotsionalniy stress [Informational emotional stress]. Moscow, RITs MGGU, 2008, 201 p.

Stratonovich R.L. Izbranniye voprosi teorii fluktuatsiy v radiotekhnike [Selected questions of the theory of fluctuations in radio engineering]. M., Sov. Radio. 1961, 558 p.

Tolokonnikov G.K. Matematicheskaya kategornaya teoriya sistem [Mathematical categorical theory of systems]. pp. 22-114 in the book. Biomachsystems. Theory and applications, Volume 2, M., Rosinformagrotech, 2016, 213 p.

Tolokonnikov G.K. Manifest: Neurografi, neurokategorii i kategornie skleiki [Manifesto: neurographs, neurocategories and categorical splices]. *Biomachsystems*, vol. 1, No. 1, 2017, pp. 59-146.

Tolokonnikov G.K. Klassifikatsiya funktsionalnikh i drugikh vidov sistem pri ikh modelirovanii svertochnimi kategoriyami [Classification of functional and other types of systems in their modeling by convolutional polycategories]. *Neurocomputers: development, application*. 2018, no. 6. pp. 8-18.

Tolokonnikov G.K. Kategornie modeli iskusstvennikh neironnikh setey i sistemnoy informatsii, kategornie skleiki i paradigma kategornoj teorii sistem [Categorical models of artificial neural networks and system information, categorical splices and the paradigm of categorical systems theory]. *Biomachsystems*, vol. 2, No. 1, 2018, pp. 127-174.

Tolokonnikov G.K. Neformalnaya kategornaya teoriya sistem [Informal categorical theory of systems], *Biomachsystems*, vol. 2, no. 4, 2018, pp. 41-144.

Finn V.K. Intellect, informatsionnoe obshestvo, gumanitarnoye znanie i obrazovanie [Intelligence, information society, humanitarian knowledge and education], M., Lenand, 2021, 464p.

Tsygankov V.D. S Petrom Kuzmichom Anokhinim s 1969 po 1974 godi [With Peter Kuzmich Anokhin from 1969 to 1974], *Biomachsystems*, vol. 2, No. 1, 2018, pp. 239-249.

Chebyshev P.L. Polnoe sobranie sochineniy [Complete Works]. M., 1944-1951, T. 4, Theory of mechanisms. 1948, 255 p. <http://nasledie.enip.ras.ru/ras/view/publication/general.html?id=45188031>

Chebyshev P.L. Teoriya sravneniy [Theory of comparisons]. SPb., 1849. <http://books.google.ru/books?Id=Sv7uAAAAMAAJ&pg=PP5>

Chernoivanov V.I. Biomashsistemi: vzniknovenie , razvitie, perspektivi [Biomachsystems: emergence, development and prospects] *Biomachsystems*, vol. 1, No. 1, 2017, pp. 7-58.

Boden, M.A. Mind as Machine: A History of Cognitive Science. Volume 1&2. Clarendon press, Oxford, 2006, 1631 p.

Demin A.V., Vityaev E.E. Learning in a virtual model of the C. elegans nematode for locomotion and chemotaxis, *Biologically Inspired Cognitive Architectures*. 2014, v.7, pp.9-14.

Deutsch D. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proc. R.Soc. Lond. A* 400, 1985, pp.97-117.

- Garson, James (2010). Connectionism. Stanford Encyclopedia of Philosophy. First published Sun May 18. 1997; substantive revision Tue Jul 27. 2010 [URL]: <http://plato.stanford.edu/entries/connectionism/>
- Goguen J., A Categorical Manifesto. *Mathematical Structures in Computer Science*, 1991, Vol.1, no. 1, pp. 49–67.
- Hatcher W.S. *The logical foundations of mathematics*, PERGAMON PRESS, 1982, 320 p.
- Kotarbi'nski T. *Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii nauk*. Lwów, 1929.
- Karsakof S. Aperçu d'un procédé nouveau d'investigation au moyen de machines à comparer les idées. St. Petersburg, 1832. 22 p., 2 pl.
- Manin D.Yu., Manin Yu.I. Cognitive networks: brains, internet, and civilizations, in "Humanizing mathematics and its philosophy", pp. 85–96, Birkhäuser/Springer, 2017.
- Manin Yu. "Classical computing, quantum computing, and Shor's factoring algorithm", *Séminaire Bourbaki*, Vol. 1998/99, Exp. No. 862, Astérisque, 266, 2000, 375–404.
- Manin D.Yu., Manin Yu.I. Cognitive networks: brains, internet, and civilizations, in "Humanizing mathematics and its philosophy", pp. 85–96, Birkhäuser/Springer, 2017.
- Manin Yu., Marcolli M. Homotopy Theoretic and Categorical Models of Neural Information Networks, arXiv:2006.15136v1, [cs.LO], 23, Jun, 2020. 80 p.
- Manin Yu.I. Cognition and Complexity. In: M. Burgin, C.S. Calude (eds.). *Information and Complexity*. World Scientific Series in Information Studies, 2016, pp. 344–357.
- Nakagaki T., Yamada H., Toth A. Intelligence: Maze-solving by an amoeboid organism. *Nature* 407, 470 (28 September 2000), doi:10.1038/35035159.
- Petoukhov S.V. The system-resonance approach in modeling genetic structures. *Biosystems*, 2016, v. 139, p. 1-11, <http://dx.doi.org/10.1016/j.biosystems.2015.11.001>, [http://petoukhov.com/PETOUKHOV\\_ARTICLE\\_IN\\_BIOSYSTEMS.pdf](http://petoukhov.com/PETOUKHOV_ARTICLE_IN_BIOSYSTEMS.pdf).
- Petoukhov S.V. The Genetic Coding System and Unitary Matrices. Preprints 2018, 2018040131, 2018, doi: 10.20944/preprints201804.0131.v2.
- Petoukhov S.V. Nucleotide Epi-Chains and New Nucleotide Probability Rules in Long DNA Sequences. Preprints 2019, 2019040011, 17 pages (2019), doi: 10.20944/preprints201904.0011.v1, <https://www.preprints.org/manuscript/201904.0011/v1>.
- Petoukhov S.V. Hyperbolic Rules of the Cooperative Organization of Eukaryotic and Prokaryotic Genomes. *Biosystems*, 2020a, 198, 104273.
- Petoukhov S.V. Hyperbolic Rules of the Oligomer Cooperative Organization of Eukaryotic and Prokaryotic Genomes. Preprints 2020, 2020050471, 2020b, doi:10.20944/preprints202005.0471.v2, <https://www.preprints.org/manuscript/202005.0471/v2>. Petoukhov S.V. The rules of long DNA-sequences and tetra-groups of oligonucleotides. arXiv:1709.04943v6, 6th version from 22.05.2020, 2020c.
- Petoukhov S.V. Algebraic Rules for the Percentage Composition of Oligomers in Genomes. Preprints 2021, 2021010360, 2021a, (doi:10.20944/preprints202101.0360.v2). <https://www.preprints.org/manuscript/202101.0360/v2>
- Petoukhov S.V. Algebraic Rules for the Percentage Composition of Oligomers in Genomes. Preprints 2021, 2021010360 (2021a), (doi:10.20944/preprints202101.0360.v2). <https://www.preprints.org/manuscript/202101.0360/v2>
- Petoukhov S.V. Modeling inherited physiological structures based on hyperbolic numbers, *BioSystems*, Vol. 199, 104285, 2021b, ISSN 0303-2647, <https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2020.104285>.
- Petoukhov S.V., He M. *Symmetrical Analysis Techniques for Genetic Systems and Bioinformatics: Advanced Patterns and Applications*. Hershey, USA, IGI Global, 2010, 271 p.
- Petoukhov S.V., Petukhova E.S. Symmetries in genetic systems and the concept of geno-

logical coding. *Information*, 2017, 8(1), 2, doi:10.3390/info8010002, <http://www.mdpi.com/2078-2489/8/1/2/pdf>

Petoukhov S.V., Petukhova E.S., Svirin V.I. Symmetries of DNA alphabets and quantum informational formalisms. *Symmetry: Culture and Science*, 2019, Vol. 30, No. 2, p.161-179, [https://doi.org/10.26830/symmetry\\_2019\\_2\\_161](https://doi.org/10.26830/symmetry_2019_2_161).

Stewart I. *Life's other secret: The new mathematics of the living world*. 1999, NewYork: Penguin

Tolokonnikov G.K. Convolution Polycategories and Categorical Splices for Modeling Neural Networks. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, Springer, Vol. 938, 2020, pp. 259-267.

Tolokonnikov G. K. The use of convolutional polycategories in problems of artificial intelligence, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, Springer, Vol. 1126, 2020, pp. 23-32.

Tolokonnikov G.K. Functional Systems Integrated with a Universal Agent of Artificial Intelligence and Higher Neurocategories, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, Springer, Vol. 1315, 2021, pp. 3-12, DOI <https://doi.org/10.1007/978-3-030-67133-4>.

Tononi G. Consciousness as integrated information: A provisional manifesto, *Biol. Bull.* 215 (2008) N.3, 216–242.

Turing A.M. (1936). On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem [Received 28 May. 1936. Read 12 November. 1936.]; [http://www.thocp.net/biographies/papers/turing\\_oncomputablenumbers\\_1936.pdf](http://www.thocp.net/biographies/papers/turing_oncomputablenumbers_1936.pdf)

Vityaev E.E. The logic of prediction. In: *Proceedings of the 9th Asian Logic Conference Mathematical Logic in Asia*, Novosibirsk, Russia, August 16–19, World Scientific, Singapore. 2005, pp. 263–276.

Vityaev E.E., Martinovich V.V. Probabilistic Formal Concepts with Negation In: A. Voronkov, I. Virbitskaite (Eds.). *PCI 2014, LNCS 8974*, 2015, pp. 385-399.

Vityaev E.E. A formal model of neuron that provides consistent predictions. *Biologically Inspired Cognitive Architectures 2012*. In *Advances in Intelligent Systems and Computing*, v.196, Springer, 2013, pp. 339-344.

Vityaev E. Purposefulness as a Principle of Brain Activity In: *Anticipation: Learning from the Past. Cognitive Systems Monographs*, V.25, Springer, 2015, pp. 231-254.

Yi-Lin Forrest J. *General Systems Theory. Foundation, Intuition and Applications in Business Decision Making*, IFSR International Series in Systems Science and Systems Engineering, V. 32, Springer, 2018, 370 p.

Yumatov E.A., Bikova E. V., Dzhabfarov R. N. Long-Distance Effects of Human Subjective Status on the Blood Physicochemical Characteristics. *Bulletin of Experimental Biology and Medicine*, 2013, v. 155, № 4, p. 527-530.

Yumatov E.A., Bykova E.V., Potapova O.V, Ragimov A.A., Salimov E.L. Remote-Field Manifestations of Mental Activity of the Human Brain. *World Journal of Neuroscience*, 2015, v.5, № 2, 108-114.

## ***Механизм генерации и обработки зрительного сигнала в сетчатке глаза***

***Островский М.А.***

*Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля РАН,  
Кафедра молекулярной физиологии  
Биологического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова*

**Аннотация.** Детально рассмотрены молекулярные механизмы преобразования энергии поглощённого кванта света в фоторецепторный потенциал зрительной клетки, то есть механизм генерации зрительного сигнала, структура и функции первого фоторецепторного синапса, современные представления о клеточной и синаптической организации плексиформных (синаптических) слоёв сетчатки. Синаптические схемы и взаимодействия между амакриновыми клетками в настоящее время являются предметом активных исследований. Появление новейших технологий – геномных, генно-инженерных, оптогенетических, коннектомных – открывает новые возможности для исследования молекулярных механизмов, специфичности и пластичности синаптической организации сетчатки и описания её функциональных нервных цепей. Механизмы обработки зрительного сигнала в нервных слоях сетчатки глаза остаются актуальнейшей междисциплинарной проблемой современной науки об обработке информации в живых системах.

**Ключевые слова:** сетчатка, нейромедиаторы, колбочки и палочки, биполярные клетки, амакриновые клетки, информация в живых системах.

**«Сетчатка – это часть центральной нервной системы, периферическая часть мозга» (S. Ramon y Cajal, 1893).**

Это утверждение Рамон-и-Кахал повторяет неоднократно. Особенно чётко оно сформулировано в фундаментальной статье «Сетчатка позвоночных», опубликованной в бельгийском журнале *La Cellule* в 1893 году [1]. С годами оно приобретает всё больший смысл. Действительно, сетчатка является частью центральной нервной системы, хотя бы в силу своего эмбрионального развития. В сетчатке происходит сложнейшая обработка информации. Синаптическая организация сетчатки, пластичность её синапсов могут и служат моделью для понимания организации и обработки информации в структурах мозга.

В первой части доклада подробно рассмотрены молекулярные механизмы преобразования энергии поглощённого кванта света в фоторецепторный потенциал зрительной клетки, то есть механизм генерации зрительного сигнала.

Затем подробно рассмотрены структура и функции первого фоторецепторного синапса. Палочки и колбочки образуют синаптические контакты с разными типами биполярных клеток: палочки только с палочковыми ON-биполярными, а колбочки с обоими типами — как с ON-, так и OFF-биполярными клетками. Нейромедиатором и в палочках, и в колбочках являются глутамат. В темноте глу-

тамат постоянно выделяется из пресинаптических окончаний фоторецепторных клеток. На свету скорость его выделения замедляется, а на ярком свету прекращается вовсе. На свету уменьшение или прекращение выделения глутамата приводит в ON-биполярной клетке к открытию TRPM1 каналов, её деполяризации и генерации, в результате, b-волны электроретинограммы (ЭРГ). Функциональный смысл синапса фоторецептор — ON-биполярная клетка состоит в том, чтобы *инвертировать* гиперполяризацию фоторецепторов, которая происходит в ответ на свет, на деполяризацию ON-биполярных клетках. Благодаря этому, в сетчатке формируется ON-путь обработки зрительной информации.

OFF биполярные клетки сохраняют знак реакции, который возникает в фоторецепторах в ответ на свет, а именно гиперполяризацию. Иными словами, OFF-путь обработки зрительной информации в сетчатке сохраняет тот же знак реакции, который задаётся фоторецепторами — палочками и колбочками.

Первый фоторецепторный синапс может служить ярким примером пластичности синаптической передачи. Действительно, палочки и колбочки образуют в сложно устроенных ленточных синапсах контакты с дендритами и ON-, и OFF-биполярных клеток и, одновременно, с отростками горизонтальных клеток. Структура первого ленточного синапса палочек и колбочек хорошо описана (для обзора см. [2]).

Именно в этих, так называемых, триадных фоторецепторных синапсах формируются, как было уже сказано, два пути обработки зрительной информации – ON-и OFF-пути; именно в синапсе фоторецептор—ON-биполярная клетка происходит инвертирование «знака», когда ON-биполярная клетка в ответ на свет не гипер-, а деполяризуется, в то время как OFF- биполярная клетка гиперполяризуется. В основе механизма инверсии (пластичности) этих синапсов лежит использование разных постсинаптических рецепторов к одному и тому же нейромедиатору – глутамату, а именно ионотропного рецептора глутамата (AMPA/каинат) для OFF- биполярных и метаботропного (mGluR6) для ON-биполярных клеток. Благодаря возникновению в ходе эволюции метаботропного синапса, инвертирующего знак ответа биполярной клетки на свет, формируется в сетчатке ON-путь обработки зрительной информации

**Горизонтальные клетки** регулируют синаптическую передачу от фоторецепторов к ON- и OFF-биполярным клеткам, осуществляя тормозную обратную связь с фоторецепторными клетками. Предложено три различных механизма ингибирующей обратной связи горизонтальными клетками: ГАМК-опосредованная обратная связь, рН-зависимая обратная связь и опосредованная эфаптическая обратная связь (для обзора см. [3]).

В докладе подробно рассмотрены также современные представления о клеточной и синаптической организации т.н. плексиформных (синаптических) слоёв сетчатки. Сетчатка содержит два синаптических слоя – наружный и внутренний, четыре класса нервных клеток – биполярные и горизонтальные, амакриновые и ганглиозные, и, как уже было сказано, два типа фоторецепторных –

палочки и колбочки. В наружном плексиформном слое фоторецепторные клетки образуют синаптические контакты с дендритами биполярных и отростками горизонтальных клеток, а в широком внутреннем плексиформном слое аксоны биполярных образуют контакты с дендритами амакриновых и ганглиозных клеток.

Ярким примером сетчатки как «периферической части мозга» может служить сложнейшая обработка информации в её *внутреннем синаптическом слое*. В этом слое около 30 типов интернейронов – амакриновых клеток, которые регулируют и обрабатывают передачу зрительных сигналов от ON- и OFF-биполярных клеток к ганглиозным клеткам. Обработка сигналов амакриновыми клетками как интернейронами включает не только их прямое взаимодействие с ганглиозными клетками и обратную связь с биполярными клетками, но и сложнейшие взаимодействия между самими амакриновыми клетками. По современным оценкам в сетчатке существуют 15 подтипов биполярных, около 45 подтипов амакриновых и около 50 подтипов ганглиозных клеток (для обзора см. [4]). Синаптические схемы и взаимодействия между амакриновыми клетками в настоящее время являются предметом активных исследований.

Появление новейших технологий – геномных, генно-инженерных, оптогенетических, коннектомных – открывает новые возможности для исследования молекулярных механизмов, специфичности и пластичности синаптической организации сетчатки и описания её функциональных нервных цепей [4-7]. Механизмы обработки зрительного сигнала в нервных слоях сетчатки глаза остаются актуальнейшей междисциплинарной проблемой современной науки об обработке информации в живых системах.

Настоящая заметка служит аннотацией к докладу автора на Совещании 27-29 января 2021 года «Междисциплинарное взаимодействие алгебраической биологии, теории систем и искусственного интеллекта», организованного Международным междисциплинарным Семинаром "Алгебраическая биология и теория систем" при участии Научного Совета по методологии ИИ и когнитивных исследований при Президиуме РАН (НСМИИ при Президиуме РАН) и Российского физиологического общества им. И.П. Павлова. Видео доклада академика РАН М.А. Островского имеет ссылку <https://youtu.be/pKngDlZjvY0> и размещается на YouTube-канале Международного междисциплинарного Семинара "Алгебраическая биология и теория систем".

### *Литература*

1. Ramon y Cajal S. La retina des vertebres. *La Cellule*, 1893, 9, 119-228.
2. Moser T., Grabner C.P., Schmitz F. Sensory Processing at Ribbon Synapses in the Retina and the Cochlea. *Physiol Rev.* 2020, Jan 1; 100(1):103-144. doi: 10.1152/physrev.00026.2018. Epub 2019 Aug 2. PMID: 31373863.



3. Furukawa T., Ueno A., Omori Y. Molecular mechanisms underlying selective synapse formation of vertebrate retinal photoreceptor cells. *Cell. Mol. Life Sci.* 2020, 77, p. 1251–1266, <https://doi.org/10.1007/s00018-019-03324-w>.
4. Graham H.K., Duan X. Molecular mechanisms regulating synaptic specificity and retinal circuit formation. *Wiley Interdiscip Rev. Dev. Biol.*, 2021, Jan; 10(1):e379. doi: 10.1002/wdev.379. Epub 2020 Apr 8. PMID: 32267095; PMCID: PMC7541429.
5. Jia Y., Lee S., Zhuo Y., Zhou Z.J. A retinal circuit for the suppressed-by-contrast receptive field of a polyaxonal amacrine cell. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 2020, Apr. 28; 117(17):9577-9583. doi: 10.1073/pnas.1913417117.
6. Zucker C.L., Bernstein P.S., Schalek R.L., Lichtman J.W., Dowling J.E. A connectomics approach to understanding a retinal disease. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 2020, Aug 4; 117(31):18780-18787. doi: 10.1073/pnas.2011532117. Epub 2020 Jul 22. PMID: 32699144; PMCID: PMC7414052.
7. Wool L.E., Packer O.S., Zaidi Q., Dacey D.M. Connectomic Identification and Three-Dimensional Color Tuning of S-OFF Midget Ganglion Cells in the Primate Retina. *J Neurosci.*, 2019, Oct 2; 39(40) : 7893-7909, doi: 10.1523/JNEUROSCI.0778-19.2019. Epub 2019 Aug 12. PMID: 31405926.

### ***Generation and processing mechanism visual signal in the retina***

***Ostrovsky M.A.***

Institute of Biochemical Physics named after N.M. Emanuel RAS,  
Department of Molecular Physiology  
Faculty of Biology, Moscow State University M.V. Lomonosov

***Abstract.*** *The molecular mechanisms of the conversion of the energy of the absorbed light quantum into the photoreceptor potential of the visual cell, that is, the mechanism of generation of the visual signal, the structure and function of the first photoreceptor synapse, modern concepts of the cellular and synaptic organization of the plexiform (synaptic) layers of the retina are considered in detail. Synaptic circuits and interactions between amacrine cells are currently the subject of active research. The emergence of the latest technologies - genomic, genetic engineering, optogenetic, connectomic - opens up new opportunities for studying molecular mechanisms, specificity and plasticity of the synaptic organization of the retina and describing its functional nerve circuits. The mechanisms of processing the visual signal in the nerve layers of the retina of the eye remain the most urgent interdisciplinary problem of modern science about information processing in living systems.*

***Keywords:*** *retina, neurotransmitters, cones and rods, bipolar cells, amacrine cells, information in living systems.*

### ***References***

1. Ramon y Cajal S. La retina des vertebres. *La Cellule*, 1893, 9, 119-228.

2. Moser T., Grabner C.P., Schmitz F. Sensory Processing at Ribbon Synapses in the Retina and the Cochlea. *Physiol Rev.* 2020, Jan 1; 100(1):103-144. doi: 10.1152/physrev.00026.2018. Epub 2019 Aug 2. PMID: 31373863.
3. Furukawa T., Ueno A., Omori Y. Molecular mechanisms underlying selective synapse formation of vertebrate retinal photoreceptor cells. *Cell. Mol. Life Sci.* 2020, 77, p. 1251–1266, <https://doi.org/10.1007/s00018-019-03324-w>.
4. Graham H.K., Duan X. Molecular mechanisms regulating synaptic specificity and retinal circuit formation. *Wiley Interdiscip Rev. Dev. Biol.*, 2021, Jan; 10(1):e379. doi: 10.1002/wdev.379. Epub 2020 Apr 8. PMID: 32267095; PMCID: PMC7541429.
5. Jia Y., Lee S., Zhuo Y., Zhou Z.J. A retinal circuit for the suppressed-by-contrast receptive field of a polyaxonal amacrine cell. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 2020, Apr. 28; 117(17):9577-9583. doi: 10.1073/pnas.1913417117.
6. Zucker C.L., Bernstein P.S., Schalek R.L., Lichtman J.W., Dowling J.E. A connectomics approach to understanding a retinal disease. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 2020, Aug 4; 117(31):18780-18787. doi: 10.1073/pnas.2011532117. Epub 2020 Jul 22. PMID: 32699144; PMCID: PMC7414052.
7. Wool L.E., Packer O.S., Zaidi Q., Dacey D.M. Connectomic Identification and Three-Dimensional Color Tuning of S-OFF Midget Ganglion Cells in the Primate Retina. *J Neurosci.*, 2019, Oct 2; 39(40) : 7893-7909, doi: 10.1523/JNEUROSCI. 0778-19.2019. Epub 2019 Aug 12. PMID: 31405926.

**Алгебраическая биология, гештальт-генетика,  
наследственный и искусственный интеллект**

С.В. Петухов

Лаборатория биомеханических систем Института машиноведения РАН,  
<http://petoukhov.com/>

**Аннотация.** Представлены результаты анализа структурных особенностей молекулярной системы генетического кодирования. Выявлены закономерности ДНК-последовательностей нуклеотидов в геномах высших и низших организмов. Их обнаружение основано на представлении геномных ДНК-последовательностей в виде многослойных алгебраических структур и сравнительном анализе процентного содержания  $n$ -плетов в разных слоях. Описаны правила постоянства сумм процентов в специальных тетрагруппировках  $n$ -плетов в разных текстовых слоях геномной ДНК. Данные постоянства сумм реализуются при очень разных количествах и величинах слагаемых. Эти правила постоянства сумм процентов сопровождаются гиперболическими правилами взаимосвязи количеств в группировках  $n$ -плетов в разных слоях геномных ДНК-текстов. Обнаруженные правила являются кандидатами на роль универсальных геномных правил. В исследовании используется тензорное семейство матричных представлений ДНК-алфавитов для выявления алгебраических особенностей упомянутых правил. Отмечаются аналогии обнаруженных генетических явлений с явлениями гештальт психологии, что позволяет развивать идеи гештальт генетики. Представляемые результаты свидетельствуют: 1) живые организмы можно трактовать как квантово-информационные алгебро-гармонические сущности; 2) биоинформатика базируется на вероятностных методах многослойного кодирования и обработки информации.

**Ключевые слова:** ДНК алфавиты, бинарные оппозиции, геномы, многослойные тексты, вероятности, тетрагруппировки, гештальт, матрицы, тензорное произведение, гиперболические числа, проекторы, матричная генетика, алгебраическая и квантовая биология, интеллект.

**Содержание**

1. Введение.
2. Бинарные-оппозиции в алфавитах ДНК и матрицы.
3. Гештальт правила процентного состава композитных ДНК-текстов геномов, связанные с  $m$ -позиционными тетрагруппировками  $n$ -плетов.
4. О гештальт-генетике и наследуемых феноменах гештальт-биологии.
5. Геномные ДНК-тексты и квантовая информатика.
6. Матричные алгебры и матрицы  $m$ -позиционных тетрагруппировок.
7. Наклонные проекторы и проекторные тетрагруппировки  $n$ -плетов в слоях ДНК-текстов геномов.
8. Гиперболические правила количеств  $n$ -плетов в геномах и

гармоническая прогрессия.

9. О геометриях, физиологии и искусственном интеллекте.

10. Теория Фрёлиха о коллективных квантовых эффектах в биологических системах по аналогии с квантовым конденсатом Бозе-Эйнштейна.

Заключение

Выводы

Приложение I. Пример гештальт правил суммарных процентов  $n$ -плетов в бактериальном геноме.

Приложение II. О Инь-Ян схемах древнекитайской “Книги перемен” и 4-секционных мандалах в древних традициях.

## 1. Введение

Все живые организмы от рождения наделены способностями совершать действия интеллектуального характера. Например, паук плетет паутину с креплением ее концов к случайным опорам, птицы-ткачи ажурно сплетают гнезда сложной формы из сотен соломинок, пчелы строят соты (Рис. 1.1). Прimitивными интеллектуальными способностями обладают также организмы, лишенные нервных клеток. Например, впечатляющий пример опубликован в журнале Nature о способностях плесневых грибов творческим образом находить оптимальные пути в лабиринтах [Nakagaki, Yamada, Toth, 2000; Орен Гоберман, 2011]. При создании систем искусственного интеллекта следует подсматривать у живой природы алгоритмы и принципы генетического наследования таких способностей.



*Рис. 1.1. Примеры наследуемой способности к действиям интеллектуального характера у живых организмов: плетение паутины, плетение сложных гнезд птицами-ткачами и постройка сот пчелами.*

Существует фундаментальное отличие живых тел от неодушевленных, которое отмечали основоположники квантовой механики П.Йордан и (позже) Э.Шредингер: неодушевленные объекты управляются средним случайным движением их миллионов частиц и движение отдельных частиц не существенно для целого; напротив, в живом организме избранные – генетические - молекулы

обладают диктаторским влиянием на весь организм за счет квантового усиления (см. историю квантовой биологии в [McFadden, Al-Khalili, 2018]).

Соответственно, в данной статье автор сосредотачивает внимание на структурных особенностях алфавитов молекул наследственности ДНК и длинных последовательностей нуклеотидов (ДНК-текстах) в ДНК геномов высших и низших организмов. Эти последовательности нуклеотидов в одиночной нити ДНК представлены в открытом доступе в GenBank для каждого генома множества организмов в стандартном виде (Рис. 1.2), создающем впечатление хаотичного ДНК-текста из 4-х букв, занимающего в силу его длины тысячи страниц. Например, ДНК-текст первой хромосомы человека состоит примерно из 250 миллионов букв, что примерно равносильно тексту 100 романов «Война и мир» Л.Н.Толстого.

```
TCGTGACSTGAGGAGAАСТGTGCTCCGCTCAGAGTACCACCGAAATCTGTGCAGAGGACAACGCAGCTC
CGCCSTCGCGGTGCTCTCCGGGTCTGTGCTGAGGAGAACGCAACTCCGCCGTTGCAAAGGCGGCCGCGC
CGGCGCAGGGCGCAGAGAGGCGCGCCGCGCCGGCGCAGGGCGCAGAGAGGCGCGCCGCGCCGGCGCAGGGCGC
AGAGAGGGCGCGCCGCGCCGGCGCAGGGCGCAGAGAGGCGCGCCGCGCCGGCGCAGGGCGCAGAGAGGCGCGC
CGCGCCGGCGCAGGGCGCAGACACATGCTAGCGGTCGGGGTGGAGGCGTGGCGCAGGGCGCAGAGAGGCGC
GCCCGCCGGCGCAGGGCGCAGACACATGCTACCGGTCAGGGGTGGAGGCGTGGCGCAGGGCGCAGAG
AGGCGCACCGCGCCGGCGCAGGGCGCAGAGACACATGCTAGCGGTCAGGGGTGGAGGCGTGGCGCAGGG
GCAGAGACGCAAGCCTACGGGCGGGGTTGGGGGGCGTGTGTTCAGGAGCAAGTCGCACGCGCCGG
GCTGGGGCGGGGAGGGTGGCGCGTGCACGCGCAGAACTCACGTCACGGTGGCGCGCGCAGAGACG
GGTAGAАСТCAGTAATCGAAAAGCCGGGATCGACCGCCCTTGCTTGCAGCCGGGCАСТACAGGACCC
GCTTGCTCACGGTGTGTGCCAGGGCGCCCCCTGCTGGCGACTAGGGCAACTGCAGGGCTCTCTTGCTTA
GAGTGGTGGCCAGCGCCCCCTGCTGGCGCCGGGGCACTGCAGGGCCCTCTTGCTTACTGTATAGTGGTGG
CACGCGCCCTGCTGGCAGCTAGGGACATTCAGGGTCCCTCTTGCTCAAGGTGTAGTGGCAGCACGCCAC
CTGCTGGCAGCTGGGGACACTGCCGGCCCTCTTGCTCCAACAGTACTGGCGGATTATAGGGAААССС
GGAGCАТАТGCTGTTTGGTCTCAGTAGACTCCTAAATATGGGATTCCTGGGTTTAAAGTAAАААТААА
ТАТGTTТААТТТGТААСТGATТАССАТCAGAAТGТАCTGTTCTGTATCCCACCAGCAATGTCTAGGAA
TGCSTGTTTCTCCАААGТGTTТАCTTTTGGATTTTТGCCAGTCTAACAGGTGAAGCCCTGGAGATTCT
ТАТTAGTGATTTGGGCTGGGCTGGCCATGTGТАТТТТТААТТТCАСТGATGATTTTGCTGCATG
CCGGTGTТGAGAATGACTGCGCAААТТТGCCGATTTCCSTTTGCTGTTCCTGCATGТАGTTТАААСGAG
АТТGCCAGCACCGGGТATCАТТCАCАТТТТТCTTTTCGTTAACTTGCCGTCAGCSTTTTCTTTGACSTC
TTCTTTCTGTTCATGTGТАТТGCTGTCTCTTAGCCCAGACTTCCCGTGTCTTTCCACCGGGCSTTTGA
```

*Рис. 1.2. Типичный вид фрагмента данных о геномных последовательностях нуклеотидов в одиночной нити ДНК из международного банка генетических данных GenBank*

Получаемые автором результаты анализа таких геномных текстов говорят об алгебраически закономерном характере ансамблей структур генетической системы и позволяют развивать алгебраическую и квантовую биологию. Выявляемые алгебраические особенности генетических структур представляются полезными для совершенствования систем искусственного интеллекта.

Следует отметить, что генетика и алгебраическая биология фактически начались с открытия Менделя в опытах по скрещиванию организмов того, что наследование их признаков происходит по алгебраическим правилам, несмотря на чудовищную сложность и разнообразие молекулярного состава тел. Эти алгебраические правила оказались связанными с понятием бинарной оппозиции доминантных и рецессивных факторов наследования, введенным Менделем.

## 2. Бинарные-оппозиции в алфавитах ДНК и матрицы

При всем поразительном многообразии живых организмов генетическая информация в них записывается единообразно в виде длинных текстов из четырех нуклеотидов (молекулярных букв.). В молекулах ДНК такими буквами выступают аденин А, цитозин С, гуанин G и тимин Т, образующие ДНК-алфавит нуклеотидов (в РНК вместо тимина участвует урацил U). ДНК-тексты иногда называют энциклопедией жизни. В двойной спирали ДНК нуклеотиды С и G всегда стоят напротив друг друга и потому называются комплементарной парой. То же самое относится к паре комплементарных нуклеотидов А и Т. При этом А и Т связаны двумя водородными связями, а С и G - тремя водородными связями (Рис. 2.1). В генетическом кодировании также принимают участие ДНК-алфавиты 16 дуплетов (типа АА, АТ, ..., GG), 64 триплетов (типа ААА, ААТ, ... ) и так далее.

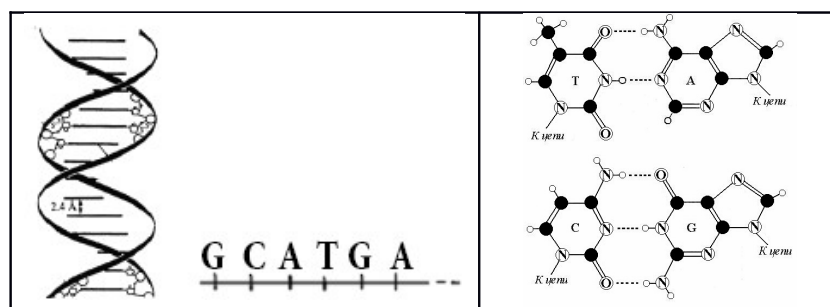


Рис. 2.1. Двойная спираль ДНК и комплементарные пары нуклеоснований А, Т, С и G в ней

Наука не знает, почему алфавит нуклеотидов ДНК состоит всего из этих четырех букв А, Т, С, G, но знает, что он является носителем симметрической системы бинарно-оппозиционных признаков (индикаторов):

1) два из этих нуклеотидов являются пуринами (А и G), имея в молекуле два кольца, а два другие (С и Т) – пиримидинами, имея одно кольцо. С позиций этих оппозиционных индикаторов  $C = T = 0, A = G = 1$ ;

2) два из этих нуклеотидов являются кето-молекулами (Т и G), а два другие (С и А) – амино-молекулами, что дает  $C = A = 0, T = G = 1$ .

При этом каждый из 4 нуклеотидов однозначно определяется названной парой бинарных индикаторов. Учитывая это, удобно представить ДНК-алфавиты 4 букв, 16 дуплетов и 64 триплетов в форме квадратных таблиц, столбцы которых нумеруются бинарными индикаторами “пиримидин или пурин” ( $C=T=0, A=G=1$ ), а строки – бинарными индикаторами “амино или кето” ( $C=A=0, T=G=1$ ). В таких таблицах все буквы, дуплеты и триплеты автоматически занимают свое строго индивидуальное место (Рис. 2.2).

	0	1
0	C	A
1	T	G

	00	01	10	11
00	CC	CA	AC	AA
01	CT	CG	AT	AG
10	TC	TA	GC	GA
11	TT	TG	GT	GG

	000	001	010	011	100	101	110	111
000	CCC	CCA	CAC	CAA	ACC	ACA	AAC	AAA
001	CCT	CCG	CAT	CAG	ACT	ACG	AAT	AAG
010	CTC	CTA	CGC	CGA	ATC	ATA	AGC	AGA
011	CTT	CTG	CGT	CGG	ATT	ATG	AGT	AGG
100	TCC	TCA	TAC	TAA	GCC	GCA	GAC	GAA
101	TCT	TCG	TAT	TAG	GCT	GCG	GAT	GAG
110	TTC	TTA	TGC	TGA	GTC	GTA	GGC	GGA
111	TTT	TTG	TGT	TGG	GTT	GTG	GGT	GGG

*Рис. 2.2. Расположение ДНК-алфавитов 4 нуклеотидов, 16 дуплетов и 64 триплетов в таблицах, построенных на учете бинарно-оппозиционных молекулярных признаков в алфавите нуклеотидов C, A, T, G.*

Данные 3 таблицы являются не просто таблицами, но они являются начальными членами единого тензорного семейства матриц  $[C, A; T, G]^{(n)}$ , где символ  $(n)$  обозначает тензорную степень и  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ . Вторая и третья тензорная (кронекеровская) степень  $(2 \times 2)$ -матрицы  $[C, A; T, G]$  автоматически дают эту  $(4 \times 4)$ -матрицу алфавита 16 дуплетов и эту  $(8 \times 8)$ -матрицу алфавита 64 триплетов на Рис. 2.2. Тензорное произведение матриц играет важную роль в квантовой информатике и квантовой механике многокомпонентных систем: пространство состояния многокомпонентной системы является тензорным произведением пространств состояний ее компонент.

Кратко напомним здесь о пионерской статье [Конопельченко, Румер, 1975], где впервые алфавит 4 нуклеотидов ДНК представлен в виде  $(2 \times 2)$ -матрицы, которая без каких-либо пояснений возведена во вторую тензорную (кронекеровскую) степень. Это было сделано для получения  $(4 \times 4)$ -матрицы 16 дуплетов в целях анализа симметрий в отношениях вырожденности генетического кода, исходя из общего положения о важности исследования симметрий в природных системах. Данная 4-страничная статья обосновала целесообразность выделения в триплете двух первых букв («корня кодона») и ввела понятие «сильных» и «слабых» корней кодонов для демонстрации упорядоченности генетического кода. В этой статье не затрагивался тот факт, что алфавит 4 нуклеотидов наделен системой бинарно-оппозиционных признаков, учет которых ведет к алгоритмическому построению многочисленного тензорного семейства матриц (Рис. 2.2) без необходимости волевого введения исследователем операции тензорного произведения в анализ генетических структур. Данная статья явилась первой публикацией по матричной генетике. Она оставалась без продолжения и должной оценки в течение более чем четверти века, о чем можно только сожалеть. Вместе с нашими публикациями она свидетельствует о приоритете и ведущем положении отечественной науки в перспективной области алгебраической биологии – матричной генетике. Важная роль и отличительные особенности данной статьи описаны в специальном параграфе книги [Петухов, 2008, с. 134-136].

64 триплета кодируют 20 наследуемых аминокислот, из которых состоят белки живых тел, а также стоп-сигналы белкового синтеза (стоп-кодона). Как же в этой матрице 64 триплетов (Рис. 2.2) расположены кодируемые ими 20 аминокислот и стоп-сигналы белкового синтеза? Это расположение нельзя предсказать, поскольку аминокислоты и нуклеотиды А, С, G, Т совершенно различны по строению. Число вариантов расположения аминокислот с их какими-то повторениями для заполнения всей (8\*8)-матрицы необозримо:  $\gg 10^{100}$  (для сравнения в физике время существования Вселенной оценивается в  $10^{17}$  секунд). Будет ли это расположение аминокислот хаотичным или вдруг окажется закономерно симметричным?

Оказывается, что из океана возможностей природа выбрала алгебраически закономерный вариант повторения и расположения аминокислот и стоп-сигналов в этой матрице 64 триплетов, показанный на Рис. 2.3 для случая генетического кода митохондрий позвоночных (этот диалект генетического кода считается наиболее симметричным и древним [Франк-Каменецкий, 1988]); в теории симметрии принято начинать анализ с симметричных паттернов, переходя затем к изучению случаев нарушения их симметрий). Показанная матрица кодируемых аминокислот и стоп-сигналов состоит из пар соседних строк 1-2, 3-4, 5-6, 7-8, идентичных по составу аминокислот и стоп-кодонов.

CCC	CCA	CAC	CAA	ACC	ACA	AAC	AAA
Pro	Pro	His	Gln	Thr	Thr	Asn	Lys
CCT	CCG	CAT	CAG	ACT	ACG	AAT	AAG
Pro	Pro	His	Gln	Thr	Thr	Asn	Lys
CTC	CTA	CGC	CGA	ATC	ATA	AGC	AGA
Leu	Leu	Arg	Arg	Ile	Met	Ser	Stop
CTT	CTG	CGT	CGG	ATT	ATG	AGT	AGG
Leu	Leu	Arg	Arg	Ile	Met	Ser	Stop
TCC	TCA	TAC	TAA	GCC	GCA	GAC	GAA
Ser	Ser	Tyr	Stop	Ala	Ala	Asp	Glu
TCT	TCG	TAT	TAG	GCT	GCG	GAT	GAG
Ser	Ser	Tyr	Stop	Ala	Ala	Asp	Glu
TTC	TTA	TGC	TGA	GTC	GTA	GGC	GGA
Phe	Leu	Cys	Trp	Val	Val	Gly	Gly
TTT	TTG	TGT	TGG	GTT	GTG	GGT	GGG
Phe	Leu	Cys	Trp	Val	Val	Gly	Gly

Рис. 2.3. Симметричное расположение 20 аминокислот и стоп-кодонов в матрице кодирующих 64 триплетов. Показан случай генетического кода митохондрий позвоночных. Используются общепринятые краткие обозначения этих аминокислот и стоп-кодонов (Stop). Одинаковым цветом выделены строки 1-2, 3-4, 5-6 и 7-8, идентичные по составу аминокислот и стоп-кодонов

Эта закономерная связь кодируемых аминокислот и стоп-кодонов с тензорным семейством ДНК-алфавитов  $n$ -плетов является одним из свидетельств глубокой связи информационной системы генетического кодирования с формализмами квантовой информатики.



### 3. Гештальт правила процентного состава композитных ДНК-текстов геномов, связанные с $n$ -позиционными тетрагруппировками $n$ -плетов

Будем исследовать каждый геномный ДНК-текст как композитный, многослойный текст, в котором каждый  $n$ -й слой является последовательностью  $n$ -плетов. Например, в тексте АССТГТААСГ... первый слой является последовательностью членов алфавита 4 нуклеотидов (А-С-С-Т-Г-...), второй – последовательностью членов алфавита 16 дуплетов (АС-СТ-ГТ-АА-СГ-...), третий – последовательностью членов алфавита 64 триплетов (АСС-ТГТ-ААС-..) и т.д. Тем самым, текст каждого такого слоя написан в своем собственном алфавите, но все  $n$ -плетные алфавиты слоев тензорно взаимосвязаны через тензорное семейство матриц на Рис. 2.2. В каждом  $n$ -м слое будем подсчитывать проценты каждого из  $4^n$  видов  $n$ -плетов и изучать взаимосвязи между ними. Этот авторский подход к анализу ДНК-текста как набора параллельных текстов обнаруживает важные алгебраические закономерности в генетической информатике высших и низших организмов.

Начнем с ДНК-текста хромосомы человека №1, содержащего около 250 миллионов букв С, G, A, T (исходные данные взяты из GenBank: [https://www.ncbi.nlm.nih.gov/nucore/NC\\_000001.11](https://www.ncbi.nlm.nih.gov/nucore/NC_000001.11) ). Сначала подсчитаем в его первом слое проценты каждого из 4-х видов нуклеотидов С, G, A, T. Получаем %С ≈ 0.2085 , %G ≈ 0.2089, %А ≈ 0.2910, %Т ≈ 0.2917. Подстановка этих процентов в соответствующие ячейки описанной матрицы нуклеотидов из Рис. 2.2 дает числовую матрицу на Рис. 3.1.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \text{C} & \text{A} \\ \hline \text{T} & \text{G} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \%C & \%A \\ \hline \%T & \%G \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0.2085 & 0.2910 \\ \hline 0.2918 & 0.2087 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 3.1. Процентный состав первого – нуклеотидного - слоя ДНК-текста хромосомы человека №1

Затем в его втором - дуплетном – слое подсчитаем проценты каждого из 16 дуплетов и вставим их в соответствующие ячейки матрицы 16 дуплетов [С, А; Т, G]<sup>(2)</sup> названного тензорного семейства (Рис. 3.2).

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \%CC & \%CA & \%AC & \%AA \\ \hline \%CT & \%CG & \%AT & \%AG \\ \hline \%TC & \%TA & \%GC & \%GA \\ \hline \%TT & \%TG & \%GT & \%GG \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0.05409 & 0.07274 & 0.05033 & 0.09504 \\ \hline 0.07134 & 0.01031 & 0.07429 & 0.07137 \\ \hline 0.06008 & 0.06312 & 0.04402 & 0.06008 \\ \hline 0.09568 & 0.07286 & 0.05046 & 0.05419 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 3.2. Процентный состав второго – дуплетного - слоя ДНК-текста хромосомы человека №1

Рис. 3.3 показывает подсчитанные проценты каждого из 64 триплетов и 256 тетраплетов соответственно в третьем (триплетном) и четвертом (тетраплетном) слоях того же ДНК-текста.

0.0138	0.0188	0.0152	0.0186	0.0118	0.0198	0.0145	0.0369
0.0185	0.0029	0.0179	0.0210	0.0162	0.0025	0.0238	0.0199
0.0176	0.0127	0.0025	0.0023	0.0132	0.0194	0.0144	0.0224
0.0201	0.0209	0.0026	0.0029	0.0239	0.0178	0.0161	0.0185
0.0159	0.0196	0.0110	0.0199	0.0125	0.0146	0.0096	0.0196
0.0223	0.0023	0.0194	0.0128	0.0144	0.0025	0.0133	0.0176
0.0197	0.0198	0.0146	0.0195	0.0096	0.0112	0.0126	0.0160
0.0372	0.0188	0.0199	0.0190	0.0145	0.0153	0.0119	0.0138

.0033	.0055	.0042	.0044	.0040	.0056	.0032	.0070	.0030	.0042	.0040	.0053	.0032	.0059	.0055	.0149
.0041	.0010	.0044	.0058	.0047	.0010	.0040	.0044	.0041	.0005	.0051	.0054	.0047	.0006	.0095	.0071
.0050	.0029	.0008	.0006	.0036	.0039	.0049	.0059	.0037	.0032	.0006	.0006	.0040	.0070	.0037	.0066
.0048	.0058	.0006	.0009	.0057	.0047	.0045	.0058	.0049	.0044	.0007	.0007	.0071	.0057	.0049	.0047
.0052	.0057	.0027	.0038	.0010	.0006	.0003	.0006	.0033	.0045	.0032	.0063	.0042	.0049	.0039	.0078
.0058	.0009	.0035	.0028	.0007	.0003	.0005	.0008	.0049	.0005	.0064	.0035	.0046	.0007	.0049	.0059
.0048	.0036	.0046	.0051	.0005	.0004	.0008	.0006	.0047	.0056	.0033	.0050	.0031	.0037	.0047	.0057
.0073	.0044	.0053	.0058	.0006	.0010	.0005	.0010	.0096	.0040	.0051	.0044	.0046	.0047	.0040	.0041
.0046	.0049	.0042	.0051	.0024	.0045	.0028	.0078	.0030	.0041	.0029	.0038	.0023	.0037	.0029	.0073
.0057	.0006	.0051	.0052	.0037	.0004	.0056	.0036	.0047	.0008	.0033	.0046	.0030	.0005	.0046	.0048
.0057	.0040	.0005	.0006	.0030	.0055	.0026	.0041	.0032	.0027	.0006	.0005	.0025	.0031	.0032	.0057
.0068	.0058	.0006	.0006	.0070	.0039	.0032	.0029	.0037	.0048	.0006	.0008	.0041	.0036	.0036	.0051
.0051	.0063	.0034	.0063	.0041	.0049	.0031	.0061	.0023	.0031	.0017	.0035	.0031	.0042	.0023	.0052
.0077	.0006	.0063	.0038	.0049	.0006	.0045	.0057	.0038	.0004	.0032	.0027	.0042	.0010	.0034	.0052
.0073	.0078	.0038	.0051	.0037	.0046	.0042	.0051	.0030	.0028	.0029	.0042	.0023	.0024	.0030	.0046
.0150	.0072	.0055	.0045	.0059	.0057	.0043	.0054	.0055	.0032	.0040	.0042	.0032	.0039	.0030	.0033

Рис. 3.3. Проценты каждого из 64 триплетов и 256 тетраплетов соответственно в третьем (триплетном) и четвертом (тетраплетном) слоях ДНК-текста хромосомы человека №1

На первый взгляд, показанные множества процентов в каждом слое этого ДНК-текста вполне хаотичны. При этом процент n-плетов во всех слоях зависит от очередности букв. Например, процент дуплетов CG и GC одинакового буквенного состава отличается в несколько раз: %CG = 0.0103, а %GC = 0.0440 (Рис. 3.2). Отметим также, что тензорные степени матрицы процентов нуклеотидов  $[\%C, \%A; \%T, \%G]^{(n)} = [0.2085, 0.2910; 0.2918, 0.2087]^{(n)}$  дают такие формальные проценты n-плетов, которые совершенно не совпадают с реальными процентами n-плетов в n-плетных слоях данного ДНК-текста.

Но неожиданно автором обнаружены тетраблочные закономерности в этих множествах процентов дуплетов, триплетов, тетраплетов, и т.д. в слоях геномных ДНК-текстов. Будем исследовать в каждом слое ДНК-текста суммы процентов n-плетов, принадлежащих к определенным группировкам. Введем обозначения для этих сумм:

- сумму процентов всех 4 дуплетов в дуплетном слое, начинающихся с буквы C, обозначим  $\Sigma\%CN = \%CC + \%CA + \%CT + \%CG$  (N - любая из букв C, A,

T, G);

- сумму процентов всех 4 дуплетов, имеющих букву С на второй позиции, обозначим  $\Sigma\%NC = \%CC + \%AC + \%TC + \%GC$ ;

- суммы процентов в триплетном слое всех 16 триплетов, содержащих букву С на первой, второй и третьей позициях обозначим соответственно символами  $\Sigma\%CNN$ ,  $\Sigma\%NCN$  и  $\Sigma\%NNC$ ;

- суммы процентов всех 64 тетраплетов с буквой С на первой, второй, третьей и четвертой позициях обозначим соответственно  $\Sigma\%CNNN$ ,  $\Sigma\%NCNN$ ,  $\Sigma\%NNCN$  и  $\Sigma\%NNNC$ .

Посчитывая такие суммы процентов, получаем удивительную таблицу их взаимосвязи и симметрии (Рис. 3.4).

$\%C \approx 0.2085$	$\%G \approx 0.2087$	$\%A \approx 0.2910$	$\%T \approx 0.2918$
$\Sigma\%CN \approx 0.2085$	$\Sigma\%GN \approx 0.2088$	$\Sigma\%AN \approx 0.2910$	$\Sigma\%TN \approx 0.2917$
$\Sigma\%NC \approx 0.2085$	$\Sigma\%NG \approx 0.2087$	$\Sigma\%NA \approx 0.2910$	$\Sigma\%NT \approx 0.2918$
$\Sigma\%CNN \approx 0.2084$	$\Sigma\%GNN \approx 0.2088$	$\Sigma\%ANN \approx 0.2910$	$\Sigma\%TNN \approx 0.2917$
$\Sigma\%NCN \approx 0.2085$	$\Sigma\%NGN \approx 0.2088$	$\Sigma\%NAN \approx 0.2910$	$\Sigma\%NTN \approx 0.2917$
$\Sigma\%NNC \approx 0.2085$	$\Sigma\%NNG \approx 0.2087$	$\Sigma\%NNA \approx 0.2910$	$\Sigma\%NNT \approx 0.2918$
$\Sigma\%CNNN \approx 0.2085$	$\Sigma\%GNNN \approx 0.2088$	$\Sigma\%ANNN \approx 0.2910$	$\Sigma\%TNNN \approx 0.2917$
$\Sigma\%NCNN \approx 0.2085$	$\Sigma\%NGNN \approx 0.2087$	$\Sigma\%NANN \approx 0.2910$	$\Sigma\%NTNN \approx 0.2918$
$\Sigma\%NNCN \approx 0.2085$	$\Sigma\%NNGN \approx 0.2088$	$\Sigma\%NNAN \approx 0.2910$	$\Sigma\%NNTN \approx 0.2918$
$\Sigma\%NNNC \approx 0.2085$	$\Sigma\%NNNG \approx 0.2087$	$\Sigma\%NNNA \approx 0.2910$	$\Sigma\%NNNT \approx 0.2918$

Рис. 3.4. Взаимосвязь величин сумм процентов в  $m$ -позиционных тетра-группировках  $n$ -плетов из разных  $n$ -плетных слоев ДНК-текста хромосомы человека №1

В каждом из 4-х столбцов, связанном с одним из нуклеотидов С, G, А или Т, одно и то же суммарное число процентов повторяется во всех его строках и оно равно проценту этого нуклеотида  $\%C$ ,  $\%G$ ,  $\%A$ ,  $\%T$  с точностью до третьего или четвертого знака после запятой (Рис. 3.4). Зная процент нуклеотида в геномной ДНК, можно с высокой точностью предсказать суммы процентов 4 дуплетов, 16 триплетов, 64 тетраплетов с этим нуклеотидом на фиксированных позициях в дуплетном, триплетном и тетраплетном слоях ДНК-текста.

Это относительное постоянство сумм процентов мы называем гештальт-правилом процентов в геномах (для указанных тетрагруппировок  $n$ -плетов):

- ◆ Все  $n$  слоев длинного ДНК-текста, каждый из которых состоит из последовательности  $4^n$  видов  $n$ -плетов, имеют примерно одинаковую сумму процентов всех тех  $n$ -плетов, которые содержат определяющий нуклеотид (С, G, А или Т) в фиксированной позиции  $m$  ( $m \leq n$ ).

Здесь  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  много меньше длины геномного текста.

В разных геномах проценты нуклеотидов  $\%C$ ,  $\%G$ ,  $\%A$ ,  $\%T$ , которые определяют величины сумм процентов в тетрагруппировках  $n$ -плетов, могут сильно различаться. Но это гештальт-правило взаимозависимости сумм

процентов  $n$ -плетов в  $n$ -плетных слоях геномных ДНК-текстов неизменно повторяется на всех протестированных автором геномах высших и низших организмов.

Это Гештальт-правило сумм процентов можно переформулировать в виде геномного принципа запрета:

- ◆ сумма процентов всех тех  $n$ -плетов, которые содержат атрибутивный нуклеотид (С, G, А или Т) на фиксированной позиции  $m$  ( $m \leq n$ ), не могут быть существенно различными в разных  $n$ -плетных слоях геномного ДНК-текста (здесь  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ , но много меньше длины ДНК-текста).

Каждая из 16 строк 4 столбцов (Рис. 3.4), отражающих феноменологическое гештальт правило сумм процентов в геномах, представляет в соответствующем слое геномного ДНК-текста определенную  $m$ -позиционную тетрагруппировку  $n$ -плетов, то есть  $n$ -плетов, в которых атрибутивный нуклеотид стоит на позиции  $m$  ( $m \leq n$ ). Принимая во внимание принадлежность каждого  $n$ -плета к одному из четырех столбцов, то есть к одной из четырех С-, G-, А- и Т-группировок, введем для наглядности следующие символные обозначения для каждого из  $n$ -плетов:

- $n$ -плеты первого столбца (С-столбца) обозначим символом ♠;
- $n$ -плеты второго столбца (G-столбца) - символом ♣;
- $n$ -плеты третьего столбца (А-столбца) - символом ♥;
- $n$ -плеты четвертого столбца (Т-столбца) – символом ♦

Тогда данное гештальт-правило для этих тетрагруппировок  $n$ -плетов геномов выражается так:

$$\Sigma\% \spadesuit \approx \text{const}, \Sigma\% \clubsuit \approx \text{const}, \Sigma\% \heartsuit \approx \text{const}, \Sigma\% \diamond \approx \text{const} \quad (3.1)$$

При этом в одиночной нити ДНК выполняются примерные равенства  $\Sigma\% \spadesuit \approx \Sigma\% \clubsuit$  и  $\Sigma\% \heartsuit \approx \Sigma\% \diamond$  (в двойной спирали ДНК данные два равенства выполняются точно). В следующих разделах статьи эти карточные символы будут использованы для наглядной демонстрации алгебраически закономерного расположения членов данных тетрагруппировок в матрицах тензорного семейства  $[C, A; T, G]^{(n)}$ .

Если в ДНК-текстах геномов брать только каждую  $k$ -ю букву ( $k = 2, 3, \dots, 10, \dots, 50, \dots$ ), то образуются новые укороченные ДНК-тексты с новыми очередностями букв А, Т, С, G (Рис. 3.5). Оказывается, что для каждого такого нового текста, называемого эпи-цепью ДНК порядка  $k$ , проценты отдельных  $n$ -плетов различны, но суммы процентов в тетрагруппировках исходной ДНК и ее эпи-цепей аналогичны [Petoukhov, 2021a]. Это свидетельствует о фракталоподобном строении длинных ДНК-текстов.

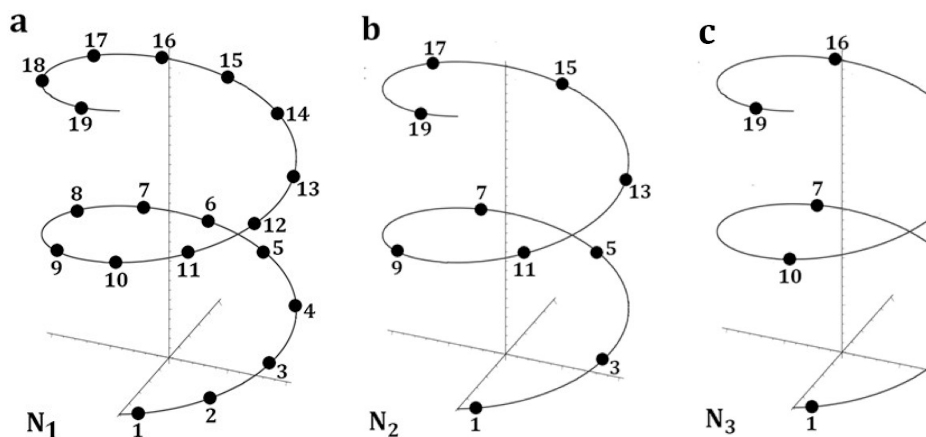


Рис. 3.5. Схематическое изображение одиночной нити ДНК и ее начальных эпи-цепей с нумерованными нуклеотидами, обозначенными черными кружками. а, последовательность  $N_1$  нумерованных нуклеотидов в нити ДНК; б, эпи-цепь второго порядка  $N_2$ , содержащая нуклеотиды с номерами 1-3-5-7-...; с, эпи-цепь третьего порядка  $N_3$  нуклеотидов с номерами 1-4-7-10-... .

Например, для ДНК-текстов хромосомы человека №1 и ее эпи-цепей при разрезании  $k = 2, 3, 4$  имеем в их последовательностях дуплетов различные проценты 16 дуплетов (Рис. 3.6). Но суммы процентов в тетрагруппировках дуплетов во всех этих разных текстах равны соответственно  $\%C \approx 0.2085$ ,  $\%G \approx 0.2087$ ,  $\%A \approx 0.2910$ ,  $\%T \approx 0.2918$  с убедительной точностью независимо от различия процентов отдельных дуплетов.

Исходная ДНК первой хромосомы человека:

%CC	%CA	%AC	%AA	0.05409	0.07274	0.05033	0.09504
%CT	%CG	%AT	%AG	0.07134	0.01031	0.07429	0.07137
%TC	%TA	%GC	%GA	0.06008	0.06312	0.04402	0.06008
%TT	%TG	%GT	%GG	0.09568	0.07286	0.05046	0.05419

~

Эпи-цепь при $k = 2$				Эпи-цепь при $k = 3$				Эпи-цепь при $k = 4$			
0.0492	0.0524	0.0538	0.0985	0.0487	0.0562	0.0579	0.0912	0.0487	0.0558	0.0574	0.0940
0.0591	0.0478	0.0800	0.0588	0.0571	0.0464	0.0849	0.0570	0.0566	0.0475	0.0831	0.0565
0.0612	0.0788	0.0443	0.0613	0.0608	0.0826	0.0411	0.061	0.0579	0.0835	0.0445	0.0579
0.0988	0.0530	0.0539	0.0492	0.0918	0.0565	0.0578	0.0489	0.0943	0.0561	0.0577	0.0487

Рис. 3.6. Проценты 16 дуплетов в ДНК хромосомы человека №1 и в ее эпицепях при разрезании  $k = 2, 3, 4$ .

Например,  $\%CG = 0.0103$  в исходной полной нити ДНК; в ее эпи-цепи второго порядка  $\%CG = 0.0478$ ; в эпи-цепи третьего порядка  $\%CG = 0.0464$ ; в эпи-цепи четвертого порядка  $\%CG = 0.0475$ . Но в каждой из четырех представленных процентных матриц реализуются равенства сумм процентов, которые удобно представить как равенство координат 4-мерного вектора:

$$[\%A, \%T, \%C, \%G] \approx [\sum \%AN, \sum \%TN, \sum \%CN, \sum \%GN] \approx$$

$$[\Sigma\%NA, \Sigma\%NT, \Sigma\%NC, \Sigma\%NG] \approx [0.2910, 0.2918, 0.2085, 0.2087] \quad (3.2)$$

Для сравнительного анализа ситуации с процентами вернемся к тензорному семейству матриц  $[C, A; T, G]^{(n)}$  (Рис. 2.2) и рассмотрим формальные (или модельные) проценты  $n$ -плетов в тензорном семействе процентных матриц  $[\%C, \%A; \%T, \%G]^{(n)} \approx [0,2085, 0,2910; 0,2917, 0,2089]^{(n)}$ . Рис. 3.7 и 3.8 показывают полученные матрицы для дуплетов и триплетов, величины процентов в которых существенно отличаются от реальных процентов  $n$ -плетов, показанных выше на рис. 3.2 и 3.3.

Но неожиданно гештальт-правило постоянства сумм процентов выполняется не только для реальных процентов, но также для этих модельных процентов  $n$ -плетов:

$$\begin{aligned} [\%A, \%T, \%C, \%G] &\approx [\Sigma\%AN, \Sigma\%TN, \Sigma\%CN, \Sigma\%GN] \approx \\ &[\Sigma\%NA, \Sigma\%NT, \Sigma\%NC, \Sigma\%NG] \approx \\ &[\Sigma\%ANN, \Sigma\%TNN, \Sigma\%CNN, \Sigma\%GNN] \approx \\ &[\Sigma\%NAN, \Sigma\%NTN, \Sigma\%NCN, \Sigma\%NGN] \approx \\ &[\Sigma\%NNA, \Sigma\%NNT, \Sigma\%NNC, \Sigma\%NNG] \approx \\ &[0.2910, 0.2918, 0.2085, 0.2087]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

%CC	%CA	%AC	%AA		0.0435	0.0607	0.0607	0.0847
%CT	%CG	%AT	%AG		0.0608	0.0435	0.0849	0.0607
%TC	%TA	%GC	%GA		0.0608	0.0849	0.0435	0.0607
%TT	%TG	%GT	%GG		0.0851	0.0609	0.0609	0.0436

*Рис. 3.7. Формальные (или модельные) проценты 16 дуплетов в матрице, являющейся второй тензорной степенью матрицы  $[0.2085, 0.2910; 0.2917, 0.2089]$  процентов нуклеотидов в ДНК-тексте хромосомы человека №1. Все величины округлены до четвертого знака после запятой.*

%CCC	%CCA	%CAC	%CAA	%ACC	%ACA	%AAC	%AAA	
%CCT	%CCG	%CAT	%CAG	%ACT	%ACG	%AAT	%AAG	
%CTC	%CTA	%CGC	%CGA	%ATC	%ATA	%AGC	%AGA	
%CTT	%CTG	%CGT	%CGG	%ATT	%ATG	%AGT	%AGG	
%TCC	%TCA	%TAC	%TAA	%GCC	%GCA	%GAC	%GAA	
%TCT	%TCG	%TAT	%TAG	%GCT	%GCG	%GAT	%GAG	
%TTC	%TTA	%TGC	%TGA	%GTC	%GTA	%GGC	%GGA	
%TTT	%TTG	%TGT	%TGG	%GTT	%GTG	%GGT	%GGG	

.00906382	.01265035	.01265035	.01765605	.01265035	.01765605	.01765605	.02464250
.01268315	.00907448	.01770183	.01266522	.01770183	.01266522	.02470639	.01767681
.01268315	.01770183	.00907448	.01266522	.01770183	.02470639	.01266522	.01767681
.01774773	.01269806	.01269806	.00908514	.02477045	.01772264	.01772264	.01268011
.01268315	.01770183	.01770183	.02470639	.00907448	.01266522	.01266522	.01767681
.01774773	.01269806	.02477045	.01772264	.01269806	.00908514	.01772264	.01268011
.01774773	.02477045	.01269806	.01772264	.01269806	.01772264	.00908514	.01268011
.02483467	.01776859	.01776859	.01271298	.01776859	.01271298	.01271298	.00909582

Рис. 3.8. Формальные (или модельные) проценты 64 триплетов в матрице, являющейся третьей тензорной степенью матрицы  $[0.2085, 0.2910; 0.2917, 0.2089]$  процентов нуклеотидов в ДНК-тексте хромосомы человека №1.

Следует особенно отметить, что в случае тензорного семейства процентных матриц  $[\%C, \%A; \%T, \%G]^{(n)}$  Гештальт правило выполняется с абсолютной точностью. Например, если  $\%A = 0.291001313$ ,  $\%T = 0.291755765$ ,  $\%C = 0.208498924$ ,  $\%G = 0.208743998$ , то мы имеем точные равенства рассматриваемых сумм процентов:

$$\begin{aligned}
 &[\%A, \%T, \%C, \%G] = [\sum \%AN, \sum \%TN, \sum \%CN, \sum \%GN] = \\
 &[\sum \%NA, \sum \%NT, \sum \%NC, \sum \%NG] = \\
 &[\sum \%ANN, \sum \%TNN, \sum \%CNN, \sum \%GNN] = \\
 &[\sum \%NAN, \sum \%NTN, \sum \%NCN, \sum \%NGN] = \\
 &[\sum \%NNA, \sum \%NNT, \sum \%NNC, \sum \%NNG] = \\
 &[\sum \%ANNN, \sum \%TNNN, \sum \%CNNN, \sum \%GNNN] = \\
 &[\sum \%NANN, \sum \%NTNN, \sum \%NCNN, \sum \%NGNN] = \\
 &[\sum \%NNAN, \sum \%NNTN, \sum \%NNCN, \sum \%NNGN] = \\
 &[\sum \%NNNA, \sum \%NNNT, \sum \%NNNC, \sum \%NNNG] = \\
 &[0.291001313, 0.291755765, 0.208498924, 0.208743998]. \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

Это свидетельствует о том, что фундаментальные генетические явления, отраженные в сформулированном правиле гештальта, связаны с алгебраической операцией тензорного произведения, которая так важна в квантовой механике и квантовой информатике. Соответственно, тензорное семейство процентных матриц  $[\%C, \%A; \%T, \%G]^{(n)}$  и их процентное содержание можно рассматривать в каждом конкретном случае как некий эталон сравнения при анализе длинных ДНК-текстов. Ниже мы покажем, что разница между тетрагруппировками реальных процентов и эталонных процентов связана с унитарными операторами. Процентные значения  $n$ -плетов в тензорном семействе матриц  $[\%C, \%A; \%T, \%G]^{(n)}$  условно назовем эталонными процентами  $n$ -плетов в анализируемом длинном ДНК-тексте.

Кратко упомянем еще о следующем. Выше были представлены правила многослойных ДНК-текстов геномов, связанные с постоянством сумм процентов  $n$ -плетов в различных  $m$ -позиционных тетрагруппировках, то есть

группировках, в которых роль атрибутивного элемента группировки выполнял один из 4 нуклеотидов С, G, A, T. Оказывается, что аналогичные геномные гештальты правила выполняются для тетрагруппировок, в которых роль атрибутивного элемента группировки n-плетов выполняет один из 16 дуплетов, или один из 64 триплетов, и т.д. (mm-, mmm-тетрагруппировки). В этом случае мы имеем 16 тетрагруппировок типа СА-тетрагруппировка, 64 тетрагруппировки типа САТ-тетрагруппировка, и т.д. (см. подробности в препринте [Petoukhov, 2021a]).

Например, для хромосомы человека №1 имеем постоянства сумм процентов для всех 16 mm-тетрагруппировок n-плетов, показанные на Рис. 3.8.

$\%AA \approx \Sigma\%AAN \approx \Sigma\%NAA \approx \Sigma\%AANN \approx \Sigma\%NAAN \approx \Sigma\%NNA \approx 0.095$
$\%AT \approx \Sigma\%ATN \approx \Sigma\%NAT \approx \Sigma\%ATNN \approx \Sigma\%NATN \approx \Sigma\%NNAT \approx 0.074$
$\%AC \approx \Sigma\%ACN \approx \Sigma\%NAC \approx \Sigma\%ACNN \approx \Sigma\%NACN \approx \Sigma\%NNAC \approx 0.050$
$\%AG \approx \Sigma\%AGN \approx \Sigma\%NAG \approx \Sigma\%AGNN \approx \Sigma\%NAGN \approx \Sigma\%NNAG \approx 0.071$
$\%TA \approx \Sigma\%TAN \approx \Sigma\%NTA \approx \Sigma\%TANN \approx \Sigma\%NTAN \approx \Sigma\%NNTA \approx 0.063$
$\%TT \approx \Sigma\%TTN \approx \Sigma\%NTT \approx \Sigma\%TTNN \approx \Sigma\%NTTN \approx \Sigma\%NNTT \approx 0.096$
$\%TC \approx \Sigma\%TCN \approx \Sigma\%NTC \approx \Sigma\%TCNN \approx \Sigma\%NTCN \approx \Sigma\%NNTC \approx 0.060$
$\%TG \approx \Sigma\%TGN \approx \Sigma\%NTG \approx \Sigma\%TGNN \approx \Sigma\%NTGN \approx \Sigma\%NNTG \approx 0.073$
$\%CA \approx \Sigma\%CAN \approx \Sigma\%NCA \approx \Sigma\%CANN \approx \Sigma\%NCAN \approx \Sigma\%NNCA \approx 0.073$
$\%CT \approx \Sigma\%CTN \approx \Sigma\%NCT \approx \Sigma\%CTNN \approx \Sigma\%NCTN \approx \Sigma\%NNCT \approx 0.071$
$\%CC \approx \Sigma\%CCN \approx \Sigma\%NCC \approx \Sigma\%CCNN \approx \Sigma\%NCCN \approx \Sigma\%NNCC \approx 0.054$
$\%CG \approx \Sigma\%CGN \approx \Sigma\%NCG \approx \Sigma\%CGNN \approx \Sigma\%NCGN \approx \Sigma\%NNCG \approx 0.010$
$\%GA \approx \Sigma\%GAN \approx \Sigma\%NGA \approx \Sigma\%GANN \approx \Sigma\%NGAN \approx \Sigma\%NNGA \approx 0.060$
$\%GT \approx \Sigma\%GTN \approx \Sigma\%NGT \approx \Sigma\%GTNN \approx \Sigma\%NGTN \approx \Sigma\%NNGT \approx 0.050$
$\%GC \approx \Sigma\%GCN \approx \Sigma\%NGC \approx \Sigma\%GCNN \approx \Sigma\%NGCN \approx \Sigma\%NNGC \approx 0.044$
$\%GG \approx \Sigma\%GGN \approx \Sigma\%NGG \approx \Sigma\%GGNN \approx \Sigma\%NGGN \approx \Sigma\%NNGG \approx 0.054$

*Рис. 3.8. Постоянство процентных сумм для mm-позиционных тетрагруппировок, относящихся к 64 триплетам и 256 тетраплетам в соответствующих триплетных и тетраплетных слоях ДНК-текста хромосомы человека №1. Каждая из этих тетрагруппировок определяется одним из 16 дуплетов в качестве атрибутивного позиционного элемента, расположенного в начале, в середине или в конце n-плетов. Численные значения процентных сумм рассчитаны на основе данных о процентах отдельных n-плетов на Рис. 3.2 и 3.3.*

Рис. 3.9 показывает другой пример: постоянство сумм процентов для всех 64 mmm-тетрагруппировок n-плетов той же ДНК.



%CCC ≈ Σ%CCCN ≈ Σ%NCCC ≈ 0.014	%GAA ≈ Σ%GAAN ≈ Σ%NGAA ≈ 0.020
%CCG ≈ Σ%CCGN ≈ Σ%NCCG ≈ 0.003	%GAT ≈ Σ%GATN ≈ Σ%NGAT ≈ 0.013
%CGC ≈ Σ%CGCN ≈ Σ%NCGC ≈ 0.003	%GTA ≈ Σ%GTAN ≈ Σ%NGTA ≈ 0.011
%CGG ≈ Σ%CGGN ≈ Σ%NCGG ≈ 0.003	%GTT ≈ Σ%GTTN ≈ Σ%NGTT ≈ 0.014
%GCC ≈ Σ%GCCN ≈ Σ%NGCC ≈ 0.013	%ACC ≈ Σ%ACCN ≈ Σ%NACC ≈ 0.012
%GCG ≈ Σ%GCGN ≈ Σ%NGCG ≈ 0.003	%ACG ≈ Σ%ACGN ≈ Σ%NACG ≈ 0.003
%GGC ≈ Σ%GGCN ≈ Σ%NGGC ≈ 0.013	%AGC ≈ Σ%AGCN ≈ Σ%NAGC ≈ 0.014
%GGG ≈ Σ%GGGN ≈ Σ%NGGG ≈ 0.014	%AGG ≈ Σ%AGGN ≈ Σ%NAGG ≈ 0.018
%CCA ≈ Σ%CCAN ≈ Σ%NCCA ≈ 0.019	%TCC ≈ Σ%TCCN ≈ Σ%NTCC ≈ 0.016
%CCT ≈ Σ%CCTN ≈ Σ%NCCT ≈ 0.019	%TCG ≈ Σ%TCGN ≈ Σ%NTCG ≈ 0.002
%CGA ≈ Σ%CGAN ≈ Σ%NCGA ≈ 0.002	%TGC ≈ Σ%TGCN ≈ Σ%NTGC ≈ 0.015
%CGT ≈ Σ%CGTN ≈ Σ%NCGT ≈ 0.003	%TGG ≈ Σ%TGGN ≈ Σ%NTGG ≈ 0.019
%GCA ≈ Σ%GCAN ≈ Σ%NGCA ≈ 0.015	%ACA ≈ Σ%ACAN ≈ Σ%NACA ≈ 0.020
%GCT ≈ Σ%GCTN ≈ Σ%NGCT ≈ 0.014	%ACT ≈ Σ%ACTN ≈ Σ%NACT ≈ 0.016
%GGA ≈ Σ%GGAN ≈ Σ%NGGA ≈ 0.016	%AGA ≈ Σ%AGAN ≈ Σ%NAGA ≈ 0.022
%GGT ≈ Σ%GGTN ≈ Σ%NGGT ≈ 0.012	%AGT ≈ Σ%AGTN ≈ Σ%NAGT ≈ 0.016
%CAC ≈ Σ%CACN ≈ Σ%NCAC ≈ 0.015	%TCA ≈ Σ%TCAN ≈ Σ%NTCA ≈ 0.020
%CAG ≈ Σ%CAGN ≈ Σ%NCAG ≈ 0.021	%TCT ≈ Σ%TCTN ≈ Σ%NTCT ≈ 0.022
%CTC ≈ Σ%CTCN ≈ Σ%NCTC ≈ 0.018	%TGA ≈ Σ%TGAN ≈ Σ%NTGA ≈ 0.019
%CTG ≈ Σ%CTGN ≈ Σ%NCTG ≈ 0.021	%TGT ≈ Σ%TGTN ≈ Σ%NTGT ≈ 0.020
%GAC ≈ Σ%GACN ≈ Σ%NGAC ≈ 0.010	%AAC ≈ Σ%AACN ≈ Σ%NAAC ≈ 0.014
%GAG ≈ Σ%GAGN ≈ Σ%NGAG ≈ 0.018	%AAG ≈ Σ%AAGN ≈ Σ%NAAG ≈ 0.020
%GTC ≈ Σ%GTCN ≈ Σ%NGTC ≈ 0.010	%ATC ≈ Σ%ATCN ≈ Σ%NATC ≈ 0.013
%GTG ≈ Σ%GTGN ≈ Σ%NGTG ≈ 0.015	%ATG ≈ Σ%ATGN ≈ Σ%NATG ≈ 0.018
%CAA ≈ Σ%CAAN ≈ Σ%NCAA ≈ 0.019	%TAC ≈ Σ%TACN ≈ Σ%NTAC ≈ 0.011
%CAT ≈ Σ%CATN ≈ Σ%NCAT ≈ 0.018	%TAG ≈ Σ%TAGN ≈ Σ%NTAG ≈ 0.013
%CTA ≈ Σ%CTAN ≈ Σ%NCTA ≈ 0.013	%TTC ≈ Σ%TTCN ≈ Σ%NTTC ≈ 0.020
%CTT ≈ Σ%CTTN ≈ Σ%NCTT ≈ 0.020	%TTG ≈ Σ%TTGN ≈ Σ%NTTG ≈ 0.019
%GAA ≈ Σ%GAAN ≈ Σ%NGAA ≈ 0.020	%AAA ≈ Σ%AAAN ≈ Σ%NAAA ≈ 0.037
%GAT ≈ Σ%GATN ≈ Σ%NGAT ≈ 0.013	%AAT ≈ Σ%AATN ≈ Σ%NAAT ≈ 0.024
%GTA ≈ Σ%GTAN ≈ Σ%NGTA ≈ 0.011	%ATA ≈ Σ%ATAN ≈ Σ%NATA ≈ 0.019
%GTT ≈ Σ%GTTN ≈ Σ%NGTT ≈ 0.014	%ATT ≈ Σ%ATTN ≈ Σ%NATT ≈ 0.024
	%TAA ≈ Σ%TAAN ≈ Σ%NTAA ≈ 0.020
	%TAT ≈ Σ%TATN ≈ Σ%NTAT ≈ 0.019
	%TTA ≈ Σ%TTAN ≈ Σ%NTTA ≈ 0.020
	%TTT ≈ Σ%TTTN ≈ Σ%NTTT ≈ 0.037

*Рис. 3.9. Постоянство процентных сумм для ттт-позиционных тетрагруппировок, относящихся к 256 тетраплетам в тетраплетном слое ДНК-текста хромосомы человека №1. Каждая из этих тетрагруппировок определяется одним из 64 триплетов в качестве атрибутивного позиционного элемента, расположенного в начале или конце тетраплетов.*

*Численные значения процентных сумм рассчитаны на основе данных о процентах отдельных триплетов и тетраплетов на Рис. 3.3*

Представленные данные о закономерном постоянстве сумм процентов  $n$ -плетов в  $mm$ - и  $mmm$ -тетрагруппировках являются частными примерами весьма общего принципа эстафетной (или волновой) гештальт связи вероятностей содержания  $n$ -плетов в соседних слоях длинных ДНК. Этот принцип заключается в количественном соответствии между каждым видом  $n$ -плетов  $P_n$  в  $n$ -м слое ДНК и теми двумя четверками  $(n+1)$ -плетов очередного  $(n+1)$ -го слоя, для которых он является атрибутивным элементом (то есть четверкой  $P_nC$ ,  $P_nG$ ,  $P_nA$ ,  $P_nT$  или четверкой  $CP_n$ ,  $GP_n$ ,  $AP_n$ ,  $TP_n$ ). Данное соответствие заключается в том, что сумма процентов каждой из двух названных четверок  $(n+1)$ -плетов в  $(n+1)$ -м слое примерно равна проценту  $n$ -плета  $P_n$  в предыдущем  $n$ -м слое ДНК:

$$\% P_n \approx \%P_nC + \%P_nG + \%P_nA + \%P_nT \approx \%CP_n + \%GP_n + \%AP_n + \%TP_n \quad (3.5)$$

Выполнение этого гештальт принципа (3.5) эстафеты вероятностей для взаимосвязи первого, второго, третьего и четвертого слоев геномных ДНК подтверждается приведенными данными на Рис. 3.4, 3.8 и 3.9. Но этот же принцип гештальт взаимосвязи слоев по их процентному составу  $n$ -плетов выдерживается для слоев с более высокими номерами  $n$ , хотя с ростом значений  $n$  точность выполнения названного равенства уменьшается. Например, обратимся к пятому и шестому слоям ДНК-текста первой хромосомы человека №1, которые представляют собой соответственно последовательности 49791284 пентаплетов и 41492737 шестиплетов, и сопоставим процент пентаплета АСГТТ в пятом слое с суммой процентов шестиплетов АСГТТС, АСГТТГ, АСГТТА и АСГТТТ в шестом слое. Компьютерный анализ этого ДНК-текста показывает следующее. В его пятом слое содержится 9130 пентаплетов АСГТТ, то есть процент этого вида пентаплетов равен  $9130 / 49791284 = 0,00018337$ . В его шестом слое содержатся количества 1679, 1753, 1474 и 2757 шестиплетов АСГТТС, АСГТТГ, АСГТТА и АСГТТТ соответственно; сумма процентов этой четверки шестиплетов равна  $(1679+1753+1474+2757) / 41492737 = 0.00018468$ , то есть примерно равна величине 0,00018337 процента пентаплета АСГТТ в предыдущем пятом слое.

Данная эстафетная гештальт связь (3.5) в геномах каждого  $n$ -плета с четверкой  $(n+1)$ -плетов очередного  $(n+1)$ -го слоя напоминает общебиологический процесс учетверения при мейозе, в ходе которого из одной половой клетки образуется четыре аналогичные половые клетки. Эта же эстафетная связь (3.5) отдаленно напоминает принцип Гюйгенса эстафетного характера: каждая точка волнового фронта является вторичным, то есть новым источником сферических волн (его дополнение привело к принципу Гюйгенса-Френеля, который служит основным постулатом волновой теории в физике, описывающим и объясняющим механизм распространения волн).

#### ***4. О гештальт-генетике и наследуемых феноменах гештальт-биологии***

Описанная выше относительная независимость сумм процентов  $n$ -плетов в их блочных тетрагруппировках в слоях геномных ДНК-текстов от значений отдельных слагаемых является аналогом гештальт-образов в психологии. Гештальт-психология изучает свойства мозга формировать целостные образы, относительно независимые от их частных компонент.

Так, музыкальная мелодия распознается нами, даже когда она играет на разных инструментах и в разных частотных диапазонах с измененным частотным составом ее компонент. То же самое относится к зрительному восприятию картин. Это - наследуемое фундаментальное свойство психики: искать в разрозненном целое. Благодаря способности мыслить гештальтами, вы можете понять предложение, даже если в каждом слове поменять порядок букв

и оставить на месте только начальные и конечные. Так, каждый без труда поймет следующую фразу, сильно «мутированную» локальными перестановками:

**Нпармиер, вы лгкео мжотее почрстее эту фазру.**

Ряд исследователей связывает гештальт-образы восприятия с квантовой запутанностью. Гештальт-психология существует сегодня в синтезе с когнитивной психологией.

Автор полагает, что аналогии между гештальт-феноменами восприятия и феноменами в геномном гештальт-правиле позволяют развивать гештальт-генетику. Последняя изучает целостные генетические паттерны, относительно независимые от частных компонент. Она соприкасается с учением создателя аналитической психологии К.Юнга и его сподвижника Нобелевского лауреата по физике В.Паули об архетипах бессознательного; они связывали эти архетипы со схемами Инь-Ян древнекитайской «Книги перемен» (или «Ицзин») и ее таблицей 64 гексаграмм, имеющими глубокие структурные аналогии с алфавитами ДНК. Эти аналогии были отмечены, в том числе, видными генетиками: Г.С. Стентом в 1969 году и Нобелевским лауреатом по генетике Ф. Жакобом в 1977 году (детали многих таких аналогий описаны в книгах [Петухов, 2008; Petoukhov, He, 2010]).

По нашему мнению, истоки генетически наследуемой способности мозга работать с гештальт-образами следует искать в гештальт-генетике. В частности, гештальт-генетика способна предложить новые подходы к пониманию помехоустойчивости генетической информации при мутациях ДНК-текстов.

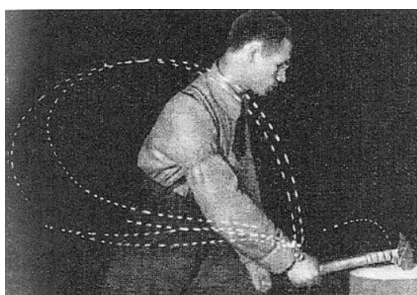
В дополнение к феноменам гештальт-психологии в живых организмах существует множество генетически унаследованных физиологических феноменов, в которых одна и та же целостная картина реализуется в условиях широкого разнообразия составляющих элементов и которые можно отнести к гештальт-биологии (это новое название предлагается автором как объединение генетически унаследованных гештальт-подобных феноменов разных типов). Например, гештальт-биология включает некоторые генетически унаследованные явления морфогенеза (законы филлотаксиса, спирализация биологических структур на различных уровнях и ветвях биологической эволюции), а также некоторые функциональные явления такие, как гомеостаз на разных этапах онтогенеза и обработка сенсорной информации от разных органов чувств в соответствии с основным психофизическим законом Вебера-Фехнера. В частности, гештальт-генетика включает в сферу своего охвата наблюдение классика эмбриологии К. Бэра о том, что куриные эмбрионы сильно отличаются друг от друга, в то время как полученные из них взрослые организмы удивительно похожи. Автор считает, что в основе гештальт-биологии лежат различные генетически унаследованные феномены гештальт-генетики.

Также следует напомнить, что молекулярный состав живого тела постоянно меняется, сохраняя при этом форму тела. Белки нашего тела

участвуют в непрерывных циклах «жизнь-смерть» их сборки и разборки на аминокислоты. Например, период полураспада гормона инсулина составляет 6-9 минут, и т. д. Другими словами, генетически унаследованные части нашего тела постоянно умирают и возрождаются. Принимая во внимание такие явления, известный физиолог А.Г. Гурвич утверждал: «основной проблемой биологии является поддержание формы при постоянном обновлении субстрата» [Гурвич, 1977]. На наш взгляд, описанные явления гештальт-генетики с ее гештальт-правилами процентных соотношений в геномных многослойных ДНК-текстах напрямую связаны с этой фундаментальной проблемой биологии.

Гештальт-генетика определяет новые подходы к пониманию онтогенеза. Используя терминологию гештальт-психологии и гештальт-терапии, автор предлагает трактовать онтогенетические процессы как пошаговые процессы «закрытия» определенных генетических гештальтов. Следует отметить, что все физиологические системы вынуждены нести структурную печать генетического кода, поскольку они должны быть генетически закодированы для передачи потомкам и выживания.

Гештальт-генетика касается также феномена биомеханики движений, описанного классиком биомеханики Н.А.Бернштейном: общая целевая задача движения выполняется точно независимо от неточностей составляющих его двигательных подзадач [Бернштейн, 1966]. Например, при повторении точного удара молотком по гвоздю человек каждый раз использует разные траектории, скорости и ускорения частей тела с изменением как углов сгибаний в суставах, так и активности многих мышц каждого сустава с множеством мотонейронов каждой мышцы (Рис. 4.1).



*Рис. 4.1. Исследования биомеханики движений по Н.А.Бернштейну (с сайта [https://ru.wikipedia.org/wiki/Бернштейн,\\_Николай\\_Александрович](https://ru.wikipedia.org/wiki/Бернштейн,_Николай_Александрович)).*

Этот вопрос о том, как центральная нервная система способна адекватно контролировать множество степеней свободы костно-мышечной системы был впервые поставлен Бернштейном и теперь известен как «проблема Бернштейна». Проблема степеней свободы в моторном контроле заключается в том, что у людей и животных есть несколько способов выполнить движение для достижения той же цели, используя избыточные нейрофизиологические степени свободы. То, как нервная система «выбирает» подмножество этих почти бесконечных степеней свободы, является большой трудностью в

понимании моторного контроля и моторного обучения. Другими словами, при нормальных обстоятельствах не существует простого однозначного соответствия между моторной проблемой (или задачей) и моторным решением проблемы.

Гештальт психология рассматривает также хорошо известные явления постоянства восприятия, отражающие способность мозга стабильно распознавать формы предметов и других структур внешнего мира в условиях значительного изменения условий их предъявления органам чувств. Например, изменение цветовой освещенности комнаты не мешает человеку распознавать формы и цвета находящихся в ней предметов, хотя на сетчатку глаз попадают другие световые частоты от предметов. Подобных свойств можно ожидать от информационных явлений в гештальт-генетике, которые предвосхищают феномены гештальт-психологии.

Согласно закону Менделя независимого наследования признаков, информация с уровня молекул ДНК диктует макроструктуры живых организмов через множество независимых каналов, несмотря на сильные шумы и помехи. Например, цвета волос, глаз и кожи наследуются независимо друг от друга. Соответственно, каждый организм - это машина многоканального помехоустойчивого кодирования. Гештальт-генетика с ее геномными гештальт-правилами может помочь в понимании этой многоканальной помехоустойчивости.

### *5. Геномные ДНК-тексты и квантовая информатика*

Ряд авторов давно высказывает предположение о квантово-информационной природе живых тел. Например, Р. Пенроуз, рассматривая тело как квантовый компьютер, обращается к тубулиновым белкам, которые могут переключаться из одного состояния в другое по аналогии с триггерами [Пенроуз, 2005]. Анализ живых тел на более глубоком - геномном - уровне приводит к более убедительным и плодотворным свидетельствам об организмах как квантовых информационных объектах (или как квантово-подобных объектах, математическое моделирование которых может строиться на формализмах квантовой информатики).

В квантовой механике и квантовой информатике при анализе вероятностей событий традиционно учитываются амплитуды этих вероятностей, равные квадратному корню из их значений. Правило геномного гештальта для процентного соотношения n-плетов (в С-, G-, A- и T-группировках) было выявлено при анализе сумм вероятностей n-плетов из определенных группировок, например, всех дублетов, начинающихся с буквы С:  $\Sigma \%CN = \%CC + \%CA + \%CT + \%CG$ . Каждая из этих вероятностей  $\%CC$ ,  $\%CA$ ,  $\%CT$  и  $\%CG$  имеет свою собственную амплитуду в виде квадратного корня из нее. Сумму процентов (то есть вероятностей) n-плетов в каждой из этих четырех

группировок можно интерпретировать как квадрат длины соответствующего вектора, компоненты которого равны амплитудам этих вероятностей (то есть квадратным корням из данных вероятностей). Например, величина  $\Sigma\%CN$  суммы процентов 4 дуплетов  $\%CC+\%CG+\%CA+\%CT$  является квадратом длины 4-мерного вектора  $[\sqrt{\%CC}, \sqrt{\%CG}, \sqrt{\%CA}, \sqrt{\%CT}]$ . Аналогично, величина  $\Sigma\%CNN$  суммы процентов 16 триплетов с буквой С на первой позиции равна величине квадрата длины 8-мерного вектора  $[\sqrt{\%CCC}, \sqrt{\%CCG}, \sqrt{\%CCA}, \sqrt{\%CCT}, \sqrt{\%CGC}, \sqrt{\%CGG}, \sqrt{\%CGA}, \sqrt{\%CGT}, \sqrt{\%CAC}, \sqrt{\%CAG}, \sqrt{\%CAA}, \sqrt{\%CAT}, \sqrt{\%CTC}, \sqrt{\%CTG}, \sqrt{\%CTA}, \sqrt{\%CTG}]$ , и так далее.

С этой точки зрения постоянство величин сумм процентов в столбцах таблицы на Рис. 3.4 означает постоянство длины тех  $2n$ -мерных векторов, координаты которых являются амплитудами вероятностей соответствующих  $n$ -плетов. Такой метрический подход позволяет разрабатывать новые методы сравнительного векторного анализа в генетике, которые сейчас изучаются в нашей лаборатории.

Сравним все  $m$ -позиционные тетрагруппировки в случае реальных процентов  $n$ -плетов (аналогично показанным на Рис. 3.2 и 3.3) и в случае эталонных процентов (аналогичных показанным на Рис. 3.7 и 3.8). Во всех сравниваемых тетрагруппировках соответствующие  $2^n$ -мерные векторы амплитуд вероятностей имеют разные значения координат. Но длины этих векторов во всех сравниваемых случаях равны между собой в силу правила гештальта, которое говорит о равенстве сумм процентов  $n$ -плетов в каждой группировке одному и тому же значению, то есть проценту соответствующего нуклеотида в анализируемом геномном ДНК-тексте. Соответственно, эти векторы одинаковой длины могут быть преобразованы друг в друга с помощью унитарных преобразований, которые не изменяют длину векторов и являются либо поворотами, либо зеркальными отражениями.

Таким образом, алгебраическая гештальт-генетика оказывается связанной с унитарными операторами, которые являются ключевыми для квантовой информатики: как известно, все вычисления в квантовых компьютерах и алгоритмах квантового поиска основаны на унитарных операторах в качестве квантовых вентилях. Любая унитарная матрица может служить квантовым вентиляем. В квантовой механике эволюция замкнутой квантовой системы описывается унитарными преобразованиями. Поскольку в данной статье речь идет о многих слоях текстов геномной ДНК, можно предположить, что, в частности, в многослойных текстах ДНК работает целый набор алгоритмов квантового поиска, каждый из которых индивидуально ориентирован на определенный текстовый слой. В статьях [Patel, 2001a-c] предполагается, что генетический код связан с квантовым алгоритмом Гровера. Статья [Petoukhov, 2018] представляет другие свидетельства связи структурированной системы генетического кодирования с унитарными матрицами.

Попутно можно отметить, что вся генетически унаследованная кинематическая схема движений нашего тела с его частями построена на поворотах в суставах и зеркальных отражениях, то есть на унитарных трансформациях, имеющих физиологическое значение.



*Рис. 5.1. Кинематическая схема движений тела построена на унитарных преобразованиях вращения в суставах и зеркального отражения.*

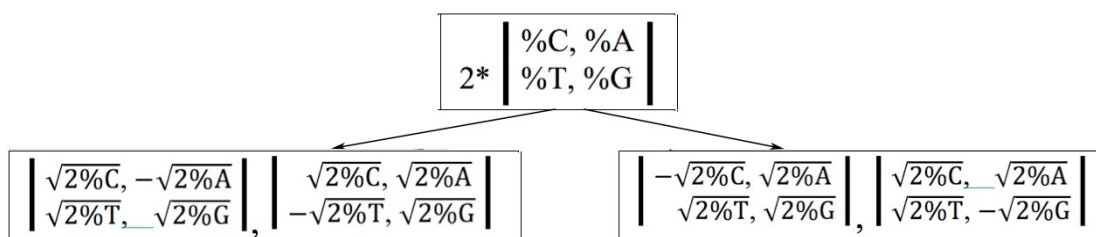
Автор обращает особое внимание на унитарные матрицы в развитии гештальт-генетики, поскольку унитарные преобразования вращения могут рассматриваться в качестве основы для моделирования известного морфогенетического гештальт-феномена спирализации в биологии: систематического существования спиральных морфологических конфигураций на разных уровнях и ветвях биологической организации независимо от их генетически унаследованного биоматериала. Гете даже называл спирали «символами жизни» из-за множества реализаций унаследованных спиральных структур и процессов в живых организмах на различных линиях и уровнях биологической эволюции. В организме человека спиральные структуры, генетически передаваемые от поколения к поколению, представлены в мышцах, сердце, кровеносных сосудах, костях, нервах, органе слуха (улитка), клеточной организации зародыша (зигота) и др. Структура сухожилий и связок состоит из спиралей, которые, в свою очередь, состоят из коллагена, имеющего тройную спиральную структуру. Спиральные движения (нутация) наблюдаются во время роста корней и побегов, усики растений заворачиваются по спирали, ткань стволов деревьев растет по спирали и т.д. [Петухов, Свирин, Хазина, 2015]. Из-за спиральной биоконфигурации течение всех жидкостей в организме (кровь, лимфа, и моча) имеет спиралевидный характер. Название книги о биоспиральных - «Линии жизни» [Cook, 1914] - отражает их важность для живого вещества. Структурные связи молекулярно-генетических систем с унитарными матрицами также описаны в предыдущих публикациях автора [Петухов, 2008; Petoukhov, He, 2010].

В данной статье отметим дополнительную структурную связь унитарных матриц с нуклеотидным строением двойной спирали ДНК. В этой двойной спирали процентные доли содержания комплементарных нуклеотидов С и G в точности равны ( $\%C = \%G$ ), как и процентные доли комплементарных А и Т ( $\%A = \%T$ ). Соответственно для двойной спирали ДНК матрица процентов

нуклеотидов  $[\%C, \%A; \%T, \%G]$  является бисимметрической и дважды стохастической (при ее умножении на 2): сумма процентов в каждой ее строке и каждом столбце равна единице. Но дважды стохастические матрицы связаны с унитарными матрицами согласно известной теореме [Прасолов, 2008, с. 350]:

*Если матрица  $A = \|a_{ij}\|_1^n$  унитарная, то матрица  $B = \|b_{ij}\|_1^n$ , где  $b_{ij} = |a_{ij}|^2$ , дважды стохастическая.*

Исходя из этой теоремы, Рис. 5.2 показывает взаимосвязь четырех унитарных  $(2 \times 2)$ -матриц и дважды стохастической  $(2 \times 2)$ -матрицы процентов нуклеотидов в двойной спирали ДНК. Две из показанных четырех унитарных матриц представляют преобразования зеркального отражения. Две другие унитарные матрицы представляются преобразования поворота векторов по часовой стрелке и против нее; одновременно они являются матричными представлениями комплексного числа  $z = +i^*$ , где  $i^2 = -1$ .



*Рис. 5.2. Взаимосвязь дважды стохастической матрицы процентов нуклеотидов в двойной спирали ДНК (верхний ряд) и четырех унитарных матриц (нижний ряд). Две унитарные матрицы (слева) представляют преобразования вращения, а две другие унитарные матрицы (справа) – преобразования зеркального отражения.*

Описанная связь матриц процентного содержания нуклеотидов в двойной спирали ДНК с комплексными числами, которые представлены отмеченными унитарными матрицами, полезна для алгебраического и квантово-механического моделирования генетических явлений, поскольку квантовая механика тесно связана с комплексными числами.

Взаимосвязи  $(2 \times 2)$ -матриц, показанные на Рис. 5.2, можно обобщить для  $(2^n \times 2^n)$ -матриц, образованных тензорными степенями исходной унитарной  $(2 \times 2)$ -матрицы и дважды стохастической  $(2 \times 2)$ -матрицы (как известно, тензорные степени унитарных матриц генерируют новые унитарные матрицы увеличенных порядков). Тензорные степени  $(2 \times 2)$ -матриц, представляющих комплексные числа, порождают  $(2^n \times 2^n)$ -матрицы, которые представляют алгебраические расширения комплексных чисел, относящиеся к соответствующим системам многомерных чисел.

Материалы данной статьи дополняют опубликованные ранее работы автора по теме квантовой биологии и формализмов квантовой информатики в



биологии [Петухов, 2008; 2020а-с, 2021а,б; Petoukhov, He, 2010; Petoukhov, Petukhova, Svirin, 2019]. Выявленная связь генетики с квантовой информатикой открывает возможность внедрения богатых формализмов квантовой механики и квантовой информатики в алгебраическую биологию для взаимного обогащения этих наук и включения биологии в область развитого математического естествознания. В организме человека около 100 триллионов клеток, образующих единую систему. Формализмы квантовой информатики и гештальт-генетики могут помочь в понимании таких явлений когерентности.

Следует упомянуть предположения многих авторов о том, что формализмы квантовой информатики могут быть эффективно использованы для глубокого понимания и моделирования биологических тел (см., например, [Abbot, Davies, Pati, 2008; Fimmel, Petoukhov, 2020а,б; Igamberdiev, 1993; Matsuno, 1999; Matsuno, Paton, 2000]).

### **6. Матричные алгебры и матрицы $n$ -позиционных тетрагруппировок**

Вернемся к четырем столбцам (Рис. 3.4) сумм процентов  $n$ -плетов в их  $n$ -позиционных тетрагруппировках из разных  $n$ -плетных слоев ДНК-текста хромосомы человека №1. Выше в разделе №3 все  $n$ -плеты, фигурирующие в суммах одного из 4 столбцов, были обозначены соответствующим карточным символом:

- $n$ -плеты первого столбца (С-столбца) - символом ♠ ;
- $n$ -плеты второго столбца (G-столбца) - символом ♣ ;
- $n$ -плеты третьего столбца (А-столбца) - символом ♥ ;
- $n$ -плеты четвертого столбца (Т-столбца) – символом ♦ .

Каково расположение членов этих 4 группировок в исходном тензорном семействе матриц  $[C, A; T, G]^{(n)}$  ДНК-алфавитов  $n$ -плетов (Рис. 2.2), построенных на основе системы бинарных оппозиций в алфавите 4 нуклеотидов? Рис. 6.1-6.4 показывают их матричное расположение для случаев  $n = 1, 2, 3, 4$ , используя введенные символы группировок  $n$ -плетов.

*Рис. 6.1. Расположение  $n$ -плетов, начинающихся с атрибутивного нуклеотида C, G, A или T, в матрицах тензорного семейства  $[C, A; T, G]^{(n)}$  при  $n = 1, 2, 3, 4$  (объяснение в тексте).*

Рис. 6.2. Расположение 16 дуплетов, 64 триплетов и 256 тетраплетов, имеющих атрибутивный нуклеотид C, G, A или T на второй позиции, в матрицах тензорного семейства  $[C, A; T, G]^{(n)}$  при  $n = 2, 3, 4$ .

Рис. 6.3. Расположение 64 триплетов и 256 тетраплетов, которые имеют атрибутивный нуклеотид C, G, A или T на третьей позиции, в матрицах тензорного семейства  $[C, A; T, G]^{(n)}$  при  $n = 3, 4$ .

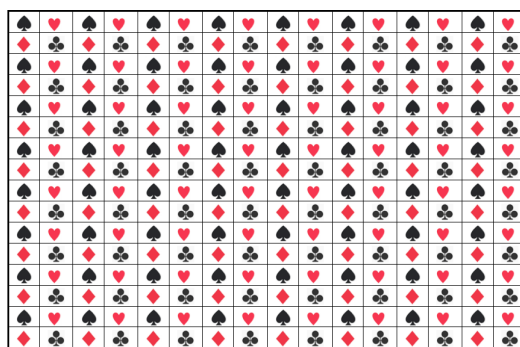


Рис. 6.4. Расположение в матрице  $[C, A; T, G]^{(4)}$  тетрагруппировки 256 тетраплетов, которые имеют атрибутивный нуклеотид C, G, A или T на четвертой позиции.

Мозаика всех этих матриц имеет меандровый характер: чередующиеся в них связки черных и красных символов имеют одинаковую длину. Это напоминает функции Радемахера-Уолша, широко используемые в теории помехоустойчивого кодирования информации и состоящие из меандровых последовательно-

стей элементов +1 и -1. Заменяя в меандровых геноматрицах черные символы на «+1», а красные – на «-1», получаем числовые представления этих генетических  $(2^n \times 2^n)$ -матриц, которые оказываются  $2^n$ -мерными гиперболическими числами с единичными координатами. Поясним это на примере одной из показанных мозаичных  $(4 \times 4)$ -геноматриц, взятой с Рис. 6.1.

The diagram illustrates the decomposition of a 4x4 matrix of playing cards into a 4x4 matrix of +1 and -1 values. The cards are arranged in a 4x4 grid: top row (Spades, Spades, Hearts, Hearts), second row (Spades, Spades, Hearts, Hearts), third row (Diamonds, Diamonds, Clubs, Clubs), and bottom row (Diamonds, Diamonds, Clubs, Clubs). An arrow points to a 4x4 matrix of +1 and -1 values: top row (+1, +1, -1, -1), second row (+1, +1, -1, -1), third row (-1, -1, +1, +1), and bottom row (-1, -1, +1, +1). To the right of this matrix is the expression  $= e_0 + e_1 + e_2 + e_3 =$ . Below this, the matrix is shown as a sum of four sparse matrices:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . To the right of this sum is a semicolon and a multiplication table for hyperbolic numbers with a bolded subalgebra:

*	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	$e_1$	$e_0$	$e_3$	$e_2$
$e_2$	$e_2$	$e_3$	$e_0$	$e_1$
$e_3$	$e_3$	$e_2$	$e_1$	$e_0$

*Рис. 6.5. Декомпозиция матрицы, взятой с Рис. 6.1, дает четыре разреженных матрицы, определяющих таблицу умножения алгебры 4-мерных гиперболических чисел (внизу справа). В таблице этой алгебры жирной рамкой указана ее подалгебра.*

Показанная на Рис. 6.5 декомпозиция числовой матрицы дает набор из четырех разреженных матриц  $e_0, e_1, e_2, e_3$ , замкнутый относительно умножения и дающий таблицу умножения, известную в алгебре 4-мерных гиперболических чисел как таблица умножения ее базисных единиц. Каждая из этих разреженных матриц является матрицей перестановок, применяемой для анализа структуры-рованных текстов ДНК.

Примеры числовых аналогов других матриц, указанных на Рис. 6.1-6.4, и их декомпозиций на наборы разреженных матриц, также замкнутых относительно умножения и определяющих таблицы умножения алгебр соответствующих  $2^n$ -мерных гиперболических чисел, полезных для моделирования генетических структур, имеются в работах [Petoukhov, 2021a,b].

Частным случаем 2-мерных гиперболических чисел являются гиперболические повороты, известные в специальной теории относительности под именем преобразований Лоренца. Они имеют отношение также к генетически наследуемому основному психофизическому закону Вебера-Фехнера. Покажем связь гиперболических поворотов с этим логарифмическим законом (натуральные логарифмы в начале своей истории недаром назывались гиперболическими логарифмами).

Восприятие мира - зрительное, слуховое, обонятельное, тактильное, вкусовое и пр. - по наследуемым сенсорным каналам подчиняется основному психофизическому закону Вебера-Фехнера, несмотря на различия органов

чувств (глаз, ушей, носа,...) по внешнему виду и составу (Рис. 6.6). Данный закон гласит, что интенсивность восприятия пропорциональна логарифму интенсивности стимула:

$$p = k \cdot \ln(x/x_0) = k \cdot \{\ln(x) - \ln(x_0)\}, \quad (6.1)$$

где  $p$  – интенсивность восприятия,  $x$  – интенсивность стимула,  $x_0$  – пороговое значение стимула,  $k$  – коэффициент,  $\ln$  – символ натурального логарифма.

В силу этого закона, например, сила звука в технике измеряется в логарифмической шкале децибел.

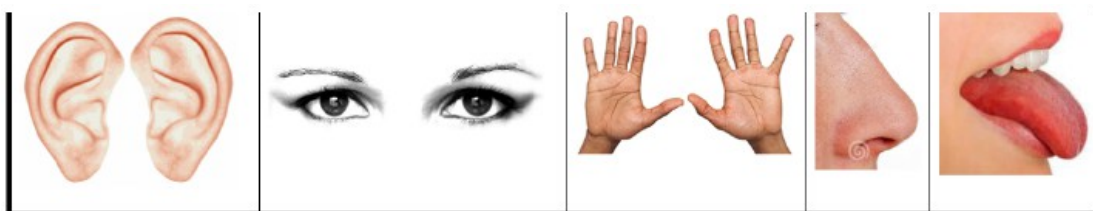


Рис. 6.6. Различные органы чувств, сильно различающиеся по форме и составу, объединены тем, что их сенсорика подчиняется закону Вебера-Фехнера.

Известно, что для любого вещественного числа  $a > 1$  натуральный логарифм определяется как площадь под гиперболой  $y = 1/x$  от 1 до  $a$  (Рис. 6.7). Соответственно две точки  $(x, 1/x)$  и  $(x_0, 1/x_0)$  этой гиперболы задают величину  $\ln(x) - \ln(x_0)$  из значения интенсивности восприятия  $p$  в законе Вебера-Фехнера. Изменение величины интенсивности стимула  $x_1$  в новое значение  $x_2$  соответствует гиперболическому повороту, который в этой гиперболе переводит точку  $(x_1, 1/x_1)$  в точку  $(x_2, 1/x_2)$  и характеризует величину изменения интенсивности восприятия в данном законе:  $\Delta p = k \cdot \ln(x_2/x_1)$

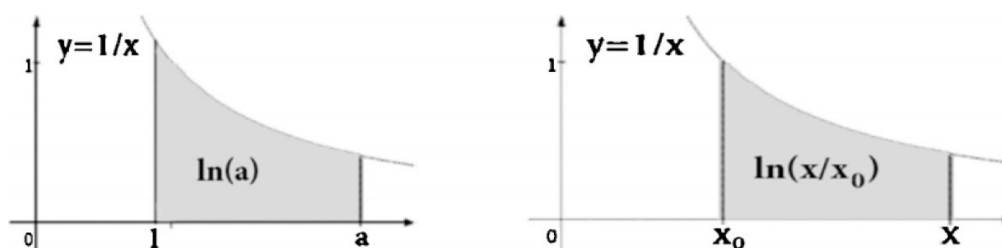


Рис. 6.7. Натуральный логарифм как площадь под гиперболой  $y = 1/x$ . Слева:  $\ln(a)$  равен площади под гиперболой от 1 до  $a$ . Справа:  $\ln(x/x_0)$  равен площади под гиперболой от  $x_0$  до  $x$ .

Генетически наследуемый закон Вебера-Фехнера является законом далеко не только нервной системы. Он также выполняется для низших организмов, не имеющих нервных клеток: “этот закон применим для хемотропических, гелио-

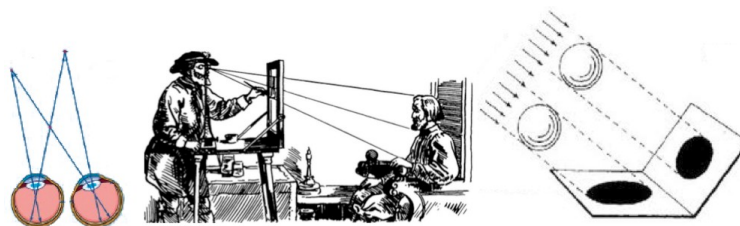
тропических и геотропических движений бактерий и грибов и антерозоидов папоротников, мхов и явнобрачных.... Закон Вебера-Фехнера, следовательно, - не закон нервной системы и центров, но закон протоплазмы, вообще, и ее способности отвечать на раздражения" [Шульц, 1916].

Закон Вебера-Фехнера является одной из частей темы алгебраической гештальт-генетики и ее влияния на физиологию.

### **7. Наклонные проекторы и проекторные тетрагруппировки $n$ -плетов в слоях ДНК-текстов геномов**

Продолжим изучение свойств процентного содержания  $n$ -плетов в многослойном представлении длинных ДНК-текстов. До сих пор мы рассматривали правило гештальта, относящееся к  $m$ -позиционным тетрагруппировкам  $n$ -плетов, которые связаны с алгеброй гиперболических чисел (см. предыдущий раздел). По этой причине мы дополнительно называем такие  $m$ -позиционные тетрагруппировки гиперболическими тетрагруппировками, а соответствующее генетическое гештальт правило - гиперболическим гештальт правилом. Этот раздел посвящен другому типу тетрагруппировок, называемых проекторными тетрагруппировками  $n$ -плетов, поскольку они связаны с наклонными проекторами. Тетрагруппировки проекторов сопряжены с соответствующим проекторным гештальт-правилом, описанным ниже.

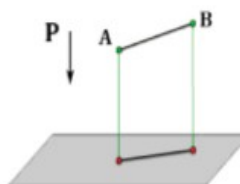
Наше зрительное восприятие и «метод проекции» в рисовании основаны на проекциях внешних объектов на сетчатку и плоскость рисунка (рис. 7.1). В математике такие операции проекции выражаются с помощью квадратных матриц, которые называются «проекторными операторами» (или сокращенно «проекторами»).



*Рис. 7.1. Примеры проецирования. Слева: ход световых лучей к сетчатке глаз. В середине: метод проецирования при рисовании. Справа: ортогональное и наклонное проецирование на плоскость.*

Понятие проекторных (или проекционных) операторов - одно из важных понятий во многих небологических науках: физике, включая квантовую механику; математике; информатике; химия; математическая логика и т. д. Матрица  $P$  на Рис. 7.2 представляет собой пример проектора, проецирующего

вектор  $[x, y, z]$  на плоскость  $[x, y, 0]$ .

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$


Проекторы математически выражаются квадратными матрицами (<http://mathworld.wolfram.com/ProjectionMatrix.html>). Необходимым и достаточным условием того, что матрица  $P$  является оператором проектирования, является выполнение равенства  $P^2 = P$ . Все множество проекторов разделено на два класса:

- Ортогональные проекторы, которые выражаются симметричными матрицами. Они наиболее известны и имеют множество приложений;
- Наклонные проекторы, которые выражаются несимметричными матрицами. Они значительно менее известны, но именно они будут в центре внимания в данном разделе в связи с геномными гештальт феноменами.

Излагаемые авторские результаты свидетельствуют о том, что значение проекторов для биоинформатики не ограничивается их ролью в зрительном восприятии (Рис. 7.1), но что вся система генетической информатики активно использует их. Опишем эти проекторные тетрагруппировки  $n$ -плетов, которые существуют в разных  $n$ -плетных слоях геномных ДНК-текстов; в каждой из их четырех группировок сохраняется величина сумм процентов соответствующих  $n$ -плетов как в разных слоях, так и в разных проекторных тетрагруппировках  $n$ -го слоя ( $n = 2, 3, 4, \dots$ , но намного меньше длины рассматриваемого текста геномной ДНК).

Вернемся к процентным матрицам 16 дуплетов и 64 триплетов в хромосоме №1 человека (Рис. 3.2 и 3.3). Для облегчения визуального представления этих тетрагруппировок проекторов  $n$ -плетов, процентные матрицы на Рис. 3.2 и 3.3 преобразуются в соответствующие символические матрицы на Рис. 7.3 с 4 типами символов игральные карты в ячейках: пики (♠), червы (♥), бубны (♦) и трефы (♣).

Тетрагруппировка №1 для 16 дуплетов:	Тетрагруппировка №2 для 16 дуплетов:																																
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>♠</td><td>♥</td><td>♠</td><td>♥</td></tr> <tr><td>♠</td><td>♥</td><td>♠</td><td>♥</td></tr> <tr><td>♦</td><td>♣</td><td>♦</td><td>♣</td></tr> <tr><td>♦</td><td>♣</td><td>♦</td><td>♣</td></tr> </table>	♠	♥	♠	♥	♠	♥	♠	♥	♦	♣	♦	♣	♦	♣	♦	♣	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>♠</td><td>♠</td><td>♥</td><td>♥</td></tr> <tr><td>♦</td><td>♦</td><td>♣</td><td>♣</td></tr> <tr><td>♠</td><td>♠</td><td>♥</td><td>♥</td></tr> <tr><td>♦</td><td>♦</td><td>♣</td><td>♣</td></tr> </table>	♠	♠	♥	♥	♦	♦	♣	♣	♠	♠	♥	♥	♦	♦	♣	♣
♠	♥	♠	♥																														
♠	♥	♠	♥																														
♦	♣	♦	♣																														
♦	♣	♦	♣																														
♠	♠	♥	♥																														
♦	♦	♣	♣																														
♠	♠	♥	♥																														
♦	♦	♣	♣																														

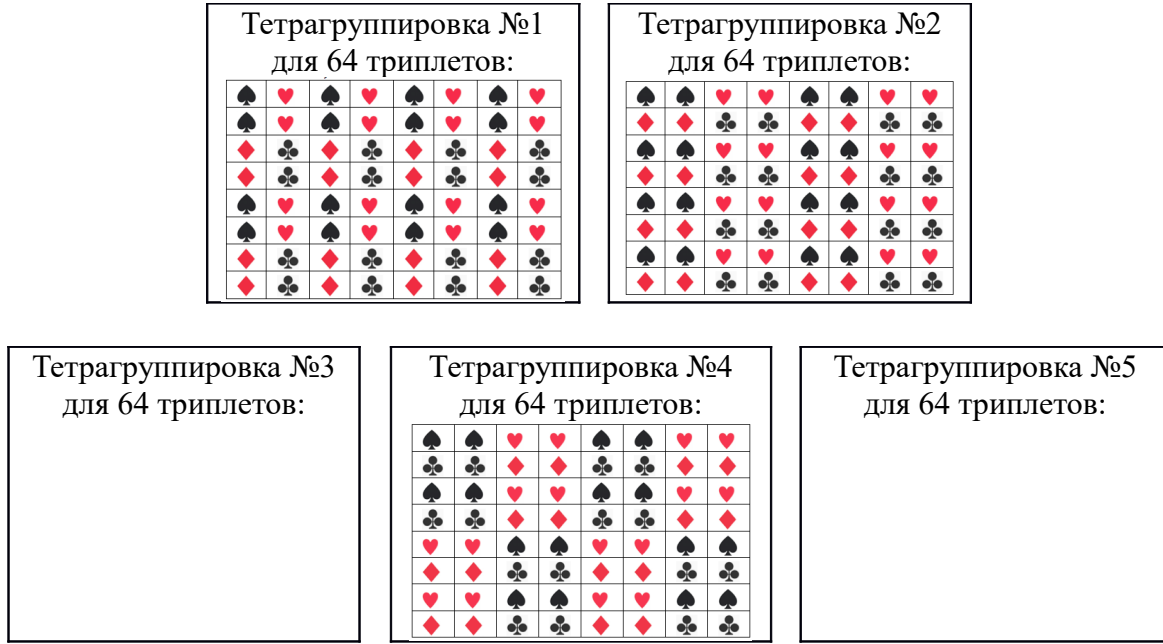


Рис. 7.3. Расположение  $n$ -плетов из разных проекторных тетрагруппировок в матрицах 16 дуплетов и 64 триплетов из Рис. 2.2. Соответствующие ячейки каждой из четырех группировок обозначаются одним из символов игральных карт.

Удивительным результатом исследования разных геномов является обнаружение константности сумм процентов  $\Sigma\%♥$ ,  $\Sigma\%♦$ ,  $\Sigma\%♠$ , and  $\Sigma\%♣$   $n$ -плетов, которые обозначены одинаковым символом, во всех матрицах с различными мозаиками тетрагруппировок на Рис. 7.3:

$$\Sigma\%♥ \approx \text{constant}, \Sigma\%♦ \approx \text{constant}, \Sigma\%♠ \approx \text{constant}, \Sigma\%♣ \approx \text{constant}. \quad (7.1)$$

Например, для ДНК хромосомы человека №1, процентная (4\*4)-матрица дуплетов которой показана на Рис. 3.2, имеем следующие процентные суммы (7.2) в случае проекторной тетрагруппировки №1 для 16 дуплетов из Рис. 7.3:

$$\begin{aligned} \Sigma\%♥ &= \%CA + \%CG + \%AA + \%AG \approx \\ &\approx 0.07274 + 0.01031 + 0.09504 + 0.07137 \approx \mathbf{0.250}, \\ \Sigma\%♦ &= \%TC + \%TT + \%GC + \%GT \approx \\ &\approx 0.06008 + 0.09568 + 0.04402 + 0.05046 \approx \mathbf{0.250}, \\ \Sigma\%♠ &= \%CC + \%CT + \%AC + \%AT \approx \\ &\approx 0.05409 + 0.07134 + 0.05033 + 0.07429 \approx \mathbf{0.250}, \\ \Sigma\%♣ &= \%TA + \%TG + \%GA + \%GG \approx \\ &\approx 0.06312 + 0.07286 + 0.06008 + 0.05419 \approx \mathbf{0.250}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Тетрагруппировка №2 для 16 дуплетов из Рис. 7.3 имеет другую комбинацию 4 дуплетов и процентов в каждой группировке, но те же самые величины процентных сумм (7.3):

$$\begin{aligned}
 \Sigma\% \heartsuit &= \%AC + \%AA + \%GC + \%GA \approx \\
 &\approx 0.05033 + 0.09504 + 0.04402 + 0.06008 \approx \mathbf{0.250}, \\
 \Sigma\% \spadesuit &= \%CT + \%CG + \%TT + \%TG \approx \\
 &\approx 0.07134 + 0.01031 + 0.09568 + 0.07286 \approx \mathbf{0.250}, \\
 \Sigma\% \clubsuit &= \%CC + \%CA + \%TC + \%TA \approx \\
 &\approx 0.05409 + 0.07274 + 0.06008 + 0.06312 \approx \mathbf{0.250}, \\
 \Sigma\% \blacklozenge &= \%AT + \%AG + \%GT + \%GG \approx \\
 &\approx 0.07429 + 0.07137 + 0.05046 + 0.05419 \approx \mathbf{0.250}
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Аналогичное правило константности величин процентных сумм в проекторных тетрагруппировках выполняется для всех пяти (8\*8)-матриц (Рис. 7.3), мозаики которых представляют различные проекторные тетрагруппировки для ДНК-алфавита 64 триплетов. Каждый читатель может сам проверить выполнение этого правила константности посредством суммирования соответствующих процентов. Автор проиллюстрирует здесь эту константность только для величин процентных сумм  $\Sigma\% \spadesuit$  16 триплетов, обозначенных символом  $\spadesuit$ , используя мозаичные матрицы на Рис. 7.3 и процентные матрицы триплетов на Рис. 3.3.

Тетрагруппировке №1 для 64 триплетов на Рис. 7.3 соответствует сумма:

$$\begin{aligned}
 \Sigma\% \spadesuit &= \%CCC + \%CCT + \%CAC + \%CAT + \%ACC + \%ACT + \%AAC + \%AAT + \\
 &+ \%TTC + \%TCT + \%TAC + \%TAT + \%GCC + \%GCT + \%GAC + \%GAT \approx 0.0138 + 0.0185 + \\
 &+ 0.0152 + 0.0179 + 0.0118 + 0.0162 + 0.0145 + 0.0238 + 0.0159 + 0.0223 + 0.0110 + 0.0194 + \\
 &+ 0.0125 + 0.0144 + 0.0096 + 0.0133 \approx \mathbf{0.250}.
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Тетрагруппировке №2 для 64 триплетов на Рис. 7.3 соответствует сумма:

$$\begin{aligned}
 \Sigma\% \spadesuit &= \%CCC + \%CCA + \%ACC + \%ACA + \%CTC + \%CTA + \%ATC + \%ATA + \\
 &+ \%TCC + \%TCA + \%GCC + \%GCA + \%TTC + \%TTA + \%GTC + \%GTA \approx 0.0138 + 0.0188 + \\
 &+ 0.0118 + 0.0198 + 0.0176 + 0.0127 + 0.0132 + 0.0194 + 0.0159 + 0.0196 + 0.0125 + 0.0146 + 0.0197 + \\
 &+ 0.0198 + 0.0096 + 0.0112 \approx \mathbf{0.250}.
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Тетрагруппировке №3 для 64 триплетов на Рис. 7.3 соответствует сумма:

$$\begin{aligned}
 \Sigma\% \spadesuit &= \%CCC + \%CCA + \%CAC + \%CAA + \%CCT + \%CCG + \%CAT + \%CAG + \\
 &+ \%TCC + \%TCA + \%TAC + \%TAA + \%TCT + \%TCG + \%TAT + \%TAG \approx 0.0138 + 0.0188 + \\
 &+ 0.0152 + 0.0186 + 0.0185 + 0.0029 + 0.0179 + 0.0210 + 0.0159 + 0.0196 + 0.0110 + 0.0199 + \\
 &+ 0.0223 + 0.0023 + 0.0194 + 0.0128 \approx \mathbf{0.250}.
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Тетрагруппировке №4 для 64 триплетов на Рис. 7.3 соответствует сумма:



$$\begin{aligned} \Sigma\% \spadesuit = & \%CCC + \%CCA + \%ACC + \%ACA + \%CTC + \%CTA + \%ATC + \%ATA + \\ & \%TAC + \%TAA + \%GAC + \%GAA + \%TTA + \%TGA + \%GGC + \%GGA \approx 0.0138 + \\ & 0.0188 + 0.0118 + 0.0198 + 0.0176 + 0.0127 + 0.0132 + 0.0194 + 0.0110 + 0.0096 + 0.0196 + \\ & 0.0146 + 0.0195 + 0.0126 + 0.0160 \approx \mathbf{0.250}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Тетрагруппировке №5 для 64 триплетов на Рис. 7.3 соответствует сумма:

$$\begin{aligned} \Sigma\% \spadesuit = & \%CCC + \%CCT + \%CAC + \%CAT + \%ATC + \%ATT + \%AGC + \%AGT + \\ & \%TCC + \%TCT + \%TAC + \%TAT + \%GTC + \%GTT + \%GGC + \%GGT \approx 0.0138 + 0.0185 + \\ & 0.0152 + 0.0179 + 0.0132 + 0.0239 + 0.0144 + 0.0161 + 0.0159 + 0.0223 + 0.0110 + 0.0194 + \\ & 0.0096 + 0.0145 + 0.0126 + 0.0119 \approx \mathbf{0.250}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

В показанном частном числовом примере хромосомы человека №1, выражения (7.2-7.8) показывают, что  $\Sigma\% \heartsuit \approx \Sigma\% \blacklozenge \approx \Sigma\% \spadesuit \approx \Sigma\% \clubsuit \approx 0.250$ . Но в общем случае для геномных ДНК-текстов выполняются равенства (7.9):

$$\Sigma\% \heartsuit \approx \Sigma\% \blacklozenge, \quad \Sigma\% \spadesuit \approx \Sigma\% \clubsuit \quad (7.9)$$

Например, в случае бактериального генома *Bradyrhizobium japonicum* (см. Приложение I) выполняются следующие равенства для проекторных тетрагруппировок  $n$ -плетов во всех 7 мозаичных матрицах дуплетов и триплетов на Рис. 7.3:

$$\Sigma\% \heartsuit \approx \Sigma\% \blacklozenge \approx 0.277, \quad \Sigma\% \spadesuit \approx \Sigma\% \clubsuit \approx 0.223 \quad (7.10)$$

Автор рассматривает этот геномный феномен постоянства величин суммарных процентов (7.10) в проекторных тетрагруппировках, имеющих различный процент отдельных  $n$ -плетов в различных слоях длинных ДНК-текстов, как основу генетического гештальт-правила вероятностей для проекторных тетрагруппировок и как основу соответствующего предполагаемого принципа запрета в генетике.

Следует отметить существенное различие гештальт феноменов в случае  $m$ -позиционных тетрагруппировок, которые связаны с 4 столбцами на Рис. 3.4, и в случае проекторных тетрагруппировок, которые связаны с выражение (7.9). В  $m$ -позиционных тетрагруппировках величины сумм процентов  $n$ -плетов в каждой из 4 групп равны проценту соответствующих нуклеотидов А, Т, С или G. В проекторных тетрагруппировках величины сумм процентов  $n$ -плетов в каждой из 4 группировок не имеют видимой связи с процентным содержанием отдельных нуклеотидов.

Следует отметить, что в данной статье представлены лишь некоторые примеры проекторных тетрагруппировок  $n$ -плетов. В наборе из 256 тетраплетов существует большее количество проекторных тетрагруппировок тетраплетов. Кажется естественным предположить, что тетрагруппировки проекторов

существуют также в геномных наборах из  $4^n$  видов  $n$ -плетов при  $n = 5, 6, 7, \dots$  но автор не проверял это предположение на конкретных геномах.

Аналогичные процентные суммы для этих 7 тетрагруппировок (Рис. 7.3) имеют место также в случае модельных процентов 16 дуплетов и 64 триплетов в тех матрицах (Рис. 3.7, 3.8), которые являются второй и третьей тензорными степенями процентной матрицы нуклеотидов и которые имеют свои собственные проценты отдельных дуплетов и триплетов, отличающиеся от реально существующих:

$$\Sigma\% \spadesuit \approx 0.250; \quad \Sigma\% \clubsuit \approx 0.250; \quad \Sigma\% \heartsuit \approx 0.250; \quad \Sigma\% \diamond \approx 0.250. \quad (7.11)$$

Рис. 7.4 показывает, что некоторые примеры  $(4 \times 4)$ -матриц с проекторными тетрагруппировками 16 дуплетов и  $(8 \times 8)$ -матриц с проекторными тетрагруппировками 64 триплетов (представленные на Рис. 7.3) взаимно связаны через тензорное произведение этих  $(4 \times 4)$ -матриц на  $(2 \times 2)$ -матрицу [1, 1; 1, 1].

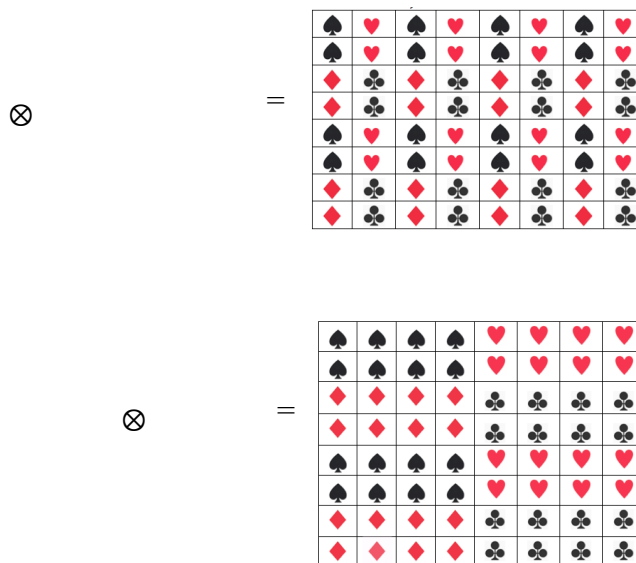


Рис. 7.4. Тензорная взаимосвязь между примерами проекторных матриц четвертого и восьмого порядков из Рис. 7.3. Символ  $\otimes$  означает тензорное произведение.

Следует отметить, что список связей наклонных проекторных операторов с процентным составом  $n$ -плетов в многослойной презентации геномных ДНК-текстов далеко не ограничивается тетрагруппировками, отмеченными выше в этой статье. Декомпозиция каждой матрицы проекторных тетрагруппировок по

ее карточным мастям дает набор разреженных матриц по аналогии с примером на Рис. 7.5

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \spadesuit & \heartsuit & \spadesuit & \heartsuit \\ \hline \spadesuit & \heartsuit & \spadesuit & \heartsuit \\ \hline \diamondsuit & \clubsuit & \diamondsuit & \clubsuit \\ \hline \diamondsuit & \clubsuit & \diamondsuit & \clubsuit \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \spadesuit & 0 & \spadesuit & 0 \\ \hline \spadesuit & 0 & \spadesuit & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \clubsuit & 0 & \clubsuit \\ \hline 0 & \clubsuit & 0 & \clubsuit \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \heartsuit & 0 & \heartsuit \\ \hline 0 & \heartsuit & 0 & \heartsuit \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \diamondsuit & 0 & \diamondsuit & 0 \\ \hline \diamondsuit & 0 & \diamondsuit & 0 \\ \hline \end{array}$$

;

*Рис. 7.5. Декомпозиция проекторной матрицы с тетрагруппировкой №1 для 16 дулетов (из Рис. 7.3) дает четыре разреженных матрицы (верхний ряд), которые аналогичны набору матричных операторов наклонных проекторов  $e_0, e_1, e_2, e_3$ , каждый из которых удовлетворяет критерию проекторов:  $e_i^2 = e_i$  (нижний ряд слева). Внизу справа показана таблица умножения этих наклонных проекторов.*

Этот набор наклонных проекторов  $e_0, e_1, e_2, e_3$  замкнут относительно умножения и определяет показанную таблицу умножения некой алгебры 4-мерных чисел (Рис. 7.5). Декомпозиция по мастям других  $(2^n \times 2^n)$ -матриц с проекторными тетрагруппировками дает наборы матриц наклонных проекторов, замкнутые относительно умножения и определяющие таблицы умножения алгебр  $2^n$ -мерных числовых систем. Подробности этого представлены в препринте [Petoukhov, 2021a].

Данный тип наклонных проекторов, возникший при анализе композитных ДНК-текстов и условно называемый генетическим, обладает важными модельными свойствами. Продемонстрируем эти свойства на примере воздействия таких проекторов на 4-мерный вектор состояния системы  $\vec{A} = [a_0(t), a_1(t), a_2(t), a_3(t)]$ , координаты которого представляют, например, исходно не связанные между собой циклические или волновые функции времени. Подействуем на этот вектор, например, наклонным проектором  $e_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 1; 0 \ 1 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  из Рис. 7.5:

$$[a_0(t), a_1(t), a_2(t), a_3(t)] * e_2 = [0, a_0(t)+a_1(t), 0, a_0(t)+a_1(t)] \quad (7.12)$$

В результате из вектора состояния со случайным набором координат возник симметризованный вектор состояния (7.12), ненулевые координаты которого синхронно изменяются во времени и вообще идентичны. Образно говоря, эти генетические наклонные проекторы создают порядок из хаоса.

Аналогичные результаты дают другие наклонные проекторы данного «генетического» типа при действии на  $2^n$ -мерные вектора состояния (см. препринт [Petoukhov, 2021a]). Такие проекторы позволяют моделировать многие генетически наследуемые согласования в биологических феноменах. Ведь живой организм представляет собой огромный хор согласованных циклических процессов. Согласно положениям хрономедицины, все наши заболевания являются следствием нарушений в этой согласованности. Насколько автор может судить, такой тип наклонных проекторов ранее не применялся в науке и является новым инструментом анализа и моделирования. Здесь вспоминается известное утверждение Ж.Фурье: «*Пристальное, глубокое изучение природы есть источник самых плодотворных открытий математики*».

### 8. Гиперболические правила количеств $n$ -плетов в геномах и гармоническая прогрессия

При описанном композитном, многослойном представлении длинного ДНК-текста каждый его  $n$ -й слой, имеющий вид цепи  $n$ -плетов как его звеньев, содержит в  $n$  раз меньше звеньев, чем количество звеньев в первом однобуквенном слое (поскольку в  $n$ -м слое размер звеньев больше в  $n$  раз по сравнению с размером звеньев в первом слое). В силу описанного в параграфе 3 феноменологического равенства в геномных ДНК-текстах сумм процентов  $n$ -плетов, принадлежащих к А-, Т-, С- и G-группировкам, можно ожидать, что суммарное количество  $n$ -плетов, например, с буквой А на их первой позиции будет зависеть от номера  $n$  слоя по гиперболической зависимости  $1/n$ . Покажем результаты исследования этого ожидания.

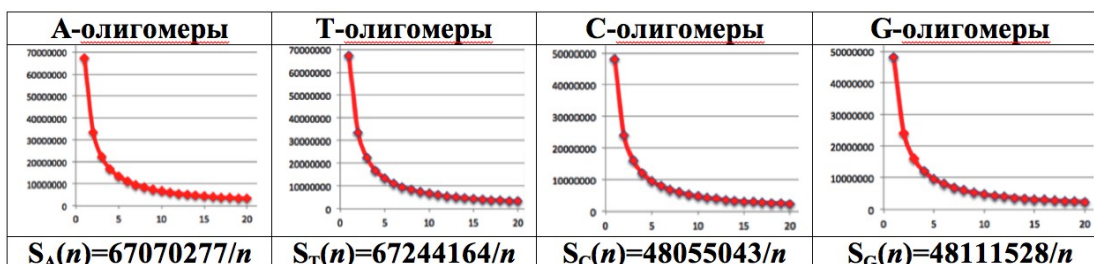
Подсчитаем в каждом из первых 20 слоев ДНК-текста хромосомы человека №1 количества их  $n$ -плетов, начинающихся с А. Получаем серию из 20 многомиллионных чисел, начало и конец которой показаны на Рис. 8.1.

$n$	1(мономеры)	2(дуплеты)	3(триплеты)	4(тетраплеты)	...	20 (20-плеты)
$S_A(n)$	67070277	33537501	22360413	16768845	...	3354107

*Рис. 8.1. Фрагмент последовательности количеств  $n$ -плетов в первых 20 слоях ДНК-текста хромосомы человека №1.*

Эта полученная последовательность 20 чисел практически совпадает с гиперболической последовательностью  $S(n) = 67070277/n$ , числителем которой служит количество нуклеотидов А в этой ДНК. Отклонения реальных количеств от модельной последовательности  $S(n)$  составляют сотые доли процента и лежат в диапазоне  $\pm 0.03\%$ . Сходные результаты получаются в этом же ДНК-тексте при его многослойном представлении с подсчетом суммарного количества  $n$ -плетов, начинающихся с любой из других трех букв Т, С или G (в числителях этих гиперболических зависимостей стоят количества

соответствующих нуклеотидов). Рис. 8.2 показывает графическое представление данных результатов.



**Рис. 8.2.** Гиперболические последовательности количеств  $n$ -плетов из А-, Т-, С- и G-группировок в первых 20 слоях ДНК-текста хромосомы человека №1. По оси абсцисс отложены значения  $n$ , а по оси ординат соответствующие количества  $n$ -плетов (олигомеров длины  $n$ ).

Аналогичные гиперболические взаимосвязи  $n$ -плетных сумм в каждой из А-, Т-, С- и G-группировок  $n$ -плетов 20 первых слоев геномных ДНК-текстов получены для ДНК-текстов: 1) всех 24 хромосом человека, сильно различающихся своей длиной, а также количеством и видом генов в них (Рис. 8.3); 2) всех хромосом дрозофилы, мыши, червя, многих растений; 3) 19 геномов бактерий и архей; 4) многих экстремофилов, живущих в экстремальных условиях, например, радиации с уровнем в 1000 раз превышающим смертельный для человека. Подробные численные данные анализа этим авторским методом геномных ДНК-текстов эукариотов и прокариотов представлены в препринтах [Petoukhov, 2019-2021]).



**Рис. 8.3.** 24 хромосомы человека (<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/genome/51>).

Найденные гештальт-правила процентов в геномах и соответствующие гиперболические взаимосвязи количеств  $n$ -плетов в геномах являются кандидатами на роль универсальных генетических правил. Данные алгебраические инварианты глобально-геномного характера сохраняются неизменными на протяжении миллионов лет биологической эволюции, по ходу которой отмирают миллионы видов живых организмов и возникают новые (хотя локально геномные последовательности изменяются из-за действия мутаций, пресса естественного отбора и пр.). Это затрагивает вопрос о происхождении жизни и информационной связи всех организмов, коль скоро данные

алгебраические структуры и правила характеризуют геномы даже бактерий и архей.

Отметим, что гиперболические правила геномов кардинально отличаются от известного гиперболического правила Ципфа, не связанного с кодированием информации и сформулированного в лингвистике для процентов встречи отдельных слов в длинных текстах. Геномные правила олигомерных сумм в многослойном представлении кодирующих ДНК-текстов говорят не о проценте встречи отдельных фрагментов текста, а о суммах множества различных  $n$ -плетов, распределенных в геномном ДНК-тексте, в котором каждый нуклеотид является составной частью многих олигомерных наборов, существующих одновременно (каждый нуклеотид А, Т, С и G является распределенным участником многих членов соответствующих последовательностей сумм  $n$ -плетов А-, Т-, С- и G-группировок одновременно и делает вклад в каждую из них). Кратко говоря, эти правила - геномов и Ципфа - относятся к существенно разным структурам.

Малая часть ДНК-текстов геномов (у человека всего 1,5%) является генами, кодирующими белки (в первой хромосоме человека содержится 4505 генов). Оказывается, что представление ДНК-текстов как многослойных по авторскому методу  $n$ -плетных сумм в слоях дают важные результаты при анализе не только геномов, но также относительно коротких генов. Например, анализ гена TTN, содержащего 81940 нуклеотидов и кодирующего длинный мышечный белок Титин, выявил закономерные триплет-отклонения в его последовательностях  $n$ -плетных сумм от модельных гиперболических последовательностей. Эти отклонения происходят при значениях  $n$  кратных 3 ( $n = 3m$ ) (в генетическом коде именно триплеты кодируют аминокислоты белков).

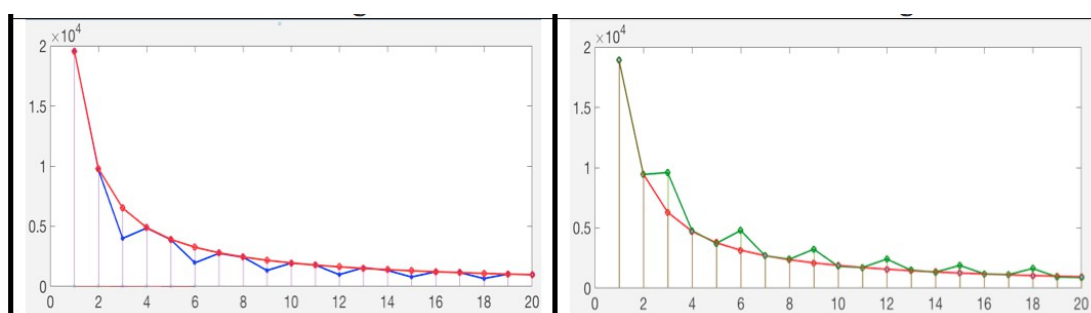
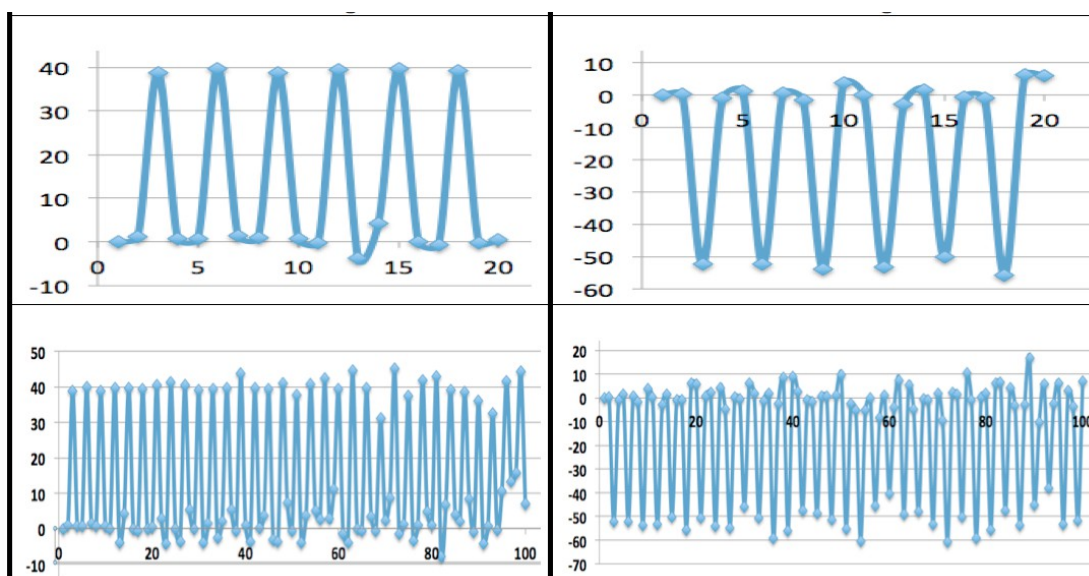


Рис. 8.4. Триплет-отклонения реальных количеств  $n$ -плетов относительно их модельных гиперболических последовательностей в 20 слоях ДНК-текста гена TTN, кодирующего длинный мышечный белок Титин. Слева показаны данные по группировке T1-олигомеров, а справа – по группировке G1-олигомеров (из препринта [Petoukhov, 2021a]).

Эти триплет-отклонения при  $n = 3m$  не случайны и также лежат на гиперболах, но закономерно сдвинутых. Поражает регулярность и

согласованность триплет-отклонений с величиной до 50% в противоположных направлениях для разных классов  $n$ -плетов (Рис. 8.5).



**Рис. 8.5.** Процентные представления высокорегулярных ритмических последовательностей триплетных отклонений реальных количеств  $n$ -плетов, которые принадлежат к группировкам  $T_1$ -олигомеров (слева) и  $G_1$ -олигомеров (справа), от соответствующих модельных гиперболических значений  $19569/n$  и  $18901/n$  в гене *TTN* мышечного белка Титина. Здесь  $n = 1, 2, 3, \dots, 20$  (верхний ряд) и  $n = 1, 2, 3, \dots, 100$  (нижний ряд), как показано по осям абсцисс. Оси ординат показывают процент отклонений от значений модели, принятых за 100% (взято из препринта [Petoukhov, 2021a], содержащего дополнение).

Модельные гиперболические последовательности  $S_A(1)/n$ ,  $S_T(1)/n$ ,  $S_C(1)/n$  и  $S_G(1)/n$  (Рис. 8.2) выступают математическими стандартами для гиперболических правил сумм количеств  $n$ -плетов в разных геномах. Эти гиперболические последовательности отличаются только величиной числителей. Нормировка этих последовательностей делением на величины числителей приводит их к исторически известной **гармонической прогрессии**:

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots, 1/n \quad (8.1)$$

Свое имя она получила в силу связи с гармониками в музыке и длинами стоячих волн в колеблющейся струне.

Гармоническая прогрессия (8.1) изучалась Пифагором, Лейбницем, Ньютоном, Эйлером, Фурье, Дирихле, Риманом в связи с разными задачами математики и физики. Ныне гармоническая прогрессия неожиданно проявила себя во всех протестированных геномах, то есть в информационных основах живой материи.

Гармоническая прогрессия со времен Пифагора связывается с гармониками музыки и стоячими волнами в резонаторах. Это позволяет предполагать, что связь гармонической прогрессии с численной фрактальной структурой спиральных ДНК-текстов имеет резонансную природу и отражает

существование некоей системы стоячих волн. Данное предположение согласуется с гипотезами о том, что спиральные ДНК являются спиральными антеннами электромагнитных волн, а потому, как и другие спиральные хиральные биомолекулы, эмитируют и адсорбируют электро-магнитные волны определенной круговой поляризации, которая обеспечивает биомолекулам возможность обмена радиоволнами избирательной поляризации. Это также согласуется с авторской концепцией мульти-резонансной генетики [Petoukhov, 2016].

Аналог спиральной антенны обнаружен шведскими учеными в хвостовой части сперматозоида. Высказано мнение, что эти спирали выступают в роли камеры видеонаблюдения для обхождения сперматозоидом препятствий и поиска яйцеклетки [Zabeo et al., 2018].

Антенно-подобные спиральные структуры участвуют в биомеханике координированных движений. Например, одноклеточный организм *Mixotricha paradoxa* движется за счет находящихся на его поверхности 250 тысяч спиральных бактерий *Treponema Spirochetes*, спиральные жгутики которых согласованно скручиваются как единое целое, обеспечивая целенаправленное движение.

Электрические и механические колебания в живых телах тесно связаны, поскольку многие их структуры являются пьезоэлектриками: нуклеиновые кислоты, актин, дентин, сухожилия, кости, и пр. Тем самым, электро-магнитные феномены сопровождаются феноменами вибрационной механики.

К теме о давно предполагаемой структурной связи живых тел с музыкальной гармонией, сопряженной с гармонической последовательностью (8.1), можно привести следующую цитату из книги [Шноль, 1989, с.75]: *«Из возможных следствий взаимодействия макро-молекул ферментов, осуществляющих [циклические] конформационные колебания, рассмотрим пульсации давления – звуковые волны. Диапазон чисел оборотов большинства ферментов соответствует слышимым звуковым частотам. Некую, пока еще фантастическую картину «музыкальных взаимодействий» биохимических систем, клеток, органов, и возможную роль этих взаимодействий в жизнедеятельности мы рассмотрим подробнее... Это наводит на приятные размышления о природе слуха, происхождении музыкального восприятия и о многом другом, что уже принадлежит области биохимической эстетики».*

Вопросами сродства генетической гармонии организмов с музыкальной гармонией и ее математикой занимается наша группа в «Центре междисциплинарных исследований музыкального творчества» Московской государственной консерватории им. П.И.Чайковского, существующего с 2012 года (<http://www.mosconsrv.ru/ru/groups.aspx?id=135683>); научный руководитель Центра – декан композиторского факультета проф. А.А.Кобляков). Глубокая связь музыки с математикой давно утверждалась мыслителями.



Например, Г. Лейбниц полагал, что «музыка есть арифметика души, которая вычисляет, сама того не сознавая».

Характерно, что в живой природе информация на разных уровнях организации передается в виде цепевидных текстов: цепи нуклеотидов ДНК, белковые цепи аминокислот, последовательности импульсов в нейронах, литературные тексты, музыкальные тексты. Геномные ДНК-тексты с их гештальт-правилами могут рассматриваться как метатексты при анализе биологических текстов различного вида.

### 9. О геометриях, физиологии и искусственном интеллекте

В отношении генетически наследуемой мозговой деятельности математик и специалист по когнитивным наукам Д.Хофштадтер пишет [Hofstadter, 1980, p. 612]:

*«Каждый математик чувствует, что в математике существует некая метрика, объединяющая идеи, – что вся математика есть сеть результатов, которые соединены между собой огромным количеством связей. ... Имей мы возможность ввести это высокоразвитое ощущение математической близости – «ментальную метрику математика»... – в программу, мы могли бы создать примитивного «искусственного математика».*

В.В.Налимов, заместитель А.Н.Колмогорова по лаборатории теории вероятностей мехмата МГУ, указывает в книге [Налимов, 2015]: *«В связи с проблемой искусственного интеллекта обострился интерес к представлению о метрике пространств математического мышления. ... Искусственный интеллект мог бы быть сближен с математическим мышлением, если бы оказалось возможным осознать метрические свойства пространства мышления человека.... мы готовы идти дальше и говорить, что само сознание структурировано геометрически: экзистенциально человек геометричен. ... Желая усилить аргументацию этого утверждения, мы обратим здесь внимание на геометрическую обусловленность зрительного восприятия. Наше зрительное восприятие – это не автоматическое перенесение внешнего Мира в наше сознание, а его сложное воспроизведение, отвечающее определенным геометриям. Эта тема обстоятельно рассмотрена в книге [Петухов, 1981] .... Несколько перефразируя суждение Петухова, мы можем сказать, что в нашем сознании при построении текстов, через которые мы воспринимаем Мир, происходит что-то очень похожее на то, что происходит в морфогенезе. Мы готовы увидеть в глубинах сознания те же геометрические образы, которые раскрываются в морфогенезе».*

Налимов также добавляет в связи со сказанным о геометричности живых тел: *«Опираясь на приведенные в книге [Петухов, 1981] материалы, отметим прежде всего, что еще в сороковых годах Р. Лунбург [Lunenburg, 1947, 1948, 1950] высказал экспериментально обоснованное утверждение о том, что*

*пространство зрительного восприятия у человека характеризуется геометрией Лобачевского. Позднее это высказывание нашло широкий и благоприятный отклик. Особенно обстоятельная проверка концепции Лунбурга была осуществлена в работе [Kienle, 1964] в 1960-х годах. Серьезное применение геометрический подход нашел в цветоведении. Известный физик Э. Шрёдингер [Schrödinger, 1920], занимавшийся и теорией зрения, опирался на представления проективной геометрии при изучении физиологических законов смешения цветов. Г. фон Шеллинг [von Shelling, 1955; 1956 a, b; 1960; 1964] ввел неевклидову метрику для описания цветовосприятия и построил перцепционную теорию относительности по аналогии с представлением о пространственно-временном многообразии в специальной теории относительности. Г. Резников [Reznikoff, 1974] обратился к дифференциальной геометрии при изучении цветовосприятия. Даже из такого беглого обзора следует, что зрительное восприятие Мира – это его отображение через тексты нашего сознания, построенные на совсем нетривиальных геометриях».*

Вопросам применения неевклидовых геометрий и алгебры Клиффорда для моделирования специфической организации работы мозга посвящены публикации [Labunets, 2003; Labunets, Rundblad, Astola, 2002].

Обнаружение описанных выше закономерностей связи генетической системы с широким множеством бинарных тетрагруппировок вызывает ассоциации с концепцией Ю.И. Кулакова о бинарных эйдосах (черных и белых, мужских и женских) как основе законов физики и геометрии [Кулаков, 1968]. Продолжение работ Ю.И.Кулакова и его соратника Г.Г.Михайличенко в бинарной геометрофизике Ю.С.Владимирова [Владимиров, 2009, 2020, 2021] связано с важным понятием предгеометрии в теории систем отношений. По отношению к этой предгеометрии понятия пространства и времени являются вторичными. Очень похоже на то, что генетическая система с ее первичными системами бинарных отношений построена именно на их предгеометрии. При таком понимании из этой бинарной генетической предгеометрии должны вытекать в качестве вторичных биологические время и пространство организмов. К теме бинарных отношений в генетике напомним, что физиология активных тканей строится на фундаментальном бинарном законе «все или ничего»: нервная клетка и мышечная единица дают ответы только «да» или «нет» на действия различных стимулов. На подпороговые стимулы они не реагируют, а на надпороговые реагируют полной амплитудой. Крокодильчики и черепашки, вылупившись из яйца и не имея опыта работы с пространством и временем, сразу ползут к воде вполне координированными движениями за счет генетически наследуемой согласованной активности миллионов их бинарно работающих нервных и мышечных клеток, напоминающей согласованную работу триггеров при выполнении компьютерных программ. Вопросы такой наследуемой согласованности на основе гено-логического кодирования в свете

задач алгебраической биологии рассматриваются в статье [Petoukhov, Petukhova, 2017].

***10. Теория Фрелиха о коллективных квантовых  
эффектах в биологических системах по аналогии с квантовым  
конденсатом Бозе-Эйнштейна***

Изложенные выше и другие результаты авторского исследования системы генетического кодирования свидетельствуют о наличии дальнедействующих связей в составе геномных ДНК-текстов, а также о квантовой информационной сущности генетической системы и живых организмов в целом [Петухов, 2020a,b,c]. Автор полагает, что эти результаты связаны с популярной колебательно-резонансной теорией Г. Фрелиха о дальнедействующей когерентности в биологических системах, то есть о коллективных квантовых эффектах в биологических системах [Frohlich, 1978, 1980, 1988; Frohlich, Kremer, 1983]. Нобелевский лауреат Р. Пенроуз использует теорию Фрелиха для обоснования своих представлений о мозге как квантовом компьютере и пишет о нем следующим образом [Пенроуз, 2005, с. 540, 561, 568]. Выдающийся физик Герберт Фрелих (который в 1930-х годах совершил один из фундаментальных прорывов в понимании низкотемпературной сверхпроводимости) предположил возможную роль коллективных квантовых эффектов в биологических системах. В 1968 году Фрелих предложил полагать, что внутри активных клеток должны быть вибрационные эффекты, которые будут резонировать с микроволновым электромагнитным излучением с частотой  $10^{11}$  Гц в результате феномена биологической квантовой когерентности. Вместо того, чтобы требовать низкой температуры, эффекты возникают из-за наличия большой энергии метаболического влечения. В настоящее время существуют некоторые достоверные данные наблюдений во многих биологических системах, подтверждающие именно тот эффект, который Фрелих предсказал в 1968 году. Он утверждал, что пока энергия метаболического влечения достаточно велика, а диэлектрические свойства соответствующих материалов являются достаточно экстремальными, то существует возможность крупномасштабной квантовой когерентности, аналогичной той, которая возникает в явлениях сверхпроводимости и сверхтекучести - иногда называемых конденсацией Бозе-Эйнштейна - даже при относительно высоких температурах, присутствующих в биологических системах. В конденсате Бозе-Эйнштейна (который также возникает при действии лазера) большое количество частиц коллективно участвует в одном квантовом состоянии. Для этого состояния существует волновая функция, подходящая для отдельной частицы, но теперь она применяется сразу ко всей совокупности частиц, которые участвуют в этом состоянии. В конденсате Бозе-Эйнштейна вся система, содержащая большое количество частиц, ведет себя как единое целое по аналогии с квантовым

состоянием отдельной частицы, за исключением того, что все масштабируется соответствующим образом. Существует согласованность в большом масштабе, где многие странные особенности квантовых волновых функций реализуются на макроскопическом уровне.

Ф. Фрелих (сын Герберта Фрелиха) написал статью «Генетический код как язык» о состояниях квантовой когерентности и дальнедействующей коммуникации в геномах. В ней он отметил: *«Помимо хромосомы, геном в целом должен содержать какую-то связь на большом расстоянии, чтобы не производить на одном участке антигены, продуцируемые на других участках. Таким образом, существует сложность сущностей, которые по-разному используют генетический язык. Можно сказать, что существует логика клеток»* [Fröhlich F., 1988, p. 194]. Гипотеза Г. Фрелиха *«предполагает, что дальнедействующие когерентные колебания приведут к резонансу между дифференцированной клеткой с ее собственными характерными колебаниями и хромосомой, так что специфическая для хромосомы область, реагирующая на эту характеристическую частоту, будет активирована или открыта, чтобы она могла производить соответствующие белки. Такой резонанс мог бы транспортировать эмбриологические, уже частично индуцированные клетки, к их мишени, и там они будут дополнительно зафиксированы для производства правильных белков для этого органа посредством наложенного резонанса, и поэтому, если бы он был слишком зрелым, он не мог бы так адаптироваться. Степени резонанса могут быть разными»* [там же, с. 199]. *«Это было сделано более конкретно в случае деления клеток во время митоза, где была выдвинута гипотеза о том, что соответствующие хромосомы выстраиваются в линию посредством резонанса с одинаковой частотой, обнаруживая друг друга из очевидной путаницы генома посредством связи на большие расстояния* [Holland, 1972]. Резонансные колебания притягивают подобное к подобному. В более общем плане может существовать какое-то связанное дальнедействующее взаимодействие между членами генома, создающее самомаркировку. Если это ломается в результате последующих мутаций, возникают аутоиммунные заболевания» [там же, с. 203]. Данные цитаты из статьи Ф. Фрелих о роли резонансов в геномах согласуются с концепцией мульти-резонансной генетики в статье [Petoukhov, 2016] и описанными выше авторскими данными о геномных гештальт-правилах.

Синхронные крупномасштабные коллективные колебания Фрелиха подразумевают межклеточное микроволновое излучение, которое будет представлять собой нехимическое и нетепловое взаимодействие между клетками [Vasconcellos et al, 2012]. Сообщалось о некоторых доказательствах нетеплового влияния когерентного микроволнового излучения на конформационное состояние генома у *E. coli* [Nyland, 1998], которые могут указывать на то, что *«хромосомная ДНК может быть целью миллиметрового микроволнового излучения внутри этой системы. Кроме того,*

низкоинтенсивное микроволновое облучение лейкоцитов приводит к значительному увеличению биофотонного излучения в оптическом диапазоне, источником которого считается ДНК. Также стоит отметить возможное влияние концепции биокогерентности на очень конкретную дипольную систему, которой является вода. Можно рассматривать возможность того, что биологическая вода сама может поддерживать когерентные дипольные возбуждения, распространяющиеся на мезоскопические области; таким образом, вода, вместо пассивного растворителя, заполняющего пространство, могла бы занять важное особое положение, полное значение которого еще не выяснено» [Vasconcellos et al, 2012].

Живые организмы на Земле подвергаются воздействию целого спектра модальностей электромагнитного излучения, связанных с физическим строением Земли и положением нашей планеты в солнечной и галактической системах. В статье [Geesink, Meijer, 2016] представлены результаты обширного обзора литературы, включающего 175 статей с 1950 по 2015 год, посвященных влиянию электромагнитного излучения на живые системы *in vitro* и *in vivo*. Эти результаты указывают на то, что некоторые типичные дискретные когерентные частоты электромагнитных волн способны стабилизировать клетки, тогда как другие вызывают явную дестабилизацию. Эти авторы пишут: «Мы находим поддержку в отношении гипотезы Г. Фрëлиха о том, что управляемый набор осцилляторов конденсируется в широком диапазоне энергий и может активировать колебательный режим в живых организмах при комнатной температуре. Принимая во внимание поддерживающие жизнь частоты, взятые из литературы, был выведен алгоритм когерентных частот стоячих волн для устойчивости биологического порядка. Интересно, что мы обнаружили, что к происхождению конкретного биологического алгоритма можно математически приблизиться с помощью выбранной эталонной «темперированно пифагорейской» акустической шкалы. Этот алгоритм выражает одномерные волновые уравнения, известные для колеблющихся струн». Эти результаты, сопряженные со стоячими волнами, можно рассматривать как имеющие тесную корреляцию с описанными выше результатами автора о связи гармонической прогрессии (8.1) с геномами высших и низших организмов.

Кроме того, статья [Geesink, Meijer, 2016] напоминает, что Г. Фрëлих заявлял о колебательных зарядах в термальном ванне, в которой большое количество квантов может конденсироваться в одно состояние, известное как Бозе-конденсат, который может составлять физический и нетепловое взаимодействие между клетками. Эти авторы отмечают, что связь между «живой» и неживой материей также была установлена Вольфгангом Паули. Он заявил, что ментальная и материальная области регулируются общими принципами упорядочения и могут быть поняты как «взаимодополняющие аспекты одной и той же реальности» [Pauli, 1994]. Другими словами, аналогию

с конденсатом Бозе-Эйнштейна можно распространить и на мысленную область.

Развитие представлений о живых телах как особых аналогах квантового конденсата Бозе-Эйнштейна может привести к новому пониманию древних представлений восточных культур об энергии ци (или ци), циркулирующей в живых телах. Дополнительное Приложение в конце данной статьи посвящено связям генетической системы с древними доктринами восточной культуры, отображенными в схемах Инь-Ян древнекитайской книги «И Цзин» и 4-секционных мандалах буддистов, индуистов и представителей других религий.

### *Заключение*

Задачи развития систем искусственного интеллекта, воспроизводящих в той или иной степени свойства естественного интеллекта человека и животных, требуют изучения генетически наследуемой способности живых организмов к интеллектуальной деятельности [Петухов, 2021; Петухов, Толоконников, 2020]. Представленные в статье результаты анализа системы молекулярно-генетического кодирования отражают стремление автора понять алгебраические особенности закономерно структурированной системы генетического кодирования.

Описанные закономерности процентных сумм  $n$ -плетов в слоях ДНК-текстов геномов высших и низших организмов согласуются с утверждением П.Йордана, автора термина “квантовая биология”, о том, что пропущенные наукой законы жизни являются правилами вероятностей квантового мира [Jordan, 1932; McFadden, Al-Khalili, 2018]. Полученные автором результаты показывают существование ранее неизвестных генетических закономерностей. Эти результаты были получены на основе новых методов анализа и моделирования ДНК-текстов, связанных с математическими формализмами квантовой механики и квантовой информатики, алгебрами многомерных гиперкомплексных чисел, метрическим анализом и теорией помехоустойчивого кодирования информации. Изложенные результаты могут быть использованы, в частности, для углубления наших знаний о мозговой деятельности.

Учитывая слова Йордана и Шредингера о диктаторской роли структурированной информатики генетических молекул для всего организма [McFadden, Al-Khalili, 2018], естественно думать, что структурные особенности ДНК-информатики накладывают свой отпечаток на все генетически унаследованные биологические системы и явления. Это согласуется с тем фактом, что все физиологические системы должны быть структурно согласованы с генетическим кодированием, чтобы передаваться в генетически закодированной форме потомству. Это также согласуется с точкой зрения, что основная задача живых организмов - передача генетической информации по цепи поколений. Описанные алгебро-генетические результаты свидетельствуют о том, что система генетического кодирования основана на методах

вероятностного кодирования типа арифметического кодирования, которые сейчас изучаются в лаборатории автора.

Шредингер писал: *«Для организма следует ожидать новых законов. ... все известное нам о структуре живой материи заставляет ожидать, что деятельность живого организма нельзя свести к проявлению обычных законов физики ... потому, что его структура отличается от всего изученного нами до сих пор в физической лаборатории»* [Шредингер, 1972 с. 77].

Для сравнения, ферменты в живых организмах работают в миллионы раз эффективнее, чем лучшие катализаторы в лабораториях. То, что делает фермент в живом теле за 1 секунду, катализатор в лаборатории может сделать только за 100 тысяч лет. Насколько мы понимаем, найденные гештальт-правила «диктаторских» ДНК-текстов не выводятся из известных законов физики, а потому относятся к тем законам структуризации живого, о которых говорил Шредингер, отмечая дополнительно следующее: *«Именно со статистической точки зрения структура важнейших частей живого организма полностью отличается от структуры любого вещества, с которым мы, физики и химики, имели до сих пор дело практически в наших лабораториях и теоретически за письменным столом»* [Шредингер, 1972, с. 14].

Эта статья посвящена алгебраическим гештальт-феноменам статистического характера в генетике, то есть генетическим феноменам, в которых реализуется один и тот же целостный паттерн для множества различных наборов его составных частей. Попутно можно отметить, что физика и другие науки основаны на открытии присущих им гештальт-феноменов. Например, закон Кулона в физике показывает существование устойчивой картины силового взаимодействия в системах, состоящих из различных наборов заряженных частиц. Другими словами, человеческое познание мира происходит через открытие в нем гештальт-феноменов.

В целом представленные результаты авторских исследований структурных закономерностей генетической информатики свидетельствуют об эффективности модельного подхода к живым организмам как квантово-информационным алгебро-гармоническим сущностям на модульных принципах. Исследования по алгебраической биологии и матричной генетике раскрывают связи генетики с алгебрами многомерных чисел и геометриями, которые полезны для совершенствования систем искусственного интеллекта.

Системы искусственного интеллекта можно пытаться создавать на десятках разных путей с разной степенью плодотворности разработок. Но здесь уместно вспомнить слова Декарта в его “Трактате о животном”: *“Нет более плодотворного занятия чем познание самого себя”*.

Желая усилить участие научного сообщества в развитии алгебраической биологии, напомним еще известное утверждение Тейяра де Шардена о том, что человек как «предмет познания» - «это ключ ко всей науке о природе» [Тейяр де Шарден, 1987].

### *Выводы*

- 1) Композитные ДНК-тексты геномов обладают описанными универсальными алгебраическими особенностями и неизвестными ранее симметриями.
- 2) Эти алгебраические особенности геномов позволяют развивать гештальт-генетику и выявлять структурные связи генетики с формализмами квантовой информатики.
- 3) Полученные результаты позволяют рассматривать живые организмы как квантово-информационные алгебро-гармонические сущности на блочных принципах.
- 4) Появляются новые подходы к анализу биологических текстов различного вида по аналогии с геномными.
- 5) Согласно полученным данным, биоинформатика базируется на вероятностных методах многослойного кодирования и обработки информации, формирующих из вероятностных последовательностей закономерные целостные образы (гештальт паттерны).
- 6) Результаты алгебраической биологии и матричной генетики желательно учитывать при совершенствовании систем искусственного интеллекта.

### **Приложение I.**

#### *Пример гештальт правил суммарных процентов n-плетов в бактериальном геноме*

В этом Приложении представлены данные о процентном содержании n-плетов в штамме ризобактерий *Bradyrhizobium japonicum* E109, полный геном, длиной 9224208 пар нуклеотидов (исходные данные взяты из <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/nucore/CP010313.1?report=genbank> длина этой последовательности более чем в 20 раз короче длины выше рассмотренной последовательности хромосомы человека №1). Рис. III.1-III.5 показывают матрицы феноменологических процентов 4 нуклеотидов, 16 дублетов, 64 триплетов и 256 тетраплетов в соответствующих слоях этой геномного ДНК-текста. Эти процентные матрицы для бактерий и процентные матрицы (рис. 2.2-2.5) для хромосомы человека №1 имеют сходные свойства для m-позиционных тетрагруппировок n-плетов, которые выражаются равенствами (3.1) и (3.2) .

$$\begin{array}{|c|c|} \hline C & A \\ \hline T & G \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \%C & \%A \\ \hline \%T & \%G \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 0.3184 & 0.1819 \\ \hline 0.1815 & 0.3182 \\ \hline \end{array}$$

*Рис. III.1. Преобразование символьной матрицы 4 нуклеотидов в численную матрицу процентов 4 нуклеотидов в случае ДНК-текста генома *Bradyrhizobium japonicum* strain E109.*



%CC	%CA	%AC	%AA
%CT	%CG	%AT	%AG
%TC	%TA	%GC	%GA
%TT	%TG	%GT	%GG

 $=$ 

0.0781	0.0587	0.0467	0.0367
0.0515	0.1302	0.0469	0.0517
0.0720	0.0145	0.1216	0.0719
0.0365	0.0584	0.0468	0.0779

Рис. III.2. Матрица феноменологических процентов 16 дуплетов в геномной ДНК последовательности дуплетов *Bradyrhizobium japonicum strain E109* (сравнить с Рис. 2.3).

%CCC	%CCA	%CAC	%CAA	%ACC	%ACA	%AAC	%AAA
%CCT	%CCG	%CAT	%CAG	%ACT	%ACG	%AAT	%AAG
%CTC	%CTA	%CGC	%CGA	%ATC	%ATA	%AGC	%AGA
%CTT	%CTG	%CGT	%CGG	%ATT	%ATG	%AGT	%AGG
%TCC	%TCA	%TAC	%TAA	%GCC	%GCA	%GAC	%GAA
%TCT	%TCG	%TAT	%TAG	%GCT	%GCG	%GAT	%GAG
%TTC	%TTA	%TGC	%TGA	%GTC	%GTA	%GGC	%GGA
%TTT	%TTG	%TGT	%TGG	%GTT	%GTG	%GGT	%GGG

0.0131	0.0154	0.0136	0.0129	0.0145	0.0083	0.0097	0.0068
0.0148	0.0344	0.0145	0.0185	0.0053	0.0182	0.0075	0.0126
0.0174	0.0040	0.0446	0.0328	0.0205	0.0043	0.0205	0.0106
0.0126	0.0183	0.0185	0.0343	0.0075	0.0144	0.0052	0.0146
0.0149	0.0133	0.0044	0.0021	0.0353	0.0210	0.0195	0.0153
0.0105	0.0323	0.0043	0.0039	0.0210	0.0443	0.0209	0.0171
0.0151	0.0020	0.0206	0.0133	0.0195	0.0044	0.0356	0.0150
0.0069	0.0125	0.0082	0.0153	0.0098	0.0133	0.0148	0.0133

Рис. III.3. Матрица феноменологических процентов 64 триплетов в геномной ДНК последовательности триплетов *Bradyrhizobium japonicum strain E109* (сравнить с Рис. 2.4).

.0023	.0025	.0033	.0030	.0052	.0017	.0035	.0021	.0022	.0037	.0018	.0019	.0023	.0023	.0016	.0015
.0026	.0057	.0038	.0055	.0014	.0051	.0027	.0045	.0029	.0058	.0024	.0022	.0015	.0036	.0019	.0018
.0048	.0011	.0119	.0082	.0066	.0011	.0081	.0030	.0014	.0006	.0057	.0050	.0025	.0010	.0045	.0028
.0039	.0052	.0048	.0096	.0021	.0044	.0018	.0052	.0014	.0019	.0029	.0047	.0018	.0022	.0015	.0039
.0036	.0024	.0016	.0004	.0141	.0072	.0094	.0057	.0042	.0044	.0010	.0006	.0053	.0043	.0026	.0026
.0020	.0090	.0015	.0004	.0073	.0162	.0085	.0091	.0035	.0085	.0012	.0016	.0039	.0072	.0035	.0019
.0056	.0005	.0068	.0037	.0082	.0016	.0173	.0055	.0024	.0005	.0048	.0034	.0018	.0006	.0058	.0036
.0019	.0043	.0022	.0055	.0035	.0051	.0059	.0056	.0019	.0027	.0024	.0039	.0015	.0013	.0030	.0027
.0027	.0031	.0035	.0031	.0012	.0009	.0006	.0005	.0059	.0062	.0048	.0047	.0058	.0036	.0042	.0029
.0035	.0057	.0034	.0036	.0006	.0016	.0005	.0005	.0059	.0173	.0049	.0067	.0018	.0081	.0025	.0057
.0040	.0010	.0103	.0092	.0017	.0004	.0013	.0010	.0069	.0013	.0167	.0102	.0098	.0017	.0070	.0040
.0027	.0030	.0050	.0082	.0011	.0011	.0006	.0010	.0045	.0080	.0058	.0118	.0024	.0066	.0014	.0047
.0036	.0031	.0007	.0004	.0065	.0033	.0035	.0031	.0037	.0036	.0010	.0007	.0094	.0065	.0037	.0035
.0026	.0058	.0006	.0004	.0043	.0069	.0044	.0024	.0026	.0095	.0010	.0016	.0053	.0141	.0041	.0036
.0028	.0005	.0047	.0030	.0036	.0009	.0061	.0032	.0040	.0005	.0048	.0034	.0059	.0011	.0059	.0027
.0015	.0021	.0020	.0029	.0024	.0016	.0036	.0026	.0016	.0034	.0018	.0033	.0023	.0052	.0021	.0024

Рис. III.4. Матрица феноменологических процентов 256 тетраплетов в геномной ДНК последовательности тетраплетов у *Bradyrhizobium japonicum strain E109* (сравнить с Рис. 2.5).

%C0.3184	%G0.3182	%A0.1819	%T0.1815
%CN0.3185	%GN0.3182	%AN0.1820	%TN0.1814
%NC0.3183	%NG0.3182	%NA0.1818	%NT0.1816
%CNN0.3197	%GNN0.3201	%ANN0.1806	%TNN0.1797
%NCN0.3166	%NGN0.3173	%NAN0.1836	%NTN0.1825
%NNC0.3189	%NNG0.3173	%NNA0.1815	%NNT0.1824
%CNNN0.3184	%GNNN0.3183	%ANNN0.1816	%TNNN0.1817
%NCNN0.3184	%NGNN0.3185	%NANN0.1816	%NTNN0.1815
%NNCN0.3185	%NNGN0.3181	%NNAN0.1823	%NNTN0.1811
%NNNC0.3182	%NNNG0.3180	%NNNA0.1820	%NNNT0.1818

*Рис. III.5. Проценты нуклеотидов C, G, A, T и сумм процентов n-плетов с этими нуклеотидами на их атрибутивных позициях в соответствующих тетрагруппировках n-плетов в случае геномной ДНК последовательности у *Bradyrhizobium japonicum* strain E109 (сравнить с Рис. 3.4).*

Что касается проекторных тетрагруппировок n-плетов в разных слоях геномной ДНК штамма E109 *Bradyrhizobium japonicum*, то, как было отмечено выше в выражениях (7.9) и (7.10), следующие равенства выполняются во всех 7 мозаичных матрицах дублетов и триплетов на рис. 7.3:

$$\Sigma\% \heartsuit \approx \Sigma\% \blacklozenge \approx 0.277, \quad \Sigma\% \spadesuit \approx \Sigma\% \clubsuit \approx 0.223$$

Например, в случае мозаичной (4\*4)-матрицы с тетрагруппировкой №1 для 16 дублетов (см. Рис. 7.3) для этой геномной ДНК появляются следующие процентные суммы, основанные на процентах дублетов на Рис. III.2:

$$\begin{aligned} \Sigma\% \heartsuit &\approx \%CA + \%CG + \%AA + \%AG \approx 0.0587 + 0.1302 + 0.0367 + 0.0517 \approx 0.277; \\ \Sigma\% \blacklozenge &\approx \%TC + \%TT + \%GC + \%GT \approx 0.0720 + 0.0365 + 0.1216 + 0.0468 \approx 0.277; \\ \Sigma\% \spadesuit &\approx \%CC + \%CT + \%AC + \%AT \approx 0.0781 + 0.0515 + 0.0467 + 0.0469 \approx 0.223; \\ \Sigma\% \clubsuit &\approx \%TA + \%TG + \%GA + \%GG \approx 0.0145 + 0.0584 + 0.0719 + 0.0779 \approx 0.223. \end{aligned}$$

## Приложение II

### *Об Инь-Ян схемах древнекитайской “Книги перемен” и 4-секционных мандалах в древних традициях*

В этом Приложении описаны аналогии между мозаичными генетическими матрицами на Рис. 7.9-7.11, которые связаны с описанными генетическими гештальтными феноменами и которые представляют расположение m-позиционных тетрагрупп из 64 триплетов, и знаменитой таблицей 64 гексаграмм из древнекитайской “Книги (циклических) перемен” (“И-Цзин”).

Система генетического кодирования содержит бинарно-оппозиционные структуры на разных уровнях своей организации. Как известно, древняя китайская «Книга перемен», написанная несколько тысяч лет назад, использовала систему символов Инь и Ян (эквиваленты чисел 0 и 1). Эта книга оказала мощное влияние на культуру, медицину и науку древнего Китая и ряда других стран. Система И-Цзин представлена схемами с 4 биграммami, 8 триграммами и 64 гексаграммами. Подобно этому, генетический код построен на молекулах ДНК с использованием 4 азотистых оснований, 16 дублетов и 64 триплетов. Структурные аналогии инь-янских схем И-Цзин с алфавитами ДНК давно отмечались различными авторами, в том числе видными генетиками: Стентом Г.С. в 1969 г. и Нобелевским лауреатом Ф. Джейкобом в 1977 г. Подробнее о таких аналогиях можно прочитать в публикациях [Петухов, 2008; Ну, Petoukhov, Petoukhova, 2017; Petoukhov, 1999; Petoukhov, He, 2010].

И-Цзин посвящено большое количество литературных источников. Многие из этих источников называют И-Цзин одним из величайших и самых загадочных творений человека. С точки зрения китайской культуры (самой древней из всех культур, продолжающих свое существование на Земле) И-Цзин представляет собой нечто еще более значительное: творение Сверхчеловека, воплотившего тайну Вселенной в специальных символах и знаках. Символы и принципы И-Цзин проникли во все сферы жизни традиционного Китая, от теоретических представлений и высокого искусства до предметов быта и украшений. Конфуций сказал: *«Если бы можно было продлить свои годы, я бы отдал пятьдесят из них на изучение И-Цзин»* [Щуцкий, 1997]. И-Цзин провозглашает универсальность циклического принципа организации в природе. Традиционная восточная медицина с ее акупунктурой, тибетской диагностикой по пульсу и пр. основана на положениях, изложенных в этой книге.

Многие западные ученые изучали и использовали И-Цзин. Например, создатель аналитической психологии К. Юнг разработал свое учение о коллективном бессознательном в связи с этой книгой. По словам Юнга и его соратника, лауреата Нобелевской премии по физике В. Паули, триграммы и гексаграммы И-Цзин *«фиксируют универсальный набор архетипов (врожденных психических структур)»* [Щуцкий, 1997, с. 12]. Нильс Бор выбрал символ Инь-Ян в качестве своего герба. Многие современные физики, ощущающие единство мира, связывают свои теории с идеями традиционной восточной культуры, объединяющей всю природу. Например, это отражено в названии «восьмеричный путь» известной книги [Gell-Mann, Ne'eman, 1964]. Интенсивное развитие самоорганизующейся и нелинейной динамики сложных систем способствует усилению внимания западных ученых к традиционному восточному мировоззрению (например, см. [Капра, Луизи, 2000]). Специальные группы изучают И-Цзин во многих восточных и западных университетах. Несколько конференций «И-Цзин и современные науки» были проведены в

Москве. Подобным исследованиям посвящено огромное количество сайтов в Интернете. Влияние И-Цзин широко представлено в современной жизни восточных стран. Например, на государственном флаге Южной Кореи изображены триграммы. Во многих специализированных школах преподаватели обучают студентов методическим аспектам практического применения актуальных древних знаний в медицине и других областях.

Согласно древним китайцам, «триграммы, гексаграммы и их компоненты во всех возможных комбинационных комбинациях образуют универсальную иерархию классификационных схем. Эти схемы в визуальных образцах охватывают любые аспекты реальности - пространственные части, временные интервалы, элементы, числа, цвета, органы тела, социальные и семейные условия и т. д.» [Щуцкий, 1997, с. 10]. Древние китайцы утверждали, что эта таблица из 64 гексаграмм (Рис. III.1) является универсальным архетипом природы. Древние китайцы ничего не знали о генетическом коде, но генетический код во многих аспектах устроен в соответствии с И-цзин.

Следует отметить, что И-Цзин был написан за несколько тысяч лет до появления современных Академий наук. Эта книга представляет собой набор утверждений неясного происхождения. С точки зрения современной науки книга обосновывает универсальное соответствие ее утверждений устройству природы без их соответствующего обоснования. Исторически сложилось так, что западная академическая наука и ее научные законы (например, законы Ньютона) развивались без какой-либо связи с И-Цзин на основе другой методологии, хотя состояния озарения, в которых человек внезапно получает полную картину ответа на его вопросы, хорошо известны и в западной науке.

В И-Цзин прерывные и непрерывные (сплошные) линии символизируют Инь и Ян соответственно. Основная таблица в И-Цзин - знаменитая квадратная таблица из 64 гексаграмм в порядке Фу-Си (Рис. III.1), которую китайская традиция считает универсальным природным архетипом. Каждая гексаграмма представляет собой стопку из шести прерывных и непрерывных линий. Согласно западной традиции, эти прерывные и непрерывные линии показаны в виде двоичных символов «0» и «1», и каждая гексаграмма представляет собой последовательность таких шести двоичных символов. На Рис. III.1 показаны гексаграммы в обеих этих формах. Каждая позиция во всех гексаграммах имеет свой индивидуальный номер: в западном числовом представлении позиции двоичных символов гексаграмм нумеруются слева направо числами от 1 до 6; в китайском графическом представлении нумерация линий каждой гексаграммы читается в последовательности снизу вверх.

	111  CHYAN	110  TUI	101  LI	100  CHEN	011  HSUN	010  KAN	001  KEN	000  KUN
111  CHYAN	111111 	111110 	111101 	111100 	111011 	111010 	111001 	111000 
110  TUI	110111 	110110 	110101 	110100 	110011 	110010 	110001 	110000 
101  LI	101111 	101110 	101101 	101100 	101011 	101010 	101001 	101000 
100  CHEN	100111 	100110 	100101 	100100 	100011 	100010 	100001 	100000 
011  HSUN	011111 	011110 	011101 	011100 	011011 	011010 	011001 	011000 
010  KAN	010111 	010110 	010101 	010100 	010011 	010010 	010001 	010000 
001  KEN	001111 	001110 	001101 	001100 	001011 	001010 	001001 	001000 
000  KUN	000111 	000110 	000101 	000100 	000011 	000010 	000001 	000000 

*Рис. III.1. Таблица 64 гексаграмм в порядке Фу-Си, где каждая гексаграмма показана в символической китайской традиции, а также в двоичном европейском представлении: каждая сплошная или прерывная линия соответствует цифрам 1 или 0. Также показаны китайские названия триграмм.*

В таблице 64 гексаграмм (Рис. III.1) 8 триграмм (трехразрядные двоичные числа или стопки из трех черт) обозначают ее строки и столбцы. Каждая из гексаграмм представляет собой соединение двух триграмм: триграммы, нумерующей ее строку, и триграммы, нумерующей ее столбец. Следует подчеркнуть, что именно по аналогичной схеме нумерации столбцов и строк троичными цифровыми символами автором построена (8\*8)-матрица 64 триплетов генетического кода на Рис. 2.2 в данной статье. По этой аналогии каждый из 64 генетических триплетов на Рис. 2.2 может быть обозначен 6-битным двоичным числом; например, триплет САС обозначается двоичным числом 111101 [Петухов, 2008; Petoukhov, He, 2010]. Традиционная китайская точка зрения на гексаграммы гласит: «Гексаграммы - это не триграммы, сплавленные вместе, а две триграммы, расположенные вертикально одна над другой» [Щуцкий, 1997, с. 101].

Изучим некоторые аналогии между таблицей 64 гексаграмм (Рис. III.1) и генетической мозаикой (8\*8)-матриц (Рис. 6.1-6.3), которые представляют расположение в них *m*-позиционных тетрагруппировок 64 триплетов.

Ключевым элементом для выявления этих аналогий является следующая древняя китайская доктрина о важной роли пар корреляционных позиций 1-4, 2-5 и 2-6 в китайских гексаграммах: «Теория И-Цзин считает, что дно триграмма касается внутренней жизни... а верхняя триграмма относится к внешнему миру.... Подобные позиции в верхней триграмме и в нижней триграмме имеют самое близкое отношение друг к другу. Из-за этого первая позиция относится по аналогии к четвертой позиции, вторая позиция - к пятой позиции, а третья позиция по аналогии с шестой позицией.... Если эти корреляционные позиции (1-4, 2-5, 3-6) заняты разными линиями, считается, что между ними «существует соответствие», а в случае, когда эти корреляционные позиции заняты идентичными линиями, считается считал, что между ними «нет соответствия»» [Щуцкий, 1997, с. 86].

Рис. III.2-III.4 показывают таблицу 64 гексаграмм (из Рис. III.1) с европейскими обозначениями гексаграмм двоичными числами. Пары двоичных цифр, которые находятся в гексаграммах в соответствующих корреляционных позициях 1-4, 2-5 и 3-6, выделены 4 цветами: синий цвет соответствует паре цифр 1 и 1; красный цвет соответствует паре чисел 1 и 0; желтый соответствует паре цифр 0 и 1; зеленый цвет соответствует паре чисел 0 и 0. Эти 4 пары цифр, стоящие в указанных позициях, определяют принадлежность каждой гексаграммы к той или иной группировке гексаграмм в их соответствующей тетрагруппировке 64 гексаграмм:

- 1-позиционная тетрагруппировка гексаграмм и 16 членов каждой из ее 4 группировок определяются по корреляционным позициям 1-4 гексаграмм, на которых расположены указанные атрибутивные пары чисел 0-0, 0-1, 1-0 и 1-1 (Рис. III.2);

- 2-позиционная тетрагруппировка гексаграмм и 16 членов каждой из ее 4 группировок определяются по корреляционным позициям 2-5 гексаграмм, на которых расположены указанные атрибутивные пары чисел 0-0, 0-1, 1-0 и 1-1 (Рис. III.3);

- 3-позиционная тетрагруппировка гексаграмм и 16 членов каждой из ее 4 группировок определяются по корреляционным позициям 3-6 гексаграмм, на которых расположены указанные атрибутивные пары чисел 0-0, 0-1, 1-0 и 1-1 (Рис. III.4).

На каждом из Рис. III.2-III.4, члены каждой из 4 группировок названных *m*-позиционных тетрагруппировок выделены соответственно 4 цветами. Расположение этих 4 цветов в соответствующих корреляционных позициях (1-4, 2-5 и 3-6) в 64 гексаграммах полностью совпадает с тем расположением 4 символов ♠, ♥, ♦ и ♣ в показанных генетических матрицах 64 триплетов, которое связано с описанными геномными гештальт-феноменами вероятностей и которое представляет расположение 64 триплетов в случаях 1-позиционной тетрагруппировки (Рис. III.2), 2-позиционной тетрагруппировки (Рис. III.3) и 3-позиционной тетрагруппировки (Рис. III.4). Точнее, во всех этих взаимно

соответствующих  $m$ -позиционных тетрагруппировках из 64 триплетов и 64 гексаграмм символ ♠ соответствует гексаграммной паре цифр 1 и 1; символ ♥ соответствует паре гексаграмм 1 и 0; символ ♦ соответствует паре 0 и 1; символ ♣ соответствует паре 0 и 0.

*Рис. III.2. Идентичность расположения 1-позиционной тетрагруппировки 64 генетических триплетов в генетической матрице (из Рис. 6.1) и расположения 1-позиционной тетрагруппировки 64 гексаграмм в древнекитайской таблице И-Цзин; эта тетрагруппировка определяется четырьмя бинарными парами (1 и 1, 1 и 0, 0 и 1, 0 и 0), стоящими внутри гексаграмм в их традиционных корреляционных положениях 1-4. Члены каждой из 4 группировок отмечены своим цветом.*

*Рис. III.3. Идентичность расположения 2-позиционной тетрагруппировки 64 генетических триплетов в генетической матрице (из Рис. 6.2) и расположения 2-позиционной тетрагруппировки 64 гексаграмм в древнекитайской таблице И-Цзин; эта тетрагруппировка определяется четырьмя бинарными парами (1 и 1, 1 и 0, 0 и 1, 0 и 0), стоящими внутри гексаграмм в их традиционных корреляционных положениях 2-5. Члены каждой из 4 группировок отмечены своим цветом по аналогии с предыдущим рисунком.*



*Рис. III.4. Идентичность расположения 3-позиционной тетрагруппировки 64 генетических триплетов в генетической матрице (из Рис. 6.3) и расположения 3-позиционной тетрагруппировки 64 гексаграмм в древнекитайской таблице И-Цзин; эта тетрагруппировка определяется четырьмя бинарными парами (1 и 1, 1 и 0, 0 и 1, 0 и 0), стоящими внутри гексаграмм в их традиционных корреляционных положениях 3-6. Члены каждой из 4 группировок отмечены своим цветом.*

Параллели, показанные на Рис. III.2-III.4, дают свидетельства того, что обнаруженные геномные гештальт феномены вероятностей структурно связаны со схемами И-Цзин, включая таблицу 64 гексаграмм. Здесь можно снова вспомнить, что создатель аналитической психологии К. Юнг и его соратник, лауреат Нобелевской премии по физике В. Паули, которые были экспертами по И-Цзин, считали, что триграммы и гексаграммы И-Цзин «фиксируют универсальный набор архетипов (врожденных психических структур)» [Щуцкий, 1997, с. 12]. Соответственно, все эти данные подтверждают, в частности, что обнаруженные генетические гештальт-феномены и описанные генетические гештальт-правила имеют глубокое отношение к свойствам генетически унаследованных психологических феноменов и к богатой теме архетипов природы.

Дополнительно можно упомянуть, что матрицы из 4 биграмм, 16 тетраграмм и 64 гексаграмм И-Цзин могут быть представлены как взаимосвязанные члены тензорного семейства матриц по аналогии с тензорным семейством генетических матриц  $n$ -плетов на Рис. 2.2 (подробнее см. в книге [Петухов, 2008]). Такие тензорные семейства различных  $(2^n * 2^n)$ -матриц позволяют искать новые «врожденные психические структуры» и архетипы природы.

И-Цзин еще называют «Книгой циклических перемен». Автором отмечается существование связи между различными ансамблями двоичных чисел в таблице 64 гексаграмм, основанной на логической операции сложения по модулю 2. Например, ансамбли двоичных чисел из разных частей тетрагруппировки, показанной на рис. III.2, преобразуются друг в друга на основе этой логической операции. В частности, те два ансамбля двоичных чисел таблицы 64 гексаграмм, расположение которых соответствует расположению символов ♠ и ♦ в мозаичной матрице, представляющей 1-позиционную тетрагруппировку 64 генетических триплетов на рис. III.2, преобразуются друг в



друга логической операцией сложения по модулю 2 двоичного числа 100000 с членами ансамблей. Отдельной интересной темой является изучение циклических бинарных отношений между различными тетрагруппировками в матрицах, представляющих генетические гештальт-феномены.

Интересно отметить, что числа 2 и 3, которые в ДНК и РНК выступают числами водородных связей комплементарных нуклеотидов, являлись основой древнекитайской арифметики.

Остановимся еще на давно отмечаемых структурных аналогиях ДНК алфавитов с 4-секционными мандалами, сопряженными со схемами И-Цзин (Рис. III.5). На протяжении тысячелетий миллионы буддистов, индуистов и других верующих создавали мандалы как инструмент медитации для достижения «просветления» и исцеления. Создатель аналитической психологии К. Юнг и его соратник В. Паули считали мандалу врожденным архетипом бессознательного и сопряжением космограммы с психограммой, способным гармонизировать психику приведением к тождеству всех жизненных оппозиций. Юнг говорил о психической целостности как «Самости, которая проявляется во множественности, так называемой четверичности... Мандала – изображение психического процесса, воссоздание нового центра личности. Символически изображается при помощи круга, симметричного расположения некоего четырехкратного количества. В ламаизме и тантра-йоге является инструментом созерцания, местом рождения и пребывания божества. ... Четверичность (также кватерность). Универсальный архетип, являющий собой логическую предпосылку всякого целостного суждения» [Вер, 2010, с. 88, 200-202].

Тема мандал издревле связана с темой музыкальной гармонии устройства мира. Древние учения «просветленных» мудрецов Индии, Китая и других стран утверждали взгляд на музыкальную гармонию как на нечто изначальное. В силу этого тысячелетия практик медитации с использованием мандал сопряжены для буддистов с идеей музыкальной гармонии, отраженной в рядах масштабируемых колоколов в древних буддийских монастырях (Рис. III.5).

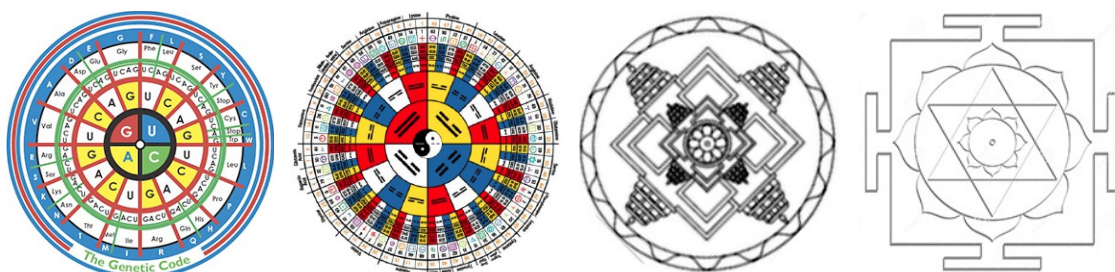




Рис. III.5. Верхний ряд: иллюстрация аналогий между алфавитами ДНК и древними 4-секционными мандалами (изображения взяты с сайтов: [www.kozlenkoa.narod.ru](http://www.kozlenkoa.narod.ru), <https://blog.humdes.com/teoreticheskie-osnovy-chast-3-geksagrammy-i-dzin/>, <https://www.dreamstime.com/kamala-yantra-hinduism-symbol-vector-icon-kamala-yantra-hinduism-symbol-image154056053>). Нижний ряд: примеры ансамблей колоколов в древних буддистских монастырях (фото с сайтов <https://www.fotex.biz/countries/thailand/chiangmai/6653001550/>, <https://ru.depositphotos.com/stock-photos/brass-bells.html?offset=200&sorting=newest&qview=307409376>).

Обнаружение описанной выше связи многослойных ДНК-текстов с гештальт правилами тетрагруппировок и гармонической прогрессией  $1/n$ , сопряженной с музыкальной гармонией, позволяет автору строить «геномные» 4-секционные мандалы алгебро-гармонического числового характера (а не просто картинки с символами). В этих 4-секционных диаграммах все сектора и все их кольца взаимно связаны гармонической прогрессией, сопряженной с гармониками в музыке. На Рис. III.6 показан поясняющий пример к теме таких 4-секционных диаграмм. На этом примере каждый из четырех секторов содержит данные о суммарном количественном составе соответствующей 1-позиционной группировки  $n$ -плетов в слоях геномного ДНК-текста, то есть группировки,  $n$ -плеты которой начинаются с одного из нуклеотидов А, Т, С или G (см. выше разделы 3 и 8, откуда заимствуются обозначения на этом рисунке). При нормировке этих количеств - в каждом из секторов - делением на количество соответствующего нуклеотида в геноме, последовательность колец каждого из 4 секторов предстает как последовательность членов гармонической прогрессии или как последовательность музыкальных гармоник.

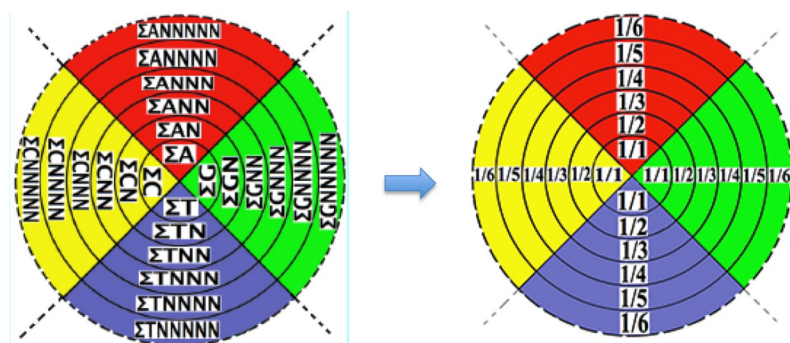


Рис. III.6. Пример «геномной» мандалы первого порядка.

Для длинных ДНК-текстов кроме описанной численной мандалы первого порядка, основанной на  $n$ -плетах, начинающихся с одного из 4 моноплетов А, Т, С и G, существуют численные мандалы второго, третьего и более высоких порядков, основанные на тетрагруппировках  $n$ -плетов, начинающихся с одного из 16 дуплетов, или одного из 64 триплетов, и т.д. Это связано с описанным выше в конце раздела 3 эстафетным принципом гештальт связи соседних слоев геномных ДНК-текстов, представленном равенствами (3.5). Он касается связи каждого  $n$ -плета с четверкой  $(n+1)$ -плетов очередного  $(n+1)$ -го слоя, которая напоминает общебиологический процесс учетверения при мейозе, в ходе которого из одной половой клетки образуется четыре половые клетки.

Тем самым, имеется огромная фрактало-подобная иерархия численных ДНК-мандал, завязанная на геномные гештальт-правила и музыкальные гармоника. Этот «хор» ДНК-мандал можно озвучивать или представлять в цвете, вибрациях, электро-стимулах и пр. в технологических целях, включая развитие древних технологий мандал-музыкальных медитаций для просветления и оздоровления. Данные вопросы разрабатываются в нашей лаборатории и «Центре междисциплинарных исследований музыкального творчества Московской государственной консерватории им. П.И. Чайковского.

### *Благодарности*

Представленные в статье результаты стали возможны во-многом благодаря многолетнему сотрудничеству Российской и Венгерской Академий наук по теме «Нелинейные модели и симметрологический анализ в биомеханике, биоинформатике и теории самоорганизующихся систем», по которой автор был научным руководителем от Российской Академии наук. Автор выражает глубокую благодарность Ю.Дарвашу, А.А. Коблякову, Ю.И. Манину, В.И. Свирину, И.В. Степаняну, Г.К. Толоконникову, Е.Фиммель, М. Хи, З.Б. Ху за их сотрудничество.

### *Литература*

Бернштейн Н.А. Очерки по физиологии движений и физиологии активности. Москва: Медицина, (1966).

Вер Г. Карл Густав Юнг. Урал Лтд (1998). ISBN: 5-88294-073-7 Владимир Ю.С. Метафизика. (Второе издание) М.: БИНОМ. (2009).

Владимиров Ю.С. Реляционная картина мира. Книга 1: Реляционная концепция геометрии и классической физики. М.: ЛЕНАНД (2020).

Владимиров Ю.С. Реляционная картина мира. Книга 2: От бинарной предгеометрии микромира к геометрии классического пространства-времени. М., ЛЕНАНД (2021).

Гурвич А.Г. Избранные труды. Москва, Медицина (1977).

Капра Ф., Луизи П.Л. Системный взгляд на жизнь: целостное представление. Перевод с английского А.А. Сидоровой-Бирюковой, В.В. Шуликовской; под редакцией В. В. Шуликовской. М., URSS, 502 с. (2020).

Конопельченко Б.Г., Румер Ю.Б. Классификация кодонов в генетическом коде. ДАН СССР, т. 223, №2, с. 471-474 (1975). [http://odasib.ru/OpenArchive/DocumentImage.cshtml?id=Xu1\\_pavl\\_635766969644249164\\_22519&eid=R1\\_0001\\_0374](http://odasib.ru/OpenArchive/DocumentImage.cshtml?id=Xu1_pavl_635766969644249164_22519&eid=R1_0001_0374)

Кулаков Ю.И. Теория физических структур. М., 2004, 847 с.

Налимов В.В. Разбрасываю мысли. М., Центр гуманитарных инициатив 2015.

Орен Гоберман. О чём думают грибы? – Калкалист, Израиль, 11.08.2011, <https://efimbog.livejournal.com/601646.html>.

Пенроуз Р. Тени разума. М., Институт компьютерных исследований, 2005.

Петухов С.В. Биомеханика, бионика и симметрия. М., Наука, 1981.

Петухов С.В. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. М, Регулярная и хаотическая динамика, 2008, 316 с.

Петухов С.В. Генетические основы алгебраической биологии, гештальт-генетика и тетра-эйдосы Ю.И. Кулакова. Презентация доклада на семинаре «Основания фундаментальной физики» физического факультета МГУ, руководимом Ю.С.Владимировым, 04.03.2021. <https://drive.google.com/file/d/18G0vmhPw82s4VmdLHvNNiLNGhroYkPQ0/view?usp=sharing>.

Петухов С.В., Свиринов В.И., Хазина Л.В. Бионика спиральных структур. Проблемы машиностроения и надёжности машин, №3, 2015, с.70-76, <http://petoukhov.com/bionica.pdf>

Петухов С.В., Толоконников Г.К. Алгебраическая биология и матричная генетика. Видео-презентация доклада на международном междисциплинарном семинаре “Алгебраическая биология и теория систем”

13.02.2020, <https://www.youtube.com/watch?v=H2dNtvTM11M&t=330s>.

Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры. 2-е изд. М., 2008.

Тейяр де Шарден. Феномен человека. М., Наука, 1987.

Франк-Каменецкий М.Д. Самая главная молекула. М, Наука, 1988.

Шноль С.Э. Физико-химические факторы биологической эволюции. М., Мир, 1989.

Шредингер Э. Основные принципы теории метрики цветов в дневном свете. В кн: Новые пути в физике. М., Наука, с. 135-192, 1971.

Шредингер Э. Что такое жизнь? М., Атомиздат, 1972.

Шульц Е. Организм как творчество. - В кн.: Вопросы теории и психологии творчества, т.7, Харьков, с.108-190, 1916.

Щуцкий, Ю.К. Китайская классическая «Книга перемен». М., Восточная литература, 1997.

Abbott D., Davies P.C.W., Pati A.K. (eds.), Foreword by Sir Roger Penrose. Aspects of Life (2008). ISBN-13: 978-1-84816-253-2

Cook T.A. *The Curves of Life*. London: Constable and Co, 1914.

Fimmel E., Petoukhov S.V. Genetic Code Modelling from the Perspective of Quantum Informatics. In: Hu Z., Petoukhov S., He M. (eds) *Advances in Artificial Systems for Medicine and Education II*. AIMEE2018 2018. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol 902, pp. 117-125. Springer, Cham (2020a).

Fimmel E., Petoukhov S.V. Development of Models of Quantum Biology Based on the Tensor Product of Matrices. In: Hu Z., Petoukhov S., He M. (eds). *Advances in Intelligent Systems and Computing*, v. 1126, p.126-135. Springer (2020b), DOI [https://doi.org/10.1007/978-3-030-39162-1\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-39162-1_12).

Fröhlich F. Genetic code as Language. – In: Fröhlich H. Editor. *Biological Coherence and Response to External Stimuli*, Springer, p. 192-204, 1988, ISBN 978-0-387-18739-6.

Fröhlich H. Coherent electric vibrations in biological systems and cancer problem. //IEEE Trans. Microwave Theory Tech., v. 26, p. 613–617, 1978.

Fröhlich H. The biological effects of microwaves and related questions. In: *Advances in Electronics and Electron Physics*, v. 53, p. 85–152. New York, USA: Academic Press, 1980.

Fröhlich H. uction. *Theoretical Physics and Biology*. – In: Herbert Fröhlich editor, *Biological Coherence and Response to External Stimuli*. Springer, p. 3-24, (1988), ISBN 978-0-387-18739-6.

Fröhlich H., Kremer F. *Coherent Excitations in Biological Systems*. Springer-Verlag, 1983, ISBN 978-3-642-69186-7.

Geesink H.J.H., Meijer D.K.F. Quantum wave information of life revealed. *NeuroQuantology*, vol. 14, issue 1 (March 2016), doi:10.14704/nq.2016.14.1.911.

Gell-Mann M., Ne'eman Y. *The Eightfold Way*. N.Y., W.A.Benjamin (1964).

Hofstadter D.R. *Gödel, Escher, Bach. An Eternal Golden Braid*. N.Y.: Vintage Books, 777 p. (1980).

Holland B.W. Dynamic specificity and the pairing of homologous chromosomes in meiosis. *J. Theor. Biol.*, 35(2), p. 395-397, 1972.

Hyland G.J. Coherent GHz and THz excitations in active biosystems, and their implications. In: *The Future of Medical Diagnostics? Proceeding of Matra Marconi UK*, Directorate of Science, Internal Report, Portsmouth, UK, pp. 14–27 (25 June 1998).

Hu Z.B., Petoukhov S.V., Petukhova E.S. I-Ching, dyadic groups of binary numbers and the geno-logic coding in living bodies. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, vol. 131, pp. 354-368 (December 2017).

Igamberdiev A.U. Quantum mechanical properties of biosystems: a framework for complexity, structural stability, and transformations. *Biosystems*, 31(1), p. 65–73 (1993).

Jordan P. *Die Quantenmechanik und die Grundprobleme der Biologie und Psychologie*. *Naturwissenschaften* 20, 815–821, 1932, (doi:10.1007/BF01494844).

Kienle G. Experiments concerning the non-euclidian structure of the visual space. In: Bioastronautics. N.Y., London, p. 386-400 (1964).

Kienle G. Die optischen Wahrnehmungsstörungen und die nichteuklidische Struktur des Sehraumes. Stuttgart: Thieme, 172 p., 1968.

Labunets V.G. Clifford algebras as unified language for image processing and pattern recognition. Computational Noncommutative Algebra and Applications, eds. J. Byrnes & G. Osteimer, Kluwer: Dordrecht and Boston and London, vol. 136 of NATO Science Series, pp. 197–225, 2003.

Labunets V.G., Rundblad E., Astola J. Is the brain a clifford algebra quantum computer? (Chapter 25). Applications Of Geometrical Algebras In Computer Science And Engineering, eds. L. Dorst, C. Doran & A. Lasenby, Birkhauser: Boston, pp. 285–295, 2002.

Luneburg R.K. Mathematical analysis of binocular vision. Princeton: Univ. Press, 194 p., 1947.

Luneburg R.K. Metric methods in binocular visual perception. In: Studies and essays. N.Y.: Intersci. Publ., Courant anniv. vol., p. 215-239 (1948).

Luneburg R.K. The metric of binocular visual space. J. Opt. Soc. Amer., v. 40, #10, p. 627-642, 1950.

Matsuno K. Cell motility as entangled quantum coherence. BioSystems, 51, 1999, p. 15–19.

Matsuno K., Paton R.C. Is there a biology of quantum information? BioSystems, 55, 2000, pp. 39–46.

McFadden J., Al-Khalili J. The origins of quantum biology. Proceedings of the Royal Society A, Vol. 474, Issue 2220, p. 1-13, 12 December 2018,

<https://doi.org/10.1098/rspa.2018.0674>.

<https://royalsocietypublishing.org/doi/full/10.1098/rspa>.

Nakagaki T., Yamada H., Toth A. Intelligence: Maze-solving by an amoeboid organism. Nature 407, 470 (28 September 2000), doi:10.1038/35035159.

Patel A. Quantum algorithms and the genetic code. Pramana – J. Phys. 56(2–3), p. 367–381, arXiv:quant-ph/0002037 (2001a).

Patel A. Testing quantum dynamics in genetic information processing. J. Genet. 80(1), p. 39–43 (2001b).

Patel A. Why genetic information processing could have a quantum basis. J. Biosci. 26(2), p. 145–151 (2001c).

Pauli W. Writings on Physics and Philosophy. Ed. by C.P. Enz and K. von Meyenn, Springer, Berlin (1994).

Petoukhov S.V. Genetic code and the Ancient Chinese «Book of Changes». Symmetry: Culture and Science, vol. 10, 1999, №3-4, pp. 211-226.

Petoukhov S.V. The system-resonance approach in modeling genetic structures. Biosystems, v. 139, January 2016, pp. 1-11.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.biosystems.2015.11.001>,

[http://petoukhov.com/PETOUKHOV\\_ARTICLE\\_IN\\_BIOSYSTEMS.pdf](http://petoukhov.com/PETOUKHOV_ARTICLE_IN_BIOSYSTEMS.pdf).

Petoukhov S.V. The Genetic Coding System and Unitary Matrices. Preprints 2018, 2018040131 (2018), doi: 10.20944/preprints201804.0131.v2.

Petoukhov S.V. Nucleotide Epi-Chains and New Nucleotide Probability Rules in Long DNA Sequences. Preprints 2019, 2019040011, 17 pages (2019), doi: 10.20944/preprints201904.0011.v1,

<https://www.preprints.org/manuscript/201904.0011/v1>

Petoukhov S.V. Hyperbolic Rules of the Cooperative Organization of Eukaryotic and Prokaryotic Genomes. Biosystems, 198, 104273 (2020a).

Petoukhov S.V. Hyperbolic Rules of the Oligomer Cooperative Organization of Eukaryotic and Prokaryotic Genomes. Preprints 2020, 2020050471 (2020b), doi:10.20944/preprints202005.0471.v2, <https://www.preprints.org/manuscript/202005.0471/v2>.

Petoukhov S.V. The rules of long DNA-sequences and tetra-groups of oligonucleotides. arXiv:1709.04943v6, 6th version from 22.05.2020 (2020c).

Petoukhov S.V. Algebraic Rules for the Percentage Composition of Oligomers in Genomes. Preprints 2021, 2021010360 (2021a), (doi:10.20944/preprints202101.0360.v2). <https://www.preprints.org/manuscript/202101.0360/v2>

Petoukhov S.V. Modeling inherited physiological structures based on hyperbolic numbers, BioSystems, Vol. 199, 104285 (2021b), ISSN 0303-2647, <https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2020.104285>.

Petoukhov S.V. Algebraic Rules for the Percentage Composition of Oligomers in Genomes. Preprints 2021, 2021010360 (2021a), (doi:10.20944/preprints202101.0360.v2). <https://www.preprints.org/manuscript/202101.0360/v2>

Petoukhov S.V., He M. Symmetrical Analysis Techniques for Genetic Systems and Bioinformatics, Advanced Patterns and Applications. Hershey, USA, IGI Global (2010).

Petoukhov S.V., Petukhova E.S. Symmetries in genetic systems and the concept of geno-logical coding. Information, 8(1), 2 (2017), doi:10.3390/info8010002, <http://www.mdpi.com/2078-2489/8/1/2/pdf>

Petoukhov S.V., Petukhova E.S., Svirin V.I. Symmetries of DNA alphabets and quantum informational formalisms. Symmetry: Culture and Science, Vol. 30, No. 2, p.161-179 (2019), [https://doi.org/10.26830/symmetry\\_2019\\_2\\_161](https://doi.org/10.26830/symmetry_2019_2_161).

Resnikoff H.L. Differential geometry and color perception. *J. Math. Biol.*, v. 1, 1974, #2, p. 97-131.

Schelling H. von. Advanced color geometry. *J. Opt. Soc. Amer.*, v. 45, 1955, 12, p. 1072-1079.

Schelling H. von. Concept of distance in affine geometry and its application in theories of vision. *J. Opt. Soc. Amer.*, v. 46, p. 309-315 (1956a).

Schelling H. von. Reply to P.J van Heerden. J.Opt. Soc. Amer., v. 46, #11, p. 1000-1001 (1956b).

Schelling H. von. Die Geometrie des beidenaugigen Sehens. Optik, Bd. 17, H. 7, pp. 345-364 (1960).

Schelling H. von. Experienced space and time. In: Bioastronautics. N.Y., L., pp.361-385 (1964).

Vasconcellos A.R., Vannucchi F.S., Mascarenhas S., Luzzi R. Frohlich Condensate: Emergence of Synergetic Dissipative Structures in Information Processing Biological and Condensed Matter Systems. Information, v. 3(4), p. 601-620 (2012), doi:10.3390/info3040601. <https://www.mdpi.com/2078-2489/3/4/601/htm>.

Zabeo D., Heumann J.M., Schwartz C.L., Suzuki-Shinjo A., Morgan G., Widlund P.O., Höög J.L. A lumenal interrupted helix in human sperm tail microtubules. Scientific Reports, 8(1), 2727. (2018 Feb 9). doi: 10.1038/s41598-018-21165-8.

## **Algebraic Biology, Gestalt Genetics, Hereditary and Artificial Intelligence**

S.V. Petoukhov

Laboratory of Biomechanical Systems, Mechanical Engineering Research Institute,  
Russian Academy of Sciences  
<http://petoukhov.com/>

**Abstracts.** The results of the analysis of the structural features of the molecular genetic coding system are presented. The regularities of DNA sequences of nucleotides in the genomes of higher and lower organisms have been revealed. Their detection is based on the presentation of genomic DNA sequences in the form of multilayer algebraic structures and a comparative analysis of the percentage of  $n$ -plets in different layers. The rules for the constancy of the sums of percentages in special tetragroupings of  $n$ -plets in different text layers of genomic DNA are described. These constancy of the sums are realized with very different quantities and values of the summands. These rules for the constancy of the percentages are accompanied by hyperbolic rules for the interrelation of quantities in  $n$ -plets groupings in different layers of genomic DNA texts. The discovered rules are candidates for the role of universal genomic rules. The study uses a tensor family of matrix representations of DNA alphabets to identify the algebraic features of the mentioned rules. The analogies of the discovered genetic phenomena with the phenomena of Gestalt psychology are noted, which allows developing the ideas of Gestalt genetics. The presented results indicate: 1) living organisms can be interpreted as quantum-informational algebraic-harmonic entities; 2) bioinformatics is based on probabilistic methods of multilayer coding and information processing.



**Keywords:** DNA alphabets, binary oppositions, genomes, multilayered texts, probabilities, tetragroupings, gestalt, matrices, tensor product, hyperbolic numbers, projectors, matrix genetics, algebraic and quantum biology, intelligence

### **References**

Bernshtein N.A. Ocherki po fiziologii dvizheniy i fiziologii aktivnosti [Essays on the physiology of movements and the physiology of activity]. Moscow: Medicine, (1966).

Ver G. Carl Gustav Jung. Ural Ltd (1998). ISBN: 5-88294-073-7 Vladimirov Yu.S. Metafizika [Metaphysics]. (Second edition) M., BINOM. (2009).

Vladimirov Yu.S. Relyatsionnaya kartina mira. Kniga 1. Relyatsionnaya kontseptsiya geometrii i klassicheskoy fiziki. [Relational picture of the world. Book 1: The Relational Concept of Geometry and Classical Physics]. M., LENAND (2020).

Vladimirov Yu.S. Relyatsionnaya kartina mira. Kniga 2. Ot binarnoy predgeometrii mikromira k geometrii klassicheskogo prostranstva-vremeni [Relational picture of the world. Book 2: From the binary pregeometry of the microworld to the geometry of the classical space-time]. M., LENAND (2021).

Gurvich A.G. Izbrannie trudi [Selected Works]. Moscow, Medicine (1977).

Capra F., Louise P.L. Sistemniy vzglad na zhizn: tselostnoe predsyavlenie [A systems view of life: a holistic view]. Translated from English by A.A. Sidorova-Biryukova, V.V. Shulikovskaya; edited by V.V. Shulikovskaya. M., URSS, 502 p. (2020).

Konopelchenko B.G., Rumer Yu.B. Klassifikatsiya kodonov v geneticheskom kode [Classification of codons in the genetic code]. DAN SSSR, v. 223, no. 2, p. 471-474 (1975). [http://odasib.ru/OpenArchive/DocumentImage.cshtml?id=Xu1\\_pav1\\_635766969644249164\\_22519&eid=R1\\_0001\\_0374](http://odasib.ru/OpenArchive/DocumentImage.cshtml?id=Xu1_pav1_635766969644249164_22519&eid=R1_0001_0374)

Kulakov Yu.I. Teoriya fizicheskikh struktur [The theory of physical structures]. M., 2004, 847p.

Nalimov V.V. Razbrasivayu misli [I scatter my thoughts]. M., Center for Humanitarian Initiatives 2015.

Oren Goberman. Ochem dumayut gribi? [What are mushrooms thinking?] Kalkalist, Israel, 11.08.2011, <https://efimbog.livejournal.com/601646.html>.

Penrose R. Teni razuma [Shadows of Reason]. M., Institute of Computer Research, 2005.

Petukhov S.V. Biomekhanika, bionika i simmetriya [Biomechanics, Bionics and Symmetry]. M., Science, 1981.

Petukhov S.V. Matrichnaya genetika, algebr geneticheskogo koda, pomekhoustoychivost [Matrix genetics, genetic code algebras, noise immunity]. M, Regular and chaotic dynamics, 2008, 316 p.

Petukhov S.V. Geneticheskie osnovi algebraicheskoy biologii, geshtalt-genetika i tetra-eidosi Kulakova [Genetic foundations of algebraic biology, gestalt genetics and tetra-eidos Yu.I. Kulakov]. Presentation of the report at the seminar "Foundations of Fundamental Physics" of the Physics Faculty of Moscow State University, led by Yu.S. Vladimirov, 03/04/2021. <https://drive.google.com/file/d/18G0vmhPw82s4BmdLHvNNiLNGhroYkPQ0/view?usp=sharing>.

Petukhov S.V., Svirin V.I., Khazina L.V. Bionika spiralnikh struktur [Bionics of spiral structures]. Problems of mechanical engineering and reliability of machines, No. 3, 2015, p.70-76, <http://petoukhov.com/bionica.pdf>

Petukhov S.V., Tolokonnikov G.K. Algebraicheskaya biologiya i matrichnaya genetika [Algebraic biology and matrix genetics]. Video presentation of the report at the international interdisciplinary seminar "Algebraic biology and systems theory"

02/13/2020, <https://www.youtube.com/watch?v=H2dNtvTM1M&t=330s>.

Prasolov V.V. Zadaci i teoremi lineinoy algebr [Problems and Theorems of Linear Algebra]. 2nd ed. M., 2008.

Teillard de Chardin. Fonomen cheloveka [The human phenomenon]. M., Science, 1987.

Frank-Kamenetsky M.D. Samaya glavnaya molekula [The most important molecule]. M, Science, 1988.

Shnol S.E. Fiziko-khimicheskie faktori biologicheskoy evolutsii [Physicochemical factors of biological evolution]. M., Mir, 1989.

Schrödinger E. Osnovnie printsipi teorii metrki tsvetov v dnevnom svete [Basic principles of the theory of color metrics in daylight]. In the book: New paths in physics. M., Science, p. 135-192, 1971.

Schrödinger E. Chto takoe zhizn? [What is life?] M., Atomizdat, 1972.

Shultz E. Organizm kak tvorchestvo [Organism as creativity]. In the book: Questions of theory and psychology of creativity, v. 7, Kharkov, pp. 108-190, 1916.

Shchutsky, Yu.K. Kitaiskaya klassicheskaya "Kniga Peremen" [Chinese classic "Book of Changes"]. M., Oriental Literature, 1997.

Abbott D., Davies P.C.W., Pati A.K. (eds.), Foreword by Sir Roger Penrose. Aspects of Life (2008). ISBN-13: 978-1-84816-253-2

Cook T.A. The Curves of Life. London: Constable and Co, 1914.

Fimmel E., Petoukhov S.V. Genetic Code Modelling from the Perspective of Quantum Informatics. In: Hu Z., Petoukhov S., He M. (eds) Advances in Artificial Systems for Medicine and Education II. AIMEE2018 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 902, pp. 117-125. Springer, Cham (2020a).

Fimmel E., Petoukhov S.V. Development of Models of Quantum Biology Based on the Tensor Product of Matrices. In: Hu Z., Petoukhov S., He M. (eds). Advances in Intelligent Systems and Computing, v. 1126, p.126-135. Springer (2020b), DOI [https://doi.org/10.1007/978-3-030-39162-1\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-39162-1_12).

Fröhlich F. Genetic code as Language. – In: Fröhlich H. Editor. Biological Coherence and Response to External Stimuli, Springer, p. 192-204, 1988, ISBN 978-0-387-18739-6.

Fröhlich H. Coherent electric vibrations in biological systems and cancer problem. //IEEE Trans. Microwave Theory Tech., v. 26, p. 613–617, 1978.

Fröhlich H. The biological effects of microwaves and related questions. In: Advances in Electronics and Electron Physics, v. 53, p. 85–152. New York, USA: Academic Press, 1980.

Fröhlich H. uction. Theoretical Physics and Biology. – In: Herbert Fröhlich editor, Biological Coherence and Response to External Stimuli. Springer, p. 3-24, (1988), ISBN 978-0-387-18739-6.

Fröhlich H., Kremer F. Coherent Excitations in Biological Systems. Springer-Verlag, 1983, ISBN 978-3-642-69186-7.

Geesink H.J.H., Meijer D.K.F. Quantum wave information of life revealed. *NeuroQuantology*, vol. 14, issue 1 (March 2016), doi:10.14704/nq.2016.14.1.911.

Gell-Mann M., Ne'eman Y. The Eightfold Way. N.Y., W.A.Benjamin (1964).

Hofstadter D.R. Gödel, Escher, Bach. An Eternal Golden Braid. N.Y.: Vintage Books, 777 p. (1980).

Holland B.W. Dynamic specificity and the pairing of homologous chromosomes in meiosis. *J. Theor. Biol.*, 35(2), p. 395-397, 1972.

Hyland G.J. Coherent GHz and THz excitations in active biosystems, and their implications. In: The Future of Medical Diagnostics? Proceeding of Matra Marconi UK, Directorate of Science, Internal Report, Portsmouth, UK, pp. 14–27 (25 June 1998).

Hu Z.B., Petoukhov S.V., Petukhova E.S. I-Ching, dyadic groups of binary numbers and the geno-logic coding in living bodies. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, vol. 131, pp. 354-368 (December 2017).

Igamberdiev A.U. Quantum mechanical properties of biosystems: a framework for complexity, structural stability, and transformations. *Biosystems*, 31(1), p. 65–73 (1993).

Jordan P. Die Quantenmechanik und die Grundprobleme der Biologie und Psychologie. *Naturwissenschaften* 20, 815–821, 1932, (doi:10.1007/BF01494844). Kienle G. Experiments concerning the non-euclidian structure of the visual space. In: *Bioastronautics*. N.Y., London, p. 386-400 (1964).

Kienle G. Die optischen Wahrnehmungsstörungen und die nichteuklidische Struktur des Sehraumes. Stuttgart: Thieme, 172 p., 1968.

Labunets V.G. Clifford algebras as unified language for image processing and pattern recognition. *Computational Noncommutative Algebra and Applications*, eds. J. Byrnes & G. Osteimer, Kluwer: Dordrecht and Boston and London, vol. 136 of NATO Science Series, pp. 197–225, 2003.

Labunets V.G., Rundblad E., Astola J. Is the brain a clifford algebra quantum computer? (Chapter 25). *Applications Of Geometrical Algebras In Computer Science And Engineering*, eds. L. Dorst, C. Doran & A. Lasenby, Birkhauser: Boston, pp. 285–295, 2002.

Luneburg R.K. *Mathematical analysis of binocular vision*. Princeton: Univ. Press, 194 p., 1947.

Luneburg R.K. Metric methods in binocular visual perception. In: *Studies and essays*. N.Y.: Intersci. Publ., Courant anniv. vol., p. 215-239 (1948).

Luneburg R.K. The metric of binocular visual space. *J. Opt. Soc. Amer.*, v. 40, #10, p. 627-642, 1950.

Matsuno K. Cell motility as entangled quantum coherence. *BioSystems*, 51, 1999, p. 15–19.

Matsuno K., Paton R.C. Is there a biology of quantum information? *BioSystems*, 55, 2000, pp. 39–46.

McFadden J., Al-Khalili J. The origins of quantum biology. *Proceedings of the Royal Society A*, Vol. 474, Issue 2220, p. 1-13, 12 December 2018,

<https://doi.org/10.1098/rspa.2018.0674>.

<https://royalsocietypublishing.org/doi/full/10.1098/rspa>.

Nakagaki T., Yamada H., Toth A. Intelligence: Maze-solving by an amoeboid organism. *Nature* 407, 470 (28 September 2000), doi:10.1038/35035159.

Patel A. Quantum algorithms and the genetic code. *Pramana – J. Phys.* 56(2–3), p. 367–381, arXiv:quant-ph/0002037 (2001a).

Patel A. Testing quantum dynamics in genetic information processing. *J. Genet.* 80(1), p. 39–43 (2001b).

Patel A. Why genetic information processing could have a quantum basis. *J. Biosci.* 26(2), p. 145–151 (2001c).

Pauli W. *Writings on Physics and Philosophy*. Ed. by C.P. Enz and K. von Meyenn, Springer, Berlin (1994).

Petoukhov S.V. Genetic code and the Ancient Chinese «Book of Changes». *Symmetry: Culture and Science*, vol. 10, 1999, №3-4, pp. 211-226.

Petoukhov S.V. The system-resonance approach in modeling genetic structures. *Biosystems*, v. 139, January 2016, pp. 1-11.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.biosystems.2015.11.001>,

[http://petoukhov.com/PETOUKHOV\\_ARTICLE\\_IN\\_BIOSYSTEMS.pdf](http://petoukhov.com/PETOUKHOV_ARTICLE_IN_BIOSYSTEMS.pdf).

Petoukhov S.V. The Genetic Coding System and Unitary Matrices. Preprints 2018, 2018040131 (2018), doi: 10.20944/preprints201804.0131.v2.

Petoukhov S.V. Nucleotide Epi-Chains and New Nucleotide Probability Rules in Long DNA Sequences. Preprints 2019, 2019040011, 17 pages (2019), doi:

10.20944/preprints201904.0011.v1,

<https://www.preprints.org/manuscript/201904.0011/v1>

Petoukhov S.V. Hyperbolic Rules of the Cooperative Organization of Eukaryotic and Prokaryotic Genomes. *Biosystems*, 198, 104273 (2020a).

Petoukhov S.V. Hyperbolic Rules of the Oligomer Cooperative Organization of Eukaryotic and Prokaryotic Genomes. *Preprints* 2020, 2020050471 (2020b), doi:10.20944/preprints202005.0471.v2, <https://www.preprints.org/manuscript/202005.0471/v2>.

Petoukhov S.V. The rules of long DNA-sequences and tetra-groups of oligonucleotides. arXiv:1709.04943v6, 6th version from 22.05.2020 (2020c).

Petoukhov S.V. Algebraic Rules for the Percentage Composition of Oligomers in Genomes. *Preprints* 2021, 2021010360 (2021a), (doi:10.20944/preprints202101.0360.v2). <https://www.preprints.org/manuscript/202101.0360/v2>

Petoukhov S.V. Modeling inherited physiological structures based on hyperbolic numbers, *BioSystems*, Vol. 199, 104285 (2021b), ISSN 0303-2647, <https://doi.org/10.1016/j.biosystems.2020.104285>.

Petoukhov S.V. Algebraic Rules for the Percentage Composition of Oligomers in Genomes. *Preprints* 2021, 2021010360 (2021a), (doi:10.20944/preprints202101.0360.v2). <https://www.preprints.org/manuscript/202101.0360/v2>

Petoukhov S.V., He M. *Symmetrical Analysis Techniques for Genetic Systems and Bioinformatics, Advanced Patterns and Applications*. Hershey, USA, IGI Global (2010).

Petoukhov S.V., Petukhova E.S. Symmetries in genetic systems and the concept of genological coding. *Information*, 8(1), 2 (2017), doi:10.3390/info8010002, <http://www.mdpi.com/2078-2489/8/1/2/pdf>

Petoukhov S.V., Petukhova E.S., Svirin V.I. Symmetries of DNA alphabets and quantum informational formalisms. *Symmetry: Culture and Science*, Vol. 30, No. 2, p.161-179 (2019), [https://doi.org/10.26830/symmetry\\_2019\\_2\\_161](https://doi.org/10.26830/symmetry_2019_2_161).

Resnikoff H.L. Differential geometry and color perception. *J. Math. Biol.*, v. 1, 1974, #2, p. 97-131.

Schelling H. von. Advanced color geometry. *J. Opt. Soc. Amer.*, v. 45, 1955, 12, p. 1072-1079.

Schelling H. von. Concept of distance in affine geometry and its application in theories of vision. *J. Opt. Soc. Amer.*, v. 46, p. 309-315 (1956a).

Schelling H. von. Reply to P.J van Heerden. *J. Opt. Soc. Amer.*, v. 46, #11, p. 1000-1001 (1956b).

Schelling H. von. Die Geometrie des beidenaugigen Sehens. *Optik*, Bd. 17, H. 7, pp. 345-364 (1960).

Schelling H. von. Experienced space and time. In: *Bioastronautics*. N.Y., L., pp.361-385 (1964).

Vasconcellos A.R., Vannucchi F.S., Mascarenhas S., Luzzi R. Frohlich Condensate: Emergence of Synergetic Dissipative Structures in Information Processing Biological and Condensed Matter Systems. *Information*, v. 3(4), p. 601-620 (2012), doi:10.3390/info3040601. <https://www.mdpi.com/2078-2489/3/4/601/htm>.

Zabeo D., Heumann J.M., Schwartz C.L., Suzuki-Shinjo A., Morgan G., Widlund P.O., Höög J.L. A luminal interrupted helix in human sperm tail microtubules. *Scientific Reports*, 8(1), 2727. (2018 Feb 9). doi: 10.1038/s41598-018-21165-8.

## **Категорные склейки, категорные системы и их приложения в алгебраической биологии. I**

**Толоконников Г.К.**

к.ф.-м.н., ФНАЦ ВИМ, Москва, Россия

e-mail: [admcit@mail.ru](mailto:admcit@mail.ru)

**Аннотация.** Работа посвящена новому разделу категорной математики - теории категорных склеек и её приложениям в общей теории систем. Язык категорных склеек, как показано в работе, единообразно описывает основные алгебраические структуры от универсальных алгебр до поликатегорий и высших категорий и даёт примеры новых алгебраических структур, применяемых, в частности, в общей теории систем. Категорные склейки вводятся как формальные логические теории с моделями в различных универсумах, включая различные категории, в том числе, отличные от категории множеств. Поликатегории Сабо (Szabo) и введённые автором ранее свёрточные поликатегории являются частными моделями категорных склеек. Помимо новых алгебраических структур теория категорных склеек предлагает описание известных категорных дуальностей и примеры новых видов дуальностей, включая дуальности, собственно, самих категорных склеек. Среди приложений имеется представление традиционных искусственных нейронных сетей произвольной топологии свёрточными поликатегориями, дуальности в которых применяются, в частности, для уточнения и обоснования известных формул Осовского вычисления градиентов в методе обратного распространения ошибки. Предлагается категорная модель нейрона, учитывающая не только его спайковую активность, но и другие виды межклеточной коммуникации и нейронных сетей с топологией высших категорных склеек, далеко обобщающей виды соединений нейронов в традиционных искусственных нейронных сетях. Предложенная ранее автором формализация теории функциональных систем П.К.Анохина-К.В.Судакова аксиоматизирована с помощью категорных склеек и предлагается в виде категорной теории систем в качестве общей теории систем. Категорная теория систем включает формализованный системообразующий фактор, принципы изоморфизма и иерархии, постулированные на интуитивном уровне для общих систем П.К.Анохиным. Категорная теория систем, опираясь на строгое определение системы даёт исчерпывающее и строгое понятие системного подхода, продемонстрированное в работе на примере аграрной биомашсистемы. В работе построена категорная система гемостаза, в которой преодолены многие неясности и противоречия обычных интуитивных построений функциональных систем физиологами. Многочисленные схемы функциональных систем, предлагаемые в трудах физиологов школы П.К.Анохина-К.В.Судакова, доработаны до категорных диаграмм. Аналогичная работа проделана для химических формул и модели «атомы в молекулах» по Бейдеру, возникшее направление категорной химии применяется для категорного моделирования молекул ДНК и РНК. Строгие алгебраические модели биомолекул предложены в качестве новых методов для алгебраической биологии, в которой, таким образом, становится возможным учитывать алгебраические свойства биомолекул для работы с геномом. Содержание работы, включая системные исследования, является продолжением работ в направлении проблемы поиска формализмов для алгебр наблюдаемых новых физических теорий. Первоначально эта проблема, инициированная рядом вопросов квантовой теории поля, была

*поставлена для гамильтоновых механик научным руководителем автора Юрием Михайловичем Широковым, давшим аксиоматику таких механик и воодушевившим автора работать над указанной проблемой. В дальнейшем эта же проблема была поставлена Р.Пенроузом в контексте поиска формализмов новых физических теорий более подходящих, чем известные формализмы, для описания феномена сознания.*

**Ключевые слова:** *гамильтоновы механики, категории, поликатегории, категорные склейки, категорная теория систем, дуальность, функциональные и биоматематические системы, гомеостаз, алгебраическая биология*

*Посвящается светлой памяти моего  
научного руководителя математика  
и физика теоретика, руководителя  
Семинара Отдела квантовой теории поля  
Математического института  
им. В.А.Стеклова АН СССР, проф., д.ф.-м.н.  
Юрия Михайловича Широкова*

## **Оглавление**

### **Часть 1**

1. Введение. Задача поиска формализмов новых физических теорий, категории, системы
2. Категорные склейки
3. Свёрточные поликатегории и искусственные нейросети
4. Категорные системы, как категорные склейки, и системный подход

### **Часть 2**

5. Представление склейками высших категорий
6. Дуальности склеек и поликатегорий с применением к искусственным нейросетям
7. Формализация функциональных систем по П.К.Анохину, категорная система гомеостаза
8. Категорная химия, категорная модель биомолекул, РНК и ДНК
9. Алгебраическая биология в категорной системной парадигме
10. Заключение

### **1. Введение. Задача поиска формализмов новых физических теорий, категории, системы**

Работа посвящена новому разделу категорной математики, именно, теории категорных склеек и её приложениям в общей теории систем. Язык категорных склеек, как показано в работе, единообразно описывает основные

алгебраические структуры от универсальных алгебр до поликатегорий и высших категорий и даёт примеры новых алгебраических структур, применяемых, в частности, в общей теории систем. Категорные склейки вводятся как формальные логические теории с моделями в различных универсумах, включая различные категории, в том числе, отличные от категории множеств. Поликатегории Сабо [Szabo, 1975] и введённые автором ранее [Толоконников, 2016] свёрточные поликатегории являются частными моделями категорных склеек. Помимо новых алгебраических структур теория категорных склеек предлагает описание известных категорных дуальностей и примеры новых видов дуальностей, включая дуальности, собственно, самих категорных склеек. Среди приложений имеется представление традиционных искусственных нейронных сетей произвольной топологии свёрточными поликатегориями, дуальности в которых применяются, в частности, для уточнения и обоснования известных формул Осовского вычисления градиентов в методе обратного распространения ошибки. Предлагается категорная модель нейрона, учитывающая не только его спайковую активность, но и другие виды межклеточной коммуникации и нейронных сетей с топологией высших категорных склеек, далеко обобщающей виды соединений нейронов в традиционных искусственных нейронных сетях. Предложенная ранее автором формализация теории функциональных систем П.К.Анохина-К.В.Судакова обобщена на случай категорных склеек и предлагается в виде категорной теории систем в качестве общей теории систем. Категорная теория систем включает формализованный системообразующий фактор, принципы изоморфизма и иерархии, постулированные на интуитивном уровне для общих систем П.К.Анохиным. Категорная теория систем, опираясь на строгое определение системы, даёт исчерпывающее и строгое понятие системного подхода, продемонстрированное в работе на примере аграрной биомашсистемы. В работе построена категорная система гомостаза, в которой преодолены многие неясности и противоречия обычных интуитивных построений функциональных систем физиологами. Многочисленные схемы функциональных систем, предлагаемые в трудах физиологов школы П.К.Анохина-К.В.Судакова, доработаны до категорных диаграмм. Аналогичная работа проделана для химических формул и модели «атомы в молекулах» по Бейдеру, возникшее направление категорной химии применяется для категорного моделирования молекул ДНК и РНК. Строгие алгебраические модели биомолекул предложены в качестве новых методов для алгебраической биологии, в которой, таким образом, становится возможным учитывать алгебраические свойства биомолекул для работы с геномом. Содержание работы, включая системные исследования, является продолжением работ в направлении проблемы поиска формализмов для алгебр наблюдаемых новых физических теорий. Первоначально эта проблема, инициированная рядом вопросов квантовой теории поля, была поставлена для гамильтоновых механик

научным руководителем автора Юрием Михайловичем Широковым, давшим аксиоматику таких механик и воодушевившим автора работать над указанной проблемой. В дальнейшем эта же проблема была поставлена Р. Пенроузом в контексте поиска формализмов новых физических теорий более подходящих, чем известные формализмы, для описания феномена сознания.

Поясним кратко источник сформулированной проблемы из квантовой теории.

В 1930-е годы С.Л.Соболев построил теорию обобщенных функций (годом рождения этой теории считается 1935 год выхода его статьи [1]), через 15 лет обобщенные функции появились под именем распределений в работах Л.Шварца, которого в «западной» науке почти повсеместно считают первооткрывателем и создателем этой теории (история описана, например, в <http://www.math.nsc.ru/LBRT/g2/english/ssk/sobolev-schwartz.html#1>).

В переизданиях (4-е от 1964 г.) книги «Принципы квантовой механики» [Дирак, 1979] уже после работ С.Л.Соболева и Л.Шварца свою знаменитую дельта-функцию П.Дирак продолжает называть *функцией*. Это вполне резонно, если иметь ввиду известный оригинальный взгляд великого физика на математику, но квантовую механику в строгом ее понимании как теории немедленно разрушает. Под квантованием понимают сопоставление наблюдаемым (координатам, потенциалам и так далее) классической механики операторов в гильбертовом пространстве волновых функций. Например, одна из немногих точно решаемых квантовомеханических задач осциллятора использует потенциал  $U(x)=x^2$ , то есть функцию «возведение в квадрат координаты», рассматриваемую как оператор умножения на неё волновых функций.

В случае дельтаобразного потенциала, необходимого в квантовой механике и квантовой теории поля при таком определении Дирака имеем:

- нарушение ассоциативности операции умножения операторов (наблюдаемых)

$$\delta(x) = \left(\frac{1}{x}x\right)\delta(x) = 1 \cdot \delta(x) \neq \frac{1}{x}(x\delta(x)) = \frac{1}{x} \cdot 0 = 0$$

(не спасает даже придание сомножителям точного смысла обобщенных функций);

- нарушение определенности операции умножения наблюдаемых, так как имеем противоречие  $\int \delta(x)\delta(x)dx = \delta(x)|_{x=0}$  не определено или на «физическом уровне строгости» (на котором строго пояснить, что такое «бесконечность» физики не могут) равно бесконечности.

Проблема разрослась в квантовой электродинамике вместе с вычислениями по Р.Фейнману, связанными с диаграммами его имени (фейнмановскими диаграммами). Здесь возникают расходимости, с которыми, нарушая математическую строгость в целях получения физических результатов, Р.Фейнман расправлялся вручную, отбрасывая эти бесконечности и оставляя



нужные конечные члены на фоне этих бесконечностей.

Математическая природа этих бесконечностей была установлена и изучена Н.Н.Боголюбовым, применившим перенормировки для устранения бесконечностей на каждом конечном шаге теории возмущений для  $S$ -матрицы, что изложено в фундаментальной монографии «Введение в теорию квантованных полей» [Боголюбов, 1984]. Природа проблем оказалась в незаконном перемножении обобщенных функций, имеющих совпадающие сингулярности, именно того сорта, который возник в указанном примере с дельта-функцией: нарушение ассоциативности умножения и неопределённость при умножении наблюдаемых. Кардинальным решением трудностей было бы построение такой теории, в которой, например, допускалась неассоциативность умножения наблюдаемых, а сингулярные потенциалы удавалось непротиворечиво умножать (наличие алгебры сингулярных потенциалов).

Ю.М.Широковым была предложена аксиоматика гамильтоновых теорий, допускающая неассоциативность наблюдаемых, и в теории сингулярных потенциалов была реализована возможность построения ассоциативных алгебр сингулярных потенциалов (см. [Толоконников, Широков, 1982], [Смирнов и др., 1983]). К сожалению, Ю.М.Широков погиб в горах и не успел доработать результаты по сингулярным потенциалам. Развитие гамильтоновых теорий (и более широко, поиск новых физических теорий) продолжено в работах автора, к которым относится, по большому счету, и данная статья.

Алгебра наблюдаемых гамильтоновых теорий по указанной аксиоматике имеет две бинарные операции  $\pi$ ,  $\sigma$  (аналоги ассоциативного умножения операторов и коммутатора), удовлетворяющие следующим тождествам ( $A, B, C$  - наблюдаемые)

$$\begin{aligned}\sigma A \pi B C &= \pi \sigma A B C + \pi B \sigma A C \\ \sigma A \sigma B C &= \sigma \sigma A B C + \sigma B \sigma A C \\ \sigma A B + \sigma B A &= 0\end{aligned}$$

Если операция  $\pi$  ассоциативна, то дополнительно имеет место тождество

$$\pi A \pi B C = \pi \pi A B C \cdot$$

Очевидно, в алгебре наблюдаемых должны быть в первую очередь координаты, импульсы, моменты количества движения и другие наблюдаемые, являющиеся полиномами от импульсов и координат.

Билинейные бинарные операции умножения на полиномах для квантовой механики можно выразить в виде псевдодифференциальных операторов как рядов от операций дифференцирования, так при стандартном квантовании (в единицах с постоянной Планка равной 1,  $i^2 = -1$ ) имеем

$$\begin{aligned}\pi A B &= \pi A(x_1, p_1) B(x_2 p_2) = \omega \exp(i \partial_{x_2} \partial_{p_1}) A(x_1, p_1) B(x_2 p_2) = \\ &= (1 + i \partial_{x_2} \partial_{p_1} + \dots) A(x_1, p_1) B(x_2 p_2)|_{1=2}, \\ \pi p x &= \omega (1 + i \partial_{x_2} \partial_{p_1} + \dots) p_1 x_2 = xp + i, \quad \pi px - \pi xp = [p, x] = i.\end{aligned}$$

Если принять, что операция умножения не зависит от точки фазового пространства, то она в общем случае является рядом от дифференцирований, то есть операции  $\pi = \omega \pi(\partial_1, \partial_2)$ ,  $\sigma = \omega \sigma(\partial_1, \partial_2)$  (заменяем дифференцирования  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$  на формальные переменные  $x, y, z$ , заодно, будем рассматривать более общий случай, включающий нечётное число формальных переменных) удовлетворяют функциональным уравнениям:

$$\begin{aligned}\sigma(x, y)\sigma(x + y, z) + \sigma(y, z)\sigma(y + z, x) + \sigma(z, x)\sigma(y + z, x) &= 0, \\ \sigma(x, y) + \sigma(y, x) &= 0 \\ \sigma(x, y + z)\pi(y, z) &= \pi(x + y, z)\sigma(x, y) + \pi(y, x + z)\sigma(x, z) .\end{aligned}$$

Тождество ассоциативности приводит к уравнению

$$\pi(x, y)\pi(x + y, z) = \pi(y, z)\pi(x, y + z) .$$

Общее решение системы приведённых четырех функциональных уравнений даёт классификацию гамильтоновых ассоциативных механик, среди которых заведомо имеется классическая и квантовая механики. При этом такая классификация отвечает на весьма интересный для физиков вопрос о том какие, вообще, есть квантования, имеются вейлевское, виковское, упомянутое стандартное с  $\pi = \omega \exp(i \partial_{x_2} \partial_{p_1})$  и другие квантования, есть ли ещё квантования помимо известных и нельзя ли их все перечислить. Действительно, какое бы ни было квантование, оно определяет операцию умножения, удовлетворяющую ассоциативности и указанному функциональному уравнению.



*Ю.М.Широков  
(1925-1980)*

У Юрия Михайловича Широкова было много учеников, благодаря своему широчайшему кругозору он мог предложить самые разнообразные научные направления ученикам, начиная от ядерной физики, заканчивая теорией групп и квантовой теорией поля.

После почти года сдавания экзаменов в Отдел квантовой теории поля МИАН им. В.А.Стеклова автор, наконец, получил от своего научного руководителя достойную задачу, приблизительно это происходило так.

Юрий Михайлович спрашивает, вы пришли в Отдел заниматься фундаментальной теоретической физикой? На утвердительное «да», он продолжает: «Вот, видите уравнение ассоциативности, в его решения входит

Классическая механика Ньютона и Квантовая механика Шредингера-Гейзенберга. Однако, для квантовой теории поля этих теорий недостаточно, нужна новая физическая теория. А её алгебра наблюдаемых заведомо удовлетворяет этому уравнению... общее решение которого, все еще никто так и не нашел. Да, что там квантовая теория поля, весьма почётно оказаться следующим в ряду Ньютона-Шредингера-Гейзенберга.... берётесь найти общее решение?»

Через несколько месяцев ударного труда общее решение было найдено, конечно, увы, кроме квантовой и классической механик и некоторой их смеси других физических теорий в уравнении не оказалось, но результат был отличный и для диплома, и для первой статьи... и для знакомства с Феликсом Александровичем Березиным, который, как оказалось, в это же время решал эту же задачу и получил тот же ответ...

И впереди были уже существенно нелинейные уравнения неассоциативных гамильтоновых механик. Поиск новых физических теорий автор продолжает по сей день. Трудно переоценить роль талантливого Учителя для начинающего ученого, ведь, даже далеко не сразу в голову автору пришла мысль о том, почему же Юрий Михайлович сам не постарался решить это столь обещающее уравнение... Интуиция.

Уже в решении указанного уравнения появились приёмы, вошедшие в метод функциональных уравнений в теории алгебр, разработанный автором [Толоконников, 1986], [Толоконников, 1988]. Общая задача, в которую входит поиск алгебр наблюдаемых новых физических теорий (в частности, гамильтоновых) состоит в следующем [Толоконников, 1988]. Для её формулировки придётся потрудиться, но такова природа вещей.

Пусть  $K[x], x=(x_1, \dots, x_n)$  кольцо полиномов над полем  $K$  нулевой характеристики,  $\partial_i = \partial / \partial x_i$  - дифференцирования кольца  $K[x]$ . Элемент  $\Omega(x, \partial^1, \dots, \partial^m)$  левого  $K[x]$ -модуля  $K[x][[\partial^1, \dots, \partial^m]]$  формальных степенных рядов по переменным  $\partial^i = (\partial_1^i, \dots, \partial_n^i), i=1, \dots, m$  с коэффициентами из  $K[x]$  задаёт на  $K[x]$   $m$ -арную  $K$ -линейную операцию  $\Omega$ ,  $\omega$ -диагональная проекция  $\omega: K[x^1, \dots, x^m] \rightarrow K[x]$ , определяемая на базисе в  $K[x^1, \dots, x^m]$  посредством формулы

$$\omega(x^1)^{\alpha_1} \dots (x^m)^{\alpha_m} = x^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}$$

и распространяемая на остальные элементы по линейности.

Здесь и ниже используются стандартные мультииндексные обозначения:  
 $\alpha_i$  - набор  $n$  целых неотрицательных чисел

$$\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}), (x^i)^\alpha = (x^i)^{\alpha_{i_1}} \dots (x^i)^{\alpha_{i_n}}, |\alpha_i| = \sum_{j=1}^n \alpha_{i_j},$$

$$\alpha_i + \alpha_j = (\alpha_{i_1} + \alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{i_n} + \alpha_{j_n}), \partial^{\alpha_i} = \partial^{|\alpha_i|} / \partial x_1^{\alpha_{i_1}} \dots \partial x_n^{\alpha_{i_n}}.$$

Указанная операция  $\Omega$  в этих обозначениях задаётся формулой

$$\Omega A_1 \dots A_m = \omega \Omega(x^1, \partial^1, \dots, \partial^m) A_1(x^1) \dots A_m(x^m) =$$

$$= \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x) \partial^{\alpha_1} A_1(x) \dots \partial^{\alpha_m} A_m(x), \Omega(x^1, \partial^1, \dots, \partial^m) \in K[x][[\partial^1, \dots, \partial^m]].$$

Формальный ряд  $\Omega(x^1, \partial^1, \dots, \partial^m)$  называется ядром операции  $\Omega$ . Диагональную проекцию удобно представить в виде композиции  $K$ -линейных отображений

$$\omega A(x^1, \dots, x^m) = \omega_0(\omega_{12}(\dots \omega_{m-1m} A(x^1, \dots, x^m) \dots)), A \in K[x^1, \dots, x^m],$$

задаваемых на базисе в  $K[x]$  и в  $K[x^1, \dots, x^m]$  посредством формул

$$\omega_0(x^j)^\alpha = x^\alpha, \omega_{ij} f = f|_{x^i=x^j}, f \in K[x^1, \dots, x^m].$$

Если ввести обозначение  $\omega_{i_1 \dots i_g} = \omega_{i_1 i_2} * \omega_{i_2 i_3} * \dots * \omega_{i_{g-1} i_g}$ , где  $*$  композиция  $K$ -векторных эндоморфизмов  $End_K K[x^1, \dots, x^m]$  кольца  $K[x^1, \dots, x^m]$ , то предыдущее запишется в виде  $\omega A = \omega_0(\omega_{12 \dots n} A)$ .

При использовании  $\omega_{ij}$  операций правило Лейбница для дифференцирований  $\partial_\mu = \partial / \partial x_\mu, \partial_\mu^i = \partial / \partial x_\mu^i$  запишется так

$$\partial_\mu^i * \omega_{ij} = \omega_{ij} * (\partial_\mu^i + \partial_\mu^j), \partial_\mu \omega_0 A(x^1) = \omega_0 \partial_\mu^1 A(x^1),$$

$$\partial_\mu^{i_1} \omega_{i_1 \dots i_g} = \omega_{i_1 \dots i_g} (\partial_\mu^{i_1} + \dots + \partial_\mu^{i_g}), A \in K[x].$$

Существует  $m$  таких естественных вложений,  $id_j, j=1, 2, \dots, m$ , что

$$id_j: K[x][[\partial^1, \dots, \partial^m]] \rightarrow End_K K[x^1, \dots, x^m],$$

$$id_j \Omega(x, \partial^1, \dots, \partial^m) = \Omega(x^j, \partial^1, \dots, \partial^m),$$

причём  $\Omega(x^j, \partial^1, \dots, \partial^m)$  определяет  $K$ -векторный эндоморфизм кольца  $K[x^1, \dots, x^m]$  по формуле

$$\Omega(x^j, \partial^1, \dots, \partial^m) A(x^1, \dots, x^m) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x^j) \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_m^{\alpha_m} A(x^1, \dots, x^m).$$

Поскольку арность операции  $\Omega$  не фиксируется, удобно кольца полиномов  $K[x^1, \dots, x^m]$  рассматривать в качестве подколец кольца  $K[x^1, \dots, x^m, \dots]$  полиномов счётного числа переменных  $x^1, \dots, x^m, \dots$ , а  $End_K K[x^1, \dots, x^m]$  - в качестве подколец кольца  $End_K K[x^1, \dots, x^m, \dots]$ , именно каждый эндоморфизм  $\alpha \in End_K K[x^1, \dots, x^m]$  индуцирует эндоморфизм  $\tilde{\alpha} \in End_K K[x^1, \dots, x^m, \dots]$ , определенный соотношением  $\tilde{\alpha} f = \alpha f_m$ , где  $f_m \in K[x^1, \dots, x^m] \subset K[x^1, \dots, x^m, \dots]$  и  $f - f_m$  является элементом идеала в  $End_K K[x^1, \dots, x^m, \dots]$ , порожденного множеством  $\{x^j \mid j > m\}$ .

Композицию  $K$ -векторных эндоморфизмов кольца  $End_K K[x^1, \dots, x^m]$  будем также обозначать звездочкой  $*$ :

$$(\Omega_1 * \Omega_2)A = \Omega_1(\Omega_2 A), \Omega_1, \Omega_2 \in End_K K[x^1, x^2, \dots], A \in K[x^1, x^2, \dots].$$

Обозначим множество конечноместных операций  $K$ -полилинейных на  $K[x]$  через  $\Omega^{(\infty)} = \cup_{i=1}^{\infty} \Omega^{(i)}$ ,  $\Omega^{(i)}$  - множество  $K$ -полилинейных операций на  $K[x]$  арности  $i$ .

Множество операций  $\Omega^{(m)}$  на  $K[x]$  фиксированной арности является  $K$ -векторным пространством

$$\left(\sum_i a_i \Omega_i\right)A_1 \dots A_m = \sum_i a_i \Omega_i A_1 \dots A_m, a_i \in K, i = 1, 2, \dots, \Omega_i \in \Omega^{(m)}.$$

Отметим важное подкольцо кольца  $End_K \Omega^{(m)}$ , индуцированное эндоморфизмами  $End_K K[x]$ , а именно, каждый элемент  $U \in End_K K[x]$  продолжается до эндоморфизма  $\hat{U} \in End_K \Omega^{(m)}$  по формуле

$$(\hat{U} \Omega)(x, \partial^1, \dots, \partial^m) = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_m} U \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x) (\partial^1)_{\alpha_1}^{\alpha_1} \dots (\partial^m)_{\alpha_m}^{\alpha_m},$$

где  $\Omega(x, \partial^1, \dots, \partial^m) = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(x) (\partial^1)_{\alpha_1}^{\alpha_1} \dots (\partial^m)_{\alpha_m}^{\alpha_m}$  - ядро операции  $\Omega$ .

Эндоморфизм  $\hat{U}$  имеет вид

$$(\hat{U} \Omega)(x, \partial^1, \dots, \partial^m) = U(x, \hat{\partial}) \Omega(x, \partial^1, \dots, \partial^m),$$

где  $\hat{\partial} = (\hat{\partial}^1 / \partial x_1, \dots, \hat{\partial}^m / \partial x_n)$  - набор операторов дифференцирования ряда  $\Omega(x, \partial^1, \dots, \partial^m)$  по переменным  $x_1, \dots, x_n$ , оператор  $\hat{\partial}$  снабжен шляпкой, чтобы отличать его от  $\partial^1, \dots, \partial^m$  являющихся в  $K[x][[\partial^1, \dots, \partial^m]]$  формальными переменными.

Операцию композиции эндоморфизмов из  $End_K \Omega^{(m)}$  обозначим также через  $*$ . Аналогично продолжаются отображения  $\omega_0, \omega_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_0 \Omega(x^1, \partial^1, \dots, \partial^m) &= \Omega(x, \partial^1, \dots, \partial^m), \hat{\omega}_{ij} \Omega(\dots, x^i, \dots, x^j, \dots, \partial^1, \dots, \partial^m) = \\ &= \Omega(\dots, x^i, \dots, x^i, \dots, \partial^1, \dots, \partial^m), \hat{\omega}_{i_1 \dots i_g} = \hat{\omega}_{i_1 i_2} * \hat{\omega}_{i_2 i_3} * \dots * \hat{\omega}_{i_{g-1} i_g} \\ \hat{\omega} \Omega &= \hat{\omega}_0(\hat{\omega}_{1 \dots m} \Omega), \Omega \in K[x^1, \dots, x^m][[\partial^1, \dots, \partial^m]]. \end{aligned}$$

Имеет место аналог формул коммутации

$$\hat{\partial}_\mu^i * \hat{\omega}_{ij} = \hat{\omega}_{ij} * (\hat{\partial}_\mu^i + \hat{\partial}_\mu^j), \hat{\partial}_\mu \hat{\omega}_0 \Omega = \hat{\omega}_0 \hat{\partial}_\mu^1 \Omega .$$

Можно показать, что операция дифференцирования  $D_j = \partial / \partial(\partial_j)$  по переменным  $\partial_j$  кольца формальных рядов  $K[x][[\partial]]$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  удовлетворяет соотношению

$$D_j(U * V) = (D_j U) * V + U * D_j V, U, V \in K[x][[\partial]] .$$

Операции  $\hat{\omega}, \hat{\omega}_0, \hat{\omega}_{\alpha\beta}$  коммутируют с  $D_j(\alpha, \beta = 1, \dots, n)$  :

$$D_j \hat{\omega} U = \hat{\omega} D_j U, D_j \hat{\omega}_0 U = \hat{\omega}_0 D_j U, D_j \hat{\omega}_{ij} U = \hat{\omega}_{ij} D_j U .$$

Удобно отождествлять операции с их ядрами, которые реализуют частный случай полипсевдодифференциальных операторов. Конечноместные операции образуют частичную алгебру  $\{\Omega, *\}$  по отношению к их композиции, обозначенной звёздочкой. Таким образом, через звёздочку обозначено три различных объекта (композиции эндоморфизмов из  $End_K K[x]$  и из  $End_K \Omega^{(m)}$ , а также композиция операций  $\Omega^{(\infty)}$ ), что, однако, при учёте контекста не приводит к путанице.

Для композиции  $U * V$  эндоморфизмов из  $End_K K[x]$ , как можно показать, имеется явная формула

$$(U * V)(x, \partial) = \check{\omega} \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \hat{\partial}_{x_j^2} D_j^1 \right\} U(x^1, \partial^1) V(x^2, \partial^2) ,$$

где  $U(x^1, \partial^1), V(x^2, \partial^2)$  ядра операторов,  $D_j^1$  дифференцирование формального ряда  $U(x^1, \partial^1)$  по формальной переменной  $\partial_j^1$ ,  $\hat{\partial}_{x_j^2}$  - дифференцирование формального ряда  $V(x^2, \partial^2)$  по формальной переменной  $x_j^2$ ,  $\check{\omega}$  - диагональная проекция как по переменным  $x_j$ , так и по  $\partial_j$ , то есть  $\check{\omega} A(x^1, x^2, \partial^1, \partial^2) = A(x, x, \partial, \partial) \in K[x][[\partial]]$ .

Оператор  $U = End_K K[x]$  определён для любой операции из  $\{\Omega, *\}$ . От частичной алгебры  $\{\Omega, *\}$  с помощью обратимого оператора  $U = Aut_K \Omega^{(m)}$ , который является продолжением  $U = Aut_K k[x]$  можно

перейти к эквивалентной частичной алгебре  $\{\Omega, \circ\}$  с частичной операцией

$$\hat{U}(\Omega_1 * \Omega_2) = \hat{U}\Omega_1 \circ \hat{U}\Omega_2 ,$$

для которой оператор  $D_j$ , как это можно показать, является дифференцированием.

Наконец, мы можем сформулировать ключевую задачу метода функциональных уравнений в теории алгебр, которая является основой для проблемы поиска формализмов алгебр наблюдаемых новых физических теорий.

Пусть теперь на  $K[x]$  задана  $m$ -арная  $K$ -линейная операция  $\Omega$ , удовлетворяющая тождеству, представимому в виде

$$\xi = 0 ,$$

где  $\xi$  линейная комбинация с коэффициентами из  $K$  производных для операции  $\Omega$  операций одинаковой аности  $a$ . Например, для бинарных операций  $\pi$  в алгебрах над полем нулевой характеристики можно без потери общности ограничиться рассмотрением полилинейных, так как в этом случае любое тождество эквивалентно системе полилинейных  $\xi$  [Жевлаков, 1978]. Более того, для этого случая А.И.Мальцев [Мальцев, 1950] задачу описания возможных тождеств свёл к перечислению неэквивалентных неприводимых представлений симметрических групп. Ядро  $\xi(x, \partial^1, \dots, \partial^m)$ ,  $a \geq m$  операции  $\xi$  может быть вычислено по ядру операции  $\Omega$ , если воспользоваться введенными выше понятиями и определениями. Таким образом, каждое тождество порождает \*-операторное функциональное уравнение для ядра операции  $\Omega$

$$\xi(x, \partial^1, \dots, \partial^m) = 0 . \quad (*)$$

Например, если  $\pi$  ассоциативная бинарная операция, то равенство нулю ассоциатора приводит для ядра  $\pi(x, \partial^1, \partial^2)$  к \*-операторному функциональному уравнению ассоциативности

$$\omega \{ \pi(x^1, \partial^1 + \partial^2, \partial^3) * \pi(x^1, \partial^1, \partial^2) - \pi(x^1, \partial^1, \partial^2 + \partial^3) * \pi(x^2, \partial^2, \partial^3) \} = 0 .$$

При наличии в универсальной алгебре нескольких операций различной аности имеющиеся в алгебре тождества приводят к системе \*-операторных уравнений (\*).

Так, аксиомы для алгебр наблюдаемых гамильтоновых механик приводят к системе \*-операторных уравнений

$$\begin{aligned} \omega \{ \sigma(x^1, \partial^1, \partial^2 + \partial^3) * \sigma(x^2, \partial^2, \partial^3) - \sigma(x^1, \partial^1 + \partial^2, \partial^3) * \sigma(x^1, \partial^1, \partial^2) - \\ - \sigma(x^1, \partial^2, \partial^1 + \partial^3) * \sigma(x^1, \partial^1, \partial^3) \} = 0, \\ \omega \{ \sigma(x^1, \partial^1, \partial^2 + \partial^3) * \pi(x^2, \partial^2, \partial^3) - \pi(x^1, \partial^1 + \partial^2, \partial^3) * \sigma(x^1, \partial^1, \partial^2) - \\ - \pi(x^1, \partial^2, \partial^1 + \partial^3) * \sigma(x^1, \partial^1, \partial^3) \} = 0, \\ \sigma(x^1, \partial^1, \partial^2) + \sigma(x^1, \partial^2, \partial^1) = 0. \end{aligned}$$

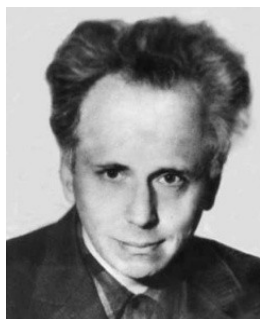
Системы \*-операторных функциональных уравнений впервые введены автором, также им найдены общие решения ряда таких систем, инвариантных относительно некоторых групп Ли. В частности, обсуждаемые уравнения с ядрами операций, не зависящими от самих переменных  $x = (x_1, \dots, x_m)$ , относятся к алгебрам, инвариантным относительно группы сдвигов (группы Гейзенберга).

Итак, если на алгебру наблюдаемых гамильтоновой теории наложить выполняющееся в квантовой и классической механиках естественное условие, что она содержит полиномы (как вариант, от координат и импульсов частиц) и что операции линейны по каждому из сомножителей, то тогда алгебры наблюдаемых всех возможных физических теорий лежат среди решений указанной системы \*-операторных функциональных уравнений гамильтоновости.

Общее решение указанных уравнений даёт полную классификацию гамильтоновых алгебр и тем самым всех возможных гамильтоновых механик.

Далее мы обсудим до какого уровня дошло продвижение в решении этой задачи и куда на современном этапе вывела сама проблема поиска новых физических теорий, отличных от классической и квантовой.

Поскольку в задачи статьи входит одна из поставленных редакторами данного выпуска журнала просьб по включению исторических моментов в обзоры статей, то вернёмся к моменту обсуждений с Ф.А.Березиным уравнения ассоциативности.



Ф.А.Березин  
(1931-1980)

Юрий Михайлович не редко поручал мне относить какие-то бумаги домой к Ф.А.Березину (и А.А.Кириллову). Мне казалось, что я продвинулся в решении \*-операторного уравнения ассоциативности и я на этих встречах пытался обсуждать вопросы с Феликсом Александровичем. Он же считал, что общее \*-операторное уравнение невозможно решить и не от недостатка ума, а просто потому, что *оно содержит в себе всё*. Мои весьма настойчивые попытки обсуждать продвижения в уравнении привели к категорическому совету примкнуть к Д.Лейтесу и задачам суперсимметрии,

тогда началу крайней популярности Феликса Александровича и его блестящих работ (как и работ Дмитрия Лейтеса) в этой области. Я с теплотой вспоминаю



энтузиазм Д.Лейтеса и других участников штурма суперсимметрии, но по сравнению с задачей, поставленной мне моим научным руководителем, суперсимметрия, скажем так, мне показалась мало интересной. По несчастью Ф.А.Березин погиб, сплаваясь по реке на Урале, о своих успехах я уже не мог ему рассказать.

Пуассоново умножение в аксиомах гамильтоновых механик при наличии антисимметрии является лиевым, трансляционно инвариантные бесконечномерные алгебры Ли, удовлетворяющие выписанным выше функциональным уравнениям гамильтоновых механик в то время были в кругу интересов строившего классификацию локальных алгебр Ли А.А.Кириллова [Кириллов, 1976].



А.А.Кириллов  
(р.1936)

Уравнение ассоциативности сводится к линейному, в то время как уравнение для алгебр Ли существенно нелинейно. Систему уравнений для неассоциативных трансляционно инвариантных гамильтоновых механик удалось решить (гораздо большими усилиями), получив их полную классификацию, при этом новых неизвестных алгебр в общем решении не оказалось.

Тем не менее, ввиду того, что точные решения нелинейных уравнений в самой математике немногочисленны и весьма ценны, автор был представлен И.М.Гельфанду. Израиль Моисеевич слушал доклад почти две минуты, похвалил и отправил докладчика завершать доклад на в то время известный и замечательный семинар А.А.Кириллова, что и было сделано. В последствии Александр Александрович Кириллов был оппонентом на защите диссертации автора, содержащей указанную классификацию гамильтоновых алгебр. К докладу у И.М.Гельфанда я тщательно готовился, и был в некотором шоке от столь короткого внимания к столь «выдающемуся достижению»... Мне в утешение коллеги рассказывали в шутку характерный эпизод о семинаре И.М.Гельфанда. Секретарь семинара подходит к И.М. и говорит, что математик  $N$  просит выступить на семинаре с докладом и по времени ему надо хотя бы пять минут. И.М. отвечает, хорошо, пусть докладывает, дадим ему две минуты. ??? Да, за пять минут он, вообще, расскажет все, что знает.

Постепенно были решены функциональные уравнения для тождеств хоть как-то относящихся к физике, были классифицированы трансляционно инвариантные йордановы, бинарно-лиевы алгебры, алгебры близкие к ассоциативным, наконец, появились классы новых алгебр в результате решения \*-операторных функциональных уравнений. Сформировался некоторый инструментарий приемов, который составил метод функциональных уравнений в теории алгебр.

Уровень трудностей при решении \*-операторных уравнений можно оценить несколькими «побочными» задачами, которые удалось решить в процессе поиска новых алгебр наблюдаемых. Одна из таких задач состоит в известной нерешенной проблеме суммирования рядов Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа в формальной теории групп (не ясно как приводить подобные члены из разрастающегося числа коммутаторов при суммировании рядов), с этими рядами связаны версии вычисления интеграла Фейнмана по путям. Важным примером является уравнение ассоциативности, связанное с квантовым уравнением Янга-Бакстера, для которого методом функциональных уравнений удалось найти первое общее решение для простейшей из неполупростых алгебр Ли. Приведём для примера вычисленную [Толоконников, 1987] методом функциональных уравнений (где просуммирован ряд Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа для группы Лоренца) операцию умножения (аналог приведённого выше стандартного умножения  $\pi AB = \omega \exp(i \partial_{x_2} \partial_{p_1}) A(x_1, p_1) B(x_2, p_2)$ )

$$\begin{aligned}
 (\pi AB)(\alpha, \dots, \mu) &= \omega \pi(\alpha, \dots, \partial^2) A(\alpha_1, \dots, \mu_1) B(\alpha_2, \dots, \mu_2); \\
 \ln \pi(\alpha, \dots, \partial^2) &= -\alpha \partial_{\alpha_2} - \nu \partial_{\nu_2} - \mu \partial_{\mu_1} - \beta \partial_{\beta_1} - \gamma \ln R + 2\omega \Delta + R \exp(-\partial_{\gamma_1}) \{[\nu \partial_{\nu_2} + \alpha \partial_{\alpha_2} + \\
 &+ (\nu \partial_{\mu_1} - \alpha \partial_{\beta_1})(\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2)/2] \cos \partial_{\omega_1} + [\alpha \partial_{\nu_2} - \nu \partial_{\alpha_2} + (\alpha \partial_{\mu_1} + \nu \partial_{\beta_1})(\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2)/2] \sin \partial_{\omega_1}\} + \\
 &+ 2 \exp(-\partial_{\gamma_2})(\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2)^{-1} \{(\beta \partial_{\nu_2} + \mu \partial_{\alpha_2}) \sin \partial_{\omega_2} + (\mu \partial_{\nu_2} - \beta \partial_{\alpha_2}) \cos \partial_{\omega_2} - R[\mu \partial_{\nu_2} - \beta \partial_{\alpha_2} + \\
 &+ (\beta \partial_{\beta_1} + \mu \partial_{\mu_1})(\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2)/2] \cos(\partial_{\omega_2} + 2\Delta) - \\
 &- R[\beta \partial_{\nu_2} + \mu \partial_{\alpha_2} + (\beta \partial_{\mu_1} - \mu \partial_{\beta_1})(\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2)/2] \sin(\partial_{\omega_2} + 2\Delta)\},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \arcsin(\partial_{\nu_2} / \sqrt{\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2}) - \arcsin([2\partial_{\nu_2} + \partial_{\mu_1}(\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2)] / 2\sqrt{R(\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2)}), \\
 R &= [1 + \partial_{\mu_1} \partial_{\nu_2} - \partial_{\beta_1} \partial_{\alpha_2} + (\partial_{\mu_1}^2 + \partial_{\beta_1}^2)(\partial_{\nu_2}^2 + \partial_{\alpha_2}^2)/4]^{-1}, \quad A, B \in \mathfrak{A}.
 \end{aligned}$$

С перечисленными результатами можно ознакомиться по [Толоконников, 1986], [Толоконников, 1988] и приведённым там ссылкам.

В последние десятилетия 20 века развивалось два важнейших для проблемы поиска новых формализмов для алгебр наблюдаемых направления. Первое, что имеется в виду, это выход в свет книг Р.Пенроуза [Пенроуз, 2005], в которых он демонстрирует недостаточность имеющихся физических теорий для описания феномена сознания и **ставит задачу поиска новых физических теорий** для столь фундаментальной проблемы человечества. Здесь и сильный искусственный интеллект и «может ли машина мыслить?»... Но на этом мы не будем останавливаться, сославшись на три книги автора по этому поводу [Толоконников, 2007, 2011, 2012].

Второе, это осознание и развертывание того, что Васюков В.Л. называет «плюрализмом» [Васюков, 2012], означающим существование многочисленных логик, математик и, добавим, физик...

Первопроходцами здесь являются, безусловно, ученые Казанской математической школы Н.И.Лобачевский, открывший неевклидову геометрию,

и П.С.Порецкий, предложивший и изучавший первую трехзначную логику [Порецкий, 1884]. Невероятная трудность открытия представляется связанной с фактическим преодолением двухтысячелетней догмы данных Богом единого физического пространства Евклида и законов мышления в виде единственно возможной классической логики Аристотеля. Другими словами, геометрия и логика были единым и единственно возможным набором аксиом двухтысячелетней догмы, а Н.И.Лобачевский доказал, что природа допускает и другие наборы аксиом и их интерпретаций. В результате, говоря по поводу сегодняшней ситуации с плюрализмом словами Михаила Васильевича Ломоносова, благодаря Н.И.Лобачевскому

«Открылась бездна звезд полна,  
Звездам числа нет, бездне дна!»,

именно, бездна бесчисленных логик и математик, а, следовательно, и возможных физик и физических теорий. В частности, возможных теорий на основе аксиом гамильтоновых механик, опирающихся на другие отличные от классической логики, исчисления и открытые во второй половине 20-го века универсумы помимо теоретико-множественного универсума категории множеств. Новые универсумы в виде топосов, открытых Гротендиком, категорная логика, функториальная семантика Ловера, другие современные разделы теории категорий чрезвычайно расширили направление поиска новых физических теорий и их классификации. Об этом прекрасно говорит такой пример, как появившаяся в начале века категорная квантовая механика Абрамского [Abramsky, 2009] для нужд квантовых вычислений.

Сам термин «теория» в названии направления «поиска новых физических теорий» требует обязательного на некотором шаге развития уточнения. В настоящее время этот термин понимается на основе построения из букв алфавита правильно построенных формул, некоторые из которых называются аксиомами, правил вывода (исчисления, логика) с дальнейшей интерпретацией такой формальной конструкции в подходящем универсуме.

Следующий неизбежный этап в развитии обсуждаемого направления состоит в обращении к теории систем. Мы уточнили термин «теория», но он идёт в паре с термином «физическая». Очевидно, и никто не будет спорить, что бывает несколько типов теорий, физическая, химическая, биологическая и тому подобное. Поэтому естественно перейти от термина «физической теории» к «теории физических *систем*», соответственно, к теориям химических, биологических и других систем. А сама теория систем есть наука наук, как теперь общепризнанно (см., например, [Yi-Lin Forrest, 2018]). Тут, однако, всплывает редукционизм, часто встречающийся у физиков, как сведение химии к физике, биологии к физике и... признание феномена сознания в качестве физического явления, для которого Р.Пенроуз поставил задачу отыскать

подходящую *физическую* теорию. Но сознание проявляется, например, в функциональных системах в акцепторе результата действия... Р.Пенроуз ничего не говорит о сведении функциональных систем к физическим. Возможно, сведение будет происходить не в прямом смысле, а в погружении универсума функциональных систем в универсум систем физических или даже наоборот. По-видимому, подход здесь должен опираться на некую функционально-физическую систему, причем должен быть математический аппарат, точно описывающий такой вид систем. И этот аппарат суть *новая физическая* и одновременно *физиологическая теория*. Редукционизм есть и в самой физике, например, в виде сведения классической механики к квантовой. Теория систем предлагает взаимоотношения теорий рассматривать на своем системном уровне и языке. Простейший вариант редукционизма состоит в построении некоторого морфизма (предельного перехода, рассмотрения как подтеории и тому подобное) из одной теории в другую теорию. В фундаментальной работе Ю.М.Широкова по аксиоматике гамильтоновых механик [Широков, 1975] показано, что такого морфизма из квантовой механики в классическую нет, а взаимоотношение теорий описывается на другом уровне и языке.

Экскурс в системный подход (стоит, по-видимому, по крайней мере, сначала опираться только на сколь-нибудь формализованные версии системного подхода) ошеломляет несколькими десятками самого определения понятия системы. Однако все подходы (включая строгие подходы математических теорий систем) кроме теории функциональных систем, как это продемонстрировал П.К.Анохин [Анохин, 1973] грешат полным отсутствием ссылок на механизм, который из разрозненных частей, собственно, и собирает систему. Именно, этот механизм П.К.Анохин назвал системообразующим фактором и поставил его во главу угла самого понятия системы. Интуитивные построения П.К.Анохина, К.В.Судакова и их школы, в частности, в виде многочисленных схем функциональных систем, автор формализовал в категорной теории систем, используя язык категорных склеек и свёрточных поликатегорий. Замечательным образом схемы функциональных систем получили при определённой модернизации статус категорных диаграмм, на которые эти схемы очень похожи. Можно даже говорить об определённой изначальной формализации теории функциональных систем с помощью этих схем. Отметим, что формализованные в категорной теории систем постулаты для систем, данные П.К.Анохиным, немедленно выводят на категорный язык и широкий класс универсумов, отличных от традиционного универсума теории множеств [Толоконников, 2018]. Данная работа в основном посвящена развитию аппарата категорной теории систем.

Итак, от проблемы, поставленной Ю.М.Широковым влившейся в проблему, поставленную Р.Пенроузом, мы переходим к системам, поскольку только физических систем в проблеме Р.Пенроуза недостаточно. Следует рассмотреть теории и объединенные теории таких систем, как физические,

функциональные и другие, которые необходимы для формализации и описания феномена сознания.

Интеллект, очевидный атрибут сознания, проявляется не только у человека, но и на уровне других живых организмов вплоть до бактерий. Нас, однако, интересуют только строго математические подходы или те подходы в биологии, которые близки к формализации. Многочисленные проявления математических закономерностей в биологии описаны в огромном количестве работ биологов для самых разных организмов. Оказалось, что многие из указанных математических закономерностей связаны с алгебраическим анализом свойств генома, основы всего живого. В настоящее время развивается алгебраическая биология, строго математическая наука, основоположником которой является С.В.Петухов [Петухов, 2008]. В стратегическую задачу алгебраической биологии входит получение алгебраическими методами свойств организмов из свойств генетического кода. Безусловно, на свойства организма и экспрессию генов, определяющих те или иные свойства, влияют свойства биомолекул, свойства самой ДНК, как биомолекулы, внешняя среда, в которой развивается организм. Категорная теория систем и основанная на ней категорная химия, встроенные в алгебраическую биологию, доставляют дополнительные алгебраические методы для алгебраической биологии. Возможно ли свойства интеллекта получить расчетами на основе методов алгебраической биологии? Для бактерий подобное просматривается, но для интеллекта человека это представляется пока отдаленной перспективой. Тем не менее, на этом пути строго математической науки при описании динамики развития организма должен появляться момент зарождения у особи сознания и проявление его свойств, включая интеллектуальные свойства. Не будут ли на этом пути заложены основы той физической и одновременно физиологической и другой системной теории, описывающей феномен сознания? Сложность задачи, по-видимому, не осознаётся, но такая постановка и подход вполне разумны и, главное, конструктивны, так как используют уже имеющиеся строго математические модели. Можно говорить о том, что это не просто рассуждения (философские и так далее) об интеллекте, включая искусственный и сильный искусственный интеллект, а строго математическая столбовая дорога на пути, указанном проблемой построения новых физических теорий, выдвинутой Ю.М.Широковым и Р.Пенроузом для решения вполне конкретных научных задач. Другими словами, интеграция категорной теории систем и алгебраической биологии нами рассматривается как начальная версия той системной (физической, физиологической,...) теории, которая сможет адекватно описывать феномен сознания и интеллектуальные свойства организмов.

Работа разбита на две части.

В первой части изложение в целях расширения аудитории проводится на сравнительно элементарном уровне, но без утраты строгости. Далее изложены три больших темы, категорные склейки, свёрточные поликатегории с

нейросетями и категорные системы, как формализация теории функциональных систем П.К.Анохина.

Во второй части продолжено изучение категорных склеек, в частности, дано представление с их помощью высших категорий и дуальности, построена категорная система гемостаза, насколько позволяют экспериментальные данные по гемостазу, категорная химия с моделями биомолекул, в том числе РНК и ДНК, и раскрыта программа развития алгебраической биологии с встроенной в неё категорной теорией систем, намеченная во введении.

## *2. Категорные склейки*

2.1. Поликатегории ввёл в 1985 г. Сабо [Szabo, 1975] (будем называть их поликатегориями Сабо), как набор полистрелок, композиция которых определена аналогично композиции стрелок и мультистрелок в категориях и мультикатегориях. Мы построим поликатегории и более общие свёрточные поликатегории из категорных склеек в разделе 3. Полистрелки имеют входы и выходы, ими естественно моделировать нейроны. Однако, связи (по которым распространяются спайки и другие связи межклеточной коммуникации) нейронов, наблюдаемые в мозге (см. обзор [Сидоров, 2012], а также [Anastassiou, 2011]), существенно богаче тех возможностей, которые может обеспечить композиция поликатегорий Сабо. В отдельном пункте мы напомним определение поликатегорий Сабо и покажем указанную ограниченность в отношении моделирования нейросетей.

Теория поликатегорий Сабо находит применения (см., например, [Shulman, 2020]), но весьма сложна, работа с ними "вручную", как это делает Сабо со слов Р.Гарнера сталкивается с проблемами: "Further problems arise when one wishes to address aspects of a putative 'theory of polycategories': what are the correct notions of polyfunctor or polytransformation? What is a polycategorical limit? In attempting to answer such questions without a formal framework, one is forced into the unsatisfactory position of relying on intuition alone" [Garner, 2008]. Для случая симметричных поликатегорий Р.Гарнер построил их представление в виде монад в подходящей двухсторонней бикатегории Клейсли, что для этого случая поликатегорий позволяет систематически развивать их теорию уже не "вручную". Построенное Г.Гарнером представление обобщает аналогичное известное представление мультикатегорий в виде моноидов в категориях распорок [Burrone, 1971], [Hermida, 2000], [Leinster, 2004]. Попытка подобного обобщения для произвольных поликатегорий в [Koslowski, 2005] не привела к окончательному построению представления поликатегорий. Таким образом, общий случай поликатегорий Сабо остаётся в значительной степени при построении теории работой "вручную".

Сабо ввёл поликатегории для задач логики, так как правила вывода представляют собой в подходе Генцена полистрелки (конъюнкции посылок

переводятся в дизъюнкции формул) и полистрелки, как можно показать, соединяются между собой с помощью одного выхода первой и одного входа другой полистрелки. Такое ограничение в способах соединения полистрелок до некоторой степени снимается в PROP, введенных Маклейном [MacLane, 1965] (и в их разновидностях диоперадах и др., см. [Graves, 2020], а также обзор Markl M. Operads and PROPs, 2006, arXiv:math/0601129v3).

В нашем подходе мы исходим из нужд моделирования соединений нейронов в мозге, для чего не хватает соединений в виде изучаемых композиций полистрелок в поликатегориях Сабо и PROP, и теории систем, когда необходимо не только собирать систему из будущих подсистем, но и раскладывать ее на подсистемы. Для этого мы заменяем композиции полистрелок новым более общим видом связей, называемых свёртками, вводим и используем категорные склейки, из которых строятся поликатегории с явным заданием истории получения полистрелок (аналог нерва в категориях) [Толоконников, 2016, 2017, 2018].

2.2. Рассмотрим счётное число сортов с переменными и функциональными символами проекций  $x_k^{(i)}, C^{(j)}, i, j, k \in \mathbb{N}$ .

Вводим функциональные символы  $\xi_{ij}$  вида  $(i \rightarrow j)$  со свойствами

$$\xi_{ij} \xi_{ji} x_k^{(i)} = x_k^{(i)}, i \neq j.$$

Для каждого  $i$  обозначим  $\check{C}_i^{(j)} = \xi_{ij} C^{(j)} \xi_{ji}$  и вводим аксиомы

$$\check{C}_i^{(k)} \check{C}_i^{(j)} = \check{C}_i^{(l)} \quad (\check{C}_i^{(i)} \check{C}_i^{(i)} = \check{C}_i^{(i)}, i, j, k \in \mathbb{N}).$$

Таким образом, функциональные символы образуют (мета)алгебру, с таблицей умножения, отвечающей последним аксиомам.

Вводим обозначения для формул

$$Ob^{(i)}(x^{(i)}) \stackrel{\text{def}}{=} (x^{(i)} =_i C^{(i)}(x)),$$

а также переменные  $a_k^{(i)}, k=1,2,3 \dots$  (объекты, области) сорта  $i$ , ограниченные на совокупность, состоящую из  $Ob^{(i)}(x^{(i)})$ , и ограниченные кванторы

$$\begin{aligned} \forall^{Ob} a_k^{(i)} W(a_k^{(i)}) &\stackrel{\text{def}}{=} \forall x^{(i)} (Ob(x^{(i)}) \supset W(x^{(i)})), \\ \exists^{Ob} a_k^{(i)} W(a_k^{(i)}) &\stackrel{\text{def}}{=} \exists x^{(i)} (Ob(x^{(i)}) \wedge W(x^{(i)})). \end{aligned}$$

Вводим предикаты равенства вида  $(i \rightarrow j)$

$$x^{(i)} =_{ij} x^{(j)} \stackrel{\text{def}}{=} (x^{(i)} =_i \xi_{ij} x^{(j)}).$$

Вводим для каждого сорта набор базовых функциональных символов  $\mu_l^{(i)}, \nu_l^{(i)}, \dots, l=1,2, \dots$ , называемых  $n$ -арными операциями,  $n=0,1,2,3, \dots$  и набор *тождеств*, как равенств термов одного сорта  $t_m^{(i)} = t_k^{(i)}$ .

Вводим счётное число  $\alpha = 1, 2, 3, \dots \in \mathbb{N}$  указанных наборов сортов, для обозначения чего добавим дополнительный индекс, другими словами, рассматриваем уже переменные, символы, равенства, тождества и изоморфизмы, соответственно,  $x_k^{(i, \alpha)}, C^{(i, \alpha)}, \mu_l^{(i, \alpha)}, \dots, =_{i, \alpha, i', \alpha'}, \xi_{ij}^{(\alpha)}$ , отметим, что изоморфизмы, в отличие от равенств, не действуют между сортами для различных  $\alpha$ .

Определение

**Сигнатурой** называется набор функциональных букв проекций и операций  $C^{(i)}, \mu_l^{(i)}$ .

Вводим три копии сортов  $x_k^{(i, \alpha)}, C^{(i, \alpha)}, \mu_l^{(i, \alpha)}, \dots, =_{i, \alpha, i', \alpha'}, \xi_{ij}^{(\alpha)}$ , первая из которых используется для **внешних свёрток**, в ней все буквы для их отличия от основных букв **внешней склейки** наделяются штрихом  $x_k^{(i, \alpha)}, C^{(i, \alpha)}, \mu_l^{(i, \alpha)}, \dots, =_{i, \alpha, i', \alpha'}, \xi_{ij}^{(\alpha)}$ , вторая используется для **внутренних свёрток** и наделяется, помимо штриха, еще надчеркиванием  $\bar{x}_k^{(i, \alpha)}, \bar{C}^{(i, \alpha)}, \bar{\mu}_l^{(i, \alpha)}, \dots, \bar{=}_{i, \alpha, i', \alpha'}, \bar{\xi}_{ij}^{(\alpha)}$ , третья используется для **внутренней склейки** и наделяется только надчеркиванием  $\bar{x}_k^{(i, \alpha)}, \bar{C}^{(i, \alpha)}, \bar{\mu}_l^{(i, \alpha)}, \dots, \bar{=}_{i, \alpha, i', \alpha'}, \bar{\xi}_{ij}^{(\alpha)}$ .

Определение

**Полной базовой склейкой** называется формула, составленная из конъюнкций формул

$$a_k^{(i, \alpha)} =_{i, \alpha} C^{(i, \alpha)}(x_k^{(i, \alpha)}), a_k^{(i, \alpha)} =_{i, \alpha} C^{(i, \alpha)}(x_k^{(i, \alpha)}), \\ \bar{a}_k^{(i, \alpha)} =_{i, \alpha} \bar{C}^{(i, \alpha)}(\bar{x}_k^{(i, \alpha)}), \bar{a}_k^{(i, \alpha)} =_{i, \alpha} \bar{C}^{(i, \alpha)}(\bar{x}_k^{(i, \alpha)})$$

и равенств  $\eta_k^{(i, \alpha)} = \theta_m^{(j, \beta)}$ ,  $\eta_k^{(i, \alpha)}, \theta_m^{(j, \beta)}$  являются любыми из символов  $a_n^{(i)}, x_m^{(i)}, n, m \in \mathbb{N}$  указанных сортов, знак равенства имеет соответствующие опущенные здесь индексы.

Определение

Разнесём конъюнкции для каждой формулы полных склеек по четырем ячейкам таблицы 2x2. В ячейку (1,1) размещаем нештрихованные и без надчеркивания буквы подформулы **внешних склеек**. В ячейку (1,2) размещаем содержащие буквы со штрихами подформулы **внешних свёрток**. В ячейку (2,1) размещаем содержащие буквы с надчеркиванием подформулы **внутренних склеек** и в ячейку (2,2) размещаем содержащие буквы с надчеркиванием и штрихами подформулы **внутренних свёрток**:

$u$	$v'$
$\bar{w}$	$\bar{r}'$

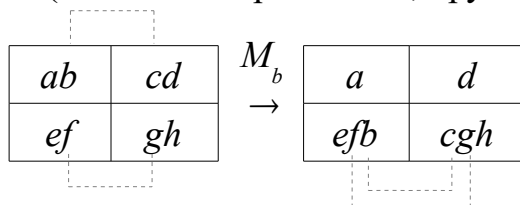


При размещении формулы в таблице штрихов и надчеркиваний можно не указывать, они при необходимости восстанавливаются очевидным образом. В этих обозначениях полная склейка представлена указанной таблицей.

По построению формул полных склеек подформулы равенства содержат только те буквы переменных, которые встретились в подформулах вида  $a=C(x)$ . Это позволяет знаки равенства (формулы с равенствами переменных) исключить из таблицы, заменив формулы равенства пунктирами, соединяющими буквы переменных, входящие в равенства.

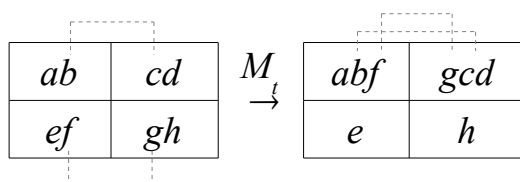
Зададим специфические для категорных склеек правила вывода  $M_t, M_r, M_l, M_b$ , переводящие одни формулы полных склеек в другие, за счет перемещения формул между ячейками таблицы полной склейки.

$M_b$  перемещает в нижние ячейки из верхних те конъюнкции из формул, которые имеют соединения (одна из которых слева, другая справа),



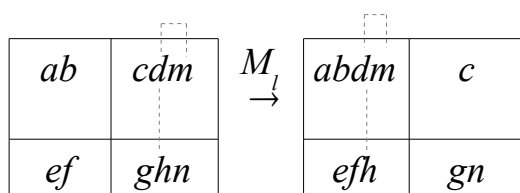
при перемещении задаётся изменение сортов, отвечающее определению  $M_b$ .

$M_t$  перемещает в верхние ячейки из нижних те формулы, которые имеют соединения (одна из которых слева, другая справа)



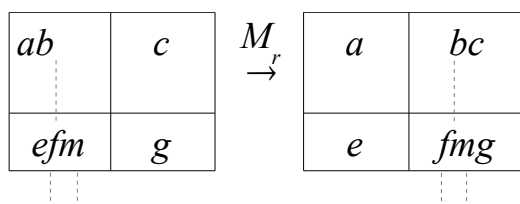
при перемещении задаётся изменение сортов, отвечающее определению  $M_t$ .

$M_l$  перемещает связанные по вертикали и внутри пары из правых ячеек в левые (направление движения налево)



при перемещении задаётся изменение сортов, отвечающее определению  $M_l$ .

$M_r$  перемещает связанные пары из левых ячеек в правые (движение направо)



при перемещении задаётся изменение сортов, отвечающее определению  $M_r$ .

Вводится правило вывода  $E\nu$ , и обратное ему  $E\nu^{-1}$ , основанное на функциональных символах операций  $\mu_i^{(i,\alpha)}$  и расстановке в соответствующих местах знаков =.

Применение свёртки, имеющейся в клетке (1,2) таблицы склейки, состоит из последовательного применения правил вывода  $M_b$ ,  $M_l$ ,  $E\nu$ .

Операция обратная указанной, состоит из последовательного применения правил вывода  $E\nu^{-1}$ ,  $M_r$ ,  $M_t$ .

Вводим правила вывода  $P_{k,l}$ ,  $k, l = 1, 2$ , проектирующие полную склейку в её части,  $P_{k,l}$  переводит полную склейку в содержимое  $(k,l)$ -клетки таблицы.

### Определение

**Полной склейкой** называется базовая склейка, в которой переменные  $x$  (с индексами) заменены на термы формального языка сигнатуры из функциональных букв операций и проекций.

### Определение

Процедура применения свёртки, указанная выше для полных базовых склеек, дословно применима к полным склейкам и даёт индуктивное построение **формульных термов**:

полная базовая склейка и её  $P_{k,l}$ -проекции являются формульными термами;

если имеется формульный терм, то применение к нему свёртки также является формульным термом, как и его  $P_{k,l}$ -проекции, и других формульных термов не имеется.

Формульный терм, как полная склейка, разбивается на внешний, внешний и внутренний свёрточный и внутренний формульные термы.

Дадим определения для часто встречающихся разновидностей склеек.

Определение

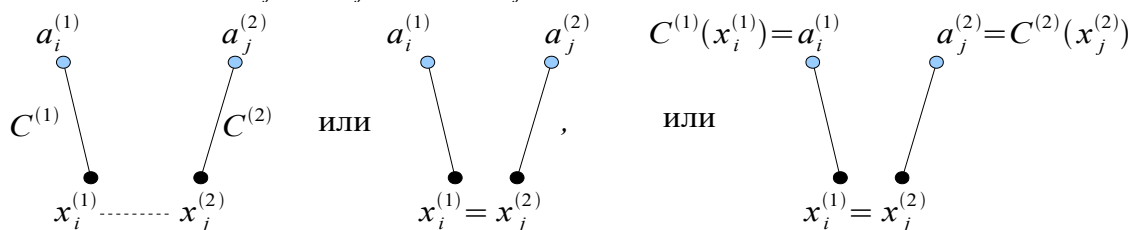
Формула  $a_k^{(i)} = C^{(i)} x_k^{(i)}$  называется **элементарной внешней склейкой** или **элементарным внешним конусом**, соответственно формулы  $a_k^{(i)} = C^{(i)} x_k^{(i)}$ ,  $\bar{a}_k^{(i)} = \bar{C}^{(i)} \bar{x}_k^{(i)}$ ,  $\bar{a}_k^{(i)} = \bar{C}^{(i)} \bar{x}_k^{(i)}$ , называем **элементарной внешней свёрткой** или **элементарным внешним свёрточным конусом**, **элементарной внутренней склейкой** или **элементарным внутренним конусом**, **элементарной внутренней свёрткой** или **элементарным внутренним свёрточным конусом**. Когда имеется ввиду один (или любой) из подобных конусов, при этом неважно какой, то говорим просто об элементарной склейке или элементарном конусе. Набор  $n$  элементарных конусов (внешних формульных термов), в котором имеются равенства между всеми переменными (термами), независимо от возможных равенств между переменными объектов, называется **внешним  $n$ -конусом** или просто **внешним конусом**, когда неважно точное количество указанных равенств. Расстановкой штрихов и надчеркиваний получаем **внешний свёрточный конус**, **внутренний свёрточный конус** и **внутренний конус**. Таким образом, любая из четырех видов склеек состоит из набора соответствующих конусов. **Категорная склейка** содержит по определению все возможные склейки, получаемые с помощью имеющихся свёрток.

Теперь мы можем дать определение теории категорных склеек.

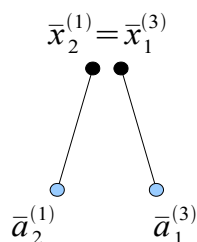
Определение

**Формальной теорией категорных склеек** называется сигнатура и набор тождеств вместе с совокупностью построенных выше формульных термов.

Следуя Хетчеру, введём аналогичные использованным в его книге [Hatcher, 1982] графические обозначения, например, для формулы  $C^{(1)}(x_i^{(1)}) = a_i^{(1)} \wedge C^{(3)}(x_j^{(2)}) = a_j^{(2)} \wedge x_i^{(1)} = x_j^{(2)}$  имеем



В нижней строке таблицы склейки графические изображения формул (вместе с пунктирами равенств) будем отражать зеркально снизу вверх, например:



Для наглядности соединённые равенством разноразные имена или области будем на графике изображать ближе друг к другу (для приведённых рисунков такое соглашение учтено ввиду  $x_i^{(1)} = x_j^{(2)}, x_2^{(1)} = x_1^{(3)}$ ).

Построим категорную склейку для традиционной теории категорий

Для представления склейками композиции стрелок категории понадобится восьмиосновная теория (дополнительно к сорту внешних склеек для внешних свёрток необходимы два аргумента, к этим четырем сортам добавляем четыре сорта для представления внутренних склеек и свёрток). Вводим восьмиосновную формальную теорию, переменные  $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \dots, x_i^{(8)}$ , функциональные буквы  $C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, \dots, C^{(8)}$ , функциональные символы  $\xi_{i,j}, i \neq j, i, j = 1, 2, 3, \dots, 8$  биекций, соответственно, вида  $(j \rightarrow i)$ , предикаты равенства  $=_1, =_2, =_3, \dots, =_8$  в каждом сорте и предикат равенства  $=$  для разных сортов.

Сорта отнесём к клеткам таблицы следующим образом

1,2	3,4
5,6	7,8

При переносе сортов справа налево (и наоборот) замена сортов имеет вид  $3 \Leftrightarrow 1, 4 \Leftrightarrow 2, 7 \Leftrightarrow 5, 8 \Leftrightarrow 6$ , при переносе сортов сверху вниз (и наоборот) имеем следующую замену сортов  $1 \Leftrightarrow 5, 2 \Leftrightarrow 6, 3 \Leftrightarrow 7, 4 \Leftrightarrow 8$ .

В обозначениях букв сохраним штрихи и надчеркивания, по которым удобно определять в какой клетке таблицы находится буква.

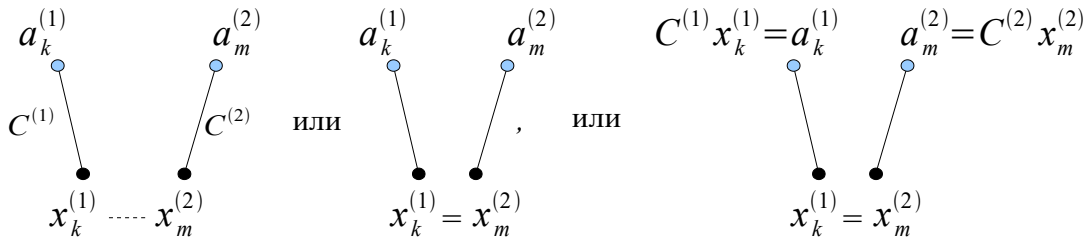
$x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, C^{(1)}, C^{(2)}$	$x_i'{}^{(3)}, x_i'{}^{(4)}, C'{}^{(3)}, C'{}^{(4)}$
$\bar{x}_i^{(5)}, \bar{x}_i^{(6)}, \bar{C}^{(5)}, \bar{C}^{(6)}$	$\bar{x}_i'{}^{(7)}, \bar{x}_i'{}^{(8)}, \bar{C}'{}^{(7)}, \bar{C}'{}^{(8)}$

Вводим новые переменные  $a_k^{(i)} = C^{(i)} x_k^{(i)}, k \in \mathbb{N}$ .

Предикат, отвечающий частичной операции композиции  $\mu x_i^{(1)} x_j^{(1)} = x_i^{(1)} \circ x_j^{(1)}$  (умножаются переменные первого сорта), обозначим  $P = P^{(1,1,1)}(x_i^{(1)}, x_j^{(1)}, x_k^{(1)})$ , с помощью этого предиката и биекций можно определить предикат  $P^{(a,b,c)}(x_i^{(a)}, x_j^{(b)}, x_k^{(c)}), a, b, c = 1, 2, 3, \dots, 8$  для любых комбинаций сортов. Например,  $P^{(1,2,4)}(x_i^{(1)}, x_j^{(2)}, x_k^{(4)}) = P(x_i^{(1)}, \xi_{1,2} x_j^{(2)}, \xi_{1,4} x_k^{(4)})$ , в частности,  $P^{(2,2,2)}(x_i^{(2)}, x_j^{(2)}, x_k^{(2)}) = P(\xi_{2,1} x_i^{(1)}, \xi_{2,1} x_j^{(1)}, \xi_{2,1} x_k^{(1)})$ .

Внешние базовые склейки состоят из 2-конусов вида  $a_k^{(1)} = C^{(1)}(x_k^{(1)}) \wedge a_m^{(2)} = C^{(2)}(x_m^{(2)}) \wedge x_k^{(1)} = x_m^{(2)}$ . Графическое обозначение 2-конуса (пунктир указывает на наличие знака равенства в атомарной формуле  $x_k^{(1)} = x_m^{(2)}$ , иногда удобно пунктир заменить на знак равенства или указать явно

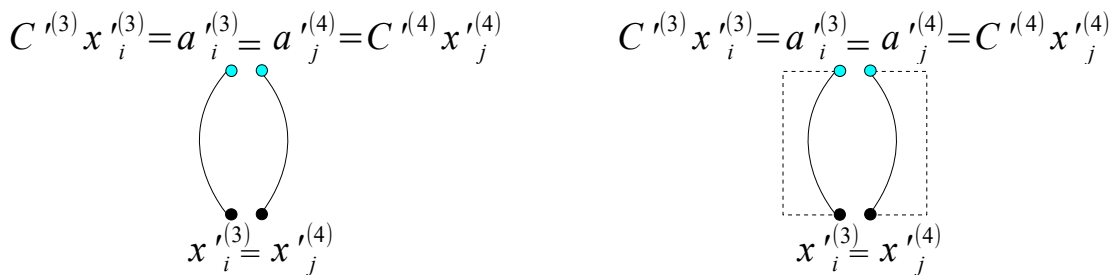
формулы из конъюнкции склейки, но рядом с черными и белыми кружками всегда подразумеваются переменные, а не, возможно, выписанные рядом формулы, сказанное относится к графическим представлениям формул свёрток и другим формулам здесь и в дальнейшем) имеет вид



Необходимые внешние свёртки состоят из конусов вида

$$a_i^{\prime(3)} = C^{\prime(3)}(x_i^{\prime(3)}) \wedge a_j^{\prime(4)} = C^{\prime(4)}(x_j^{\prime(4)}) \wedge x_i^{\prime(3)} = x_j^{\prime(4)} \wedge a_i^{\prime(3)} = a_j^{\prime(4)}, i, j = 1, 2, \dots$$

или в графических обозначениях



При интерпретации в *Set* или другой категории  $x_i, x_j$  перейдут в имена стрелок, имеющих равные области и кообласти  $x_i, x_j$ , но для свёртки в случае категорий следует брать единичные стрелки с  $x_i = C x_i = a_i, x_j = C x_j = a_j$ , этот вариант указан на диаграмме справа.

Мы проведем рассуждения для произвольных стрелок с совпадающими в случае интерпретаций областями и кообластями.

Перейдем к формулировке процедуры проведения свёртки, отвечающей композиции стрелок категории.

Пусть имеется склейка из двух конусов (соответствуют двум стрелкам), их произведение задаётся процедурой свёртки, задаем равенства между склейкой и свёрткой согласно приведённым ниже таблице и графическому обозначению (введены переобозначения для сокращения индексной записи,

$$a_1 = a_1^{(1)}, b_2 = a_2^{(2)}, b_3 = a_3^{(1)}, c_4 = a_4^{(2)}, b_5 = a_5^{(3)}, b_6 = a_6^{(4)}).$$

При постулировании свёртки и участвующих в процедуре ее применения равенств (пунктиры в графических обозначениях) появляются подформулы  $a_2^{(2)} = a_5^{\prime(3)}, a_3^{(1)} = a_6^{\prime(4)}$ , приводящие к требованию (отражает случаи возможности применения композиции)

$$a_2^{(2)} = a_3^{(1)}. \quad \text{Равенство} \quad C^{(1)} x_1^{(1)} = C^{\prime(2)} x_2^{\prime(2)} \quad \text{или}$$

$$\check{C}_1^{(1)} x_1^{(1)} = \xi_{12} C^{\prime(2)} \xi_{21} x_2^{\prime(2)} = \check{C}^{\prime(2)} x_2^{\prime(2)} \quad \text{даёт} \quad \check{C}_j^{(a)} \check{C}_k^{(a)} x_i^{\prime(a)} = \check{C}_k^{(a)} x_i^{\prime(a)},$$

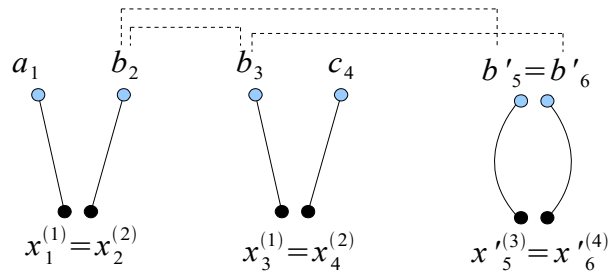
$a, j, k = 1, 2$ , то есть получаем алгебру для  $s = C_1, t = C_2$  (верхние индексы у

С одинаковы)

$\cdot$	$s$	$t$
$s$	$s$	$t$
$t$	$s$	$t$

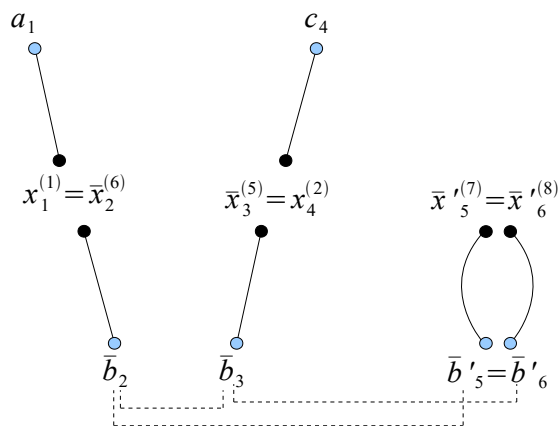
В результате имеем все необходимое для проведения процедуры свёртки, выпишем полную склейку

$a_1 = C^{(1)}(x_1^{(1)}) \wedge b_2 = C^{(2)}(x_2^{(2)}) \wedge b_3 = C^{(1)}(x_3^{(1)}) \wedge c_4 = C^{(2)}(x_4^{(2)})$			$b'_5 = C'^{(3)}(x'^{(3)}_5) \wedge b'_6 = C'^{(4)}(x'^{(4)}_6)$		
$\emptyset$			$\emptyset$		



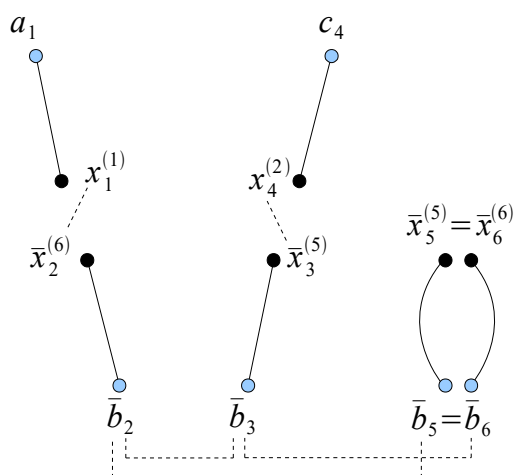
Применяем правило вывода  $M_b$ , получим

$a_1 = C^{(1)}(x_1^{(1)}) \wedge$	$\wedge c_4 = C^{(2)}(x_4)$	$\emptyset$
$\bar{b}_2 = \bar{C}^{(6)}(\bar{x}_2^{(6)}) \wedge \bar{b}_3 = \bar{C}^{(5)}(\bar{x}_3^{(5)})$		$\bar{b}'_5 = \bar{C}'^{(7)}(\bar{x}'^{(7)}_5) \wedge \bar{b}'_6 = \bar{C}'^{(8)}(\bar{x}'^{(8)}_6)$



Применяем теперь правило вывода  $M_l$ , получим

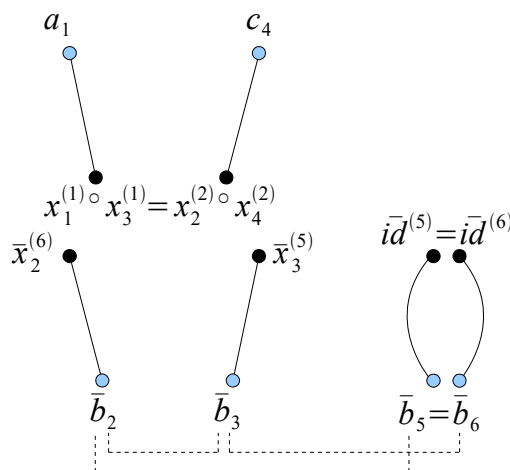
$a_1 = C^{(1)}(x_1^{(1)}) \wedge$	$\wedge c_4 = C^{(2)}(x_4)$	$\emptyset$
$\bar{b}_2 = \bar{C}^{(6)}(\bar{x}_2^{(6)}) \wedge \bar{b}_3 = \bar{C}^{(5)}(\bar{x}_3^{(5)})$		$\bar{b}_5 = \bar{C}^{(5)}(\bar{x}_5^{(5)}) \wedge \bar{b}_6 = \bar{C}^{(6)}(\bar{x}_6^{(6)})$



Остаётся применить правило вывода  $Ev$ .

При интерпретации формулы кроме выбора предиката композиции необходимо определить выбор имени функции для  $\bar{x}_5^{(5)} = \bar{x}_6^{(6)}$ , для случая категорий этот выбор однозначен в виде тождественной функции (единичной стрелки  $id$  для объекта, в который перейдет  $b_5$  и  $b_6$ ). Можно было бы сразу определить свёртку используя равенство  $x_5 = C x_5 = b_5, x_6 = C x_6 = b_6$ , но мы этого не сделали, чтобы подчеркнуть возможность не совпадающих с категориями моделей, в которых количество свёрток шире, чем в случае категорий. С помощью предиката, отвечающего композиции, правило вывода  $Ev$  определяется переходом от предыдущей формулы к следующей формуле, завершающей процедуру свёртки для склейки из двух конусов.

$a_1 = C^{(1)}(x_1^{(1)} \circ x_3^{(1)}) \wedge$	$\wedge c_4 = C^{(2)}(x_2^{(2)} \circ x_4^{(2)})$	$\emptyset$
$\bar{b}_2 = \bar{C}^{(6)}(\bar{x}_2^{(6)}) \wedge \bar{b}_3 = \bar{C}^{(5)}(\bar{x}_3^{(5)})$	$\bar{b}_5 = \bar{C}^{(5)}(id^{(5)}) \wedge \bar{b}_6 = \bar{C}^{(6)}(id^{(6)})$	$\emptyset$



Накладывая на предикаты свойства ассоциативности и наличия единиц, мы получим формальную теорию, включающую стандартную формальную теорию категорий (см. [Hatcher, 1982]), при использовании  $P_{1,1}$ -проекции в качестве дополнительного шага при проведении свёрток.

Обычные категории реализуются известными процедурами интерпретации, проведение которых мы опустим, и будучи моделями формальной теории категорий, являются тем самым моделями данной формальной теории категорных склеек.

Ввиду важности вопроса представления категорий на языке категорных склеек подытожим проведённые построения в виде теоремы.

### Теорема

Пусть задана произвольная категория, тогда существует формальная теория категорных склеек, для которой данная категория является моделью.

2.3. Здесь мы начнем рассматривать пример универсальных алгебр и их вложение в категорные склейки. Пусть имеется алгебра  $A$  с  $k$ -арной операцией. Следуя А.И.Мальцеву [Мальцев, 1970] определим формальный язык для алгебры и его интерпретацию в множестве, называемом *носителем* алгебры.

Для представления алгебры в виде склеек вводим имена  $x$  и элементы, функциональную букву  $CC=C$ , элементы будут интерпретироваться как  $C(x)$ , имена будут интерпретироваться как имена функций (операций). В алгебре принято элементы и их имена не различать, фактически используется, так называемая, автономия [Черч, 1960]. На склейки в этом случае можно смотреть как на явное использование имён и обозначаемых ими объектов.

Алгебра имён может отличаться от алгебры элементов (у одного элемента может быть несколько имен, как, например, и у двух элементов - несколько имён в виде стрелок с одними и теми же областями и кообластями).

Операции умножения можно представить на основе использования свёрток.

Элемент алгебры мы будем представлять элементарной склейкой с именем, отвечающим тождественной функции (аналогом единичной стрелки, определяющей объект в категориях).

Начнём с алгебр с унарной операцией  $\nu$  и отвечающих им склеек.

В этом случае, как указано, элементу алгебры отвечает элементарная склейка, а внешней свёртке будет отвечать пара связанных (с равными именами) элементарных склеек. Таким образом, надо выбрать три сорта.

Те сорта, между которыми необходимо вводить пунктир, должны иметь биекции, а поскольку в нашем случае необходимо иметь пунктиры между элементарными склейками первого и второго, а также между элементарными склейками второго и третьего сорта, то биекции должны быть для всех трех



сортов.

При выборе соединения пунктиром всегда несвязанная функциональная буква при проведении свёртки будет переходить в первый сорт, таким образом, в качестве третьего сорта можно оставить первый сорт, то есть достаточно ввести не три, а два сорта переменных. Ограничиться одним сортом нельзя, так как в формуле внешней свёртки требуется два различных сорта. Поскольку рассматриваемый случай не очень громоздкий, мы будем использовать все три сорта.

Вводим трёхосновный язык с переменными и функциональными буквами проекций  $x_i^{(1)}, x_j^{(2)}, x_k^{(3)}, C_1^{(1)}, C_2^{(2)}, C_3^{(3)}, i, j, k \in \mathbb{N}$ , сорт переменных и функциональных букв указан в виде верхнего индекса в скобках, для внешних свёрток введены штрихованные переменные второго и третьего сорта.

Стандартная интерпретация берётся для всех сортов фиксированием множества  $X$ , функций на нём, переменным при интерпретации присваиваются имена функций.

Вводим функциональные символы биекций  $\xi_{ij}, i, j = 1, 2, 3$  вида  $i \rightarrow j$  с тождествами  $x_k^{(i)} = \xi_{ij} x_k^{(j)}$  ( $x_k^{(i)}$  - это  $x_k^{(i)}$  при  $i=2,3$ ). Из этих тождеств вытекает, что  $x_k^{(i)} = \xi_{ij} \xi_{ji} x_k^{(i)}$ .

Для унарной операции вводим функциональный символ  $v = v^{(1)}$  вида  $1 \rightarrow 1$ . В каждом сорте действует свой символ проекций, благодаря наличию биекций можно в каждом сорте определить дополнительные две проекции.

Так в первом сорте имеем  $\check{C}_i^{(1)} = \xi_{ij} C_j^{(j)} \xi_{ji}$  или  $\check{C}_1^{(1)} = C_1^{(1)}, \check{C}_2^{(1)} = \xi_{12} C_2^{(2)} \xi_{21}, \check{C}_3^{(1)} = \xi_{13} C_3^{(3)} \xi_{31}$ , для  $i \neq k$  имеем  $\check{C}_i^{(k)} = \xi_{kj} C_j^{(j)} \xi_{jk}$ .

В отличие от проекций символ унарной операции задан только в первом сорте, используя биекции, мы можем определить его в других сортах:  $v^{(i)} = \xi_{il} v^{(1)} \xi_{li}$ , при этом  $\xi_{jl} v^{(1)} x_k^{(1)} = v^{(j)} x_k^{(j)}$ .

При определении внешней склейки, получаемой в результате операции свёртки, мы должны получить первый сорт. Это требование приводит к равенству  $\check{C}_3^{(1)} = \check{C}_1^{(1)}$ . Другими словами, можно было бы не определять отдельный символ проекции в третьем сорте, получив его за счет биекций из первого сорта, или формально, как предлагалось, считать третий сорт первым сортом. Таким образом, алгебра функциональных символов проекций содержит два идемпотентных элемента,

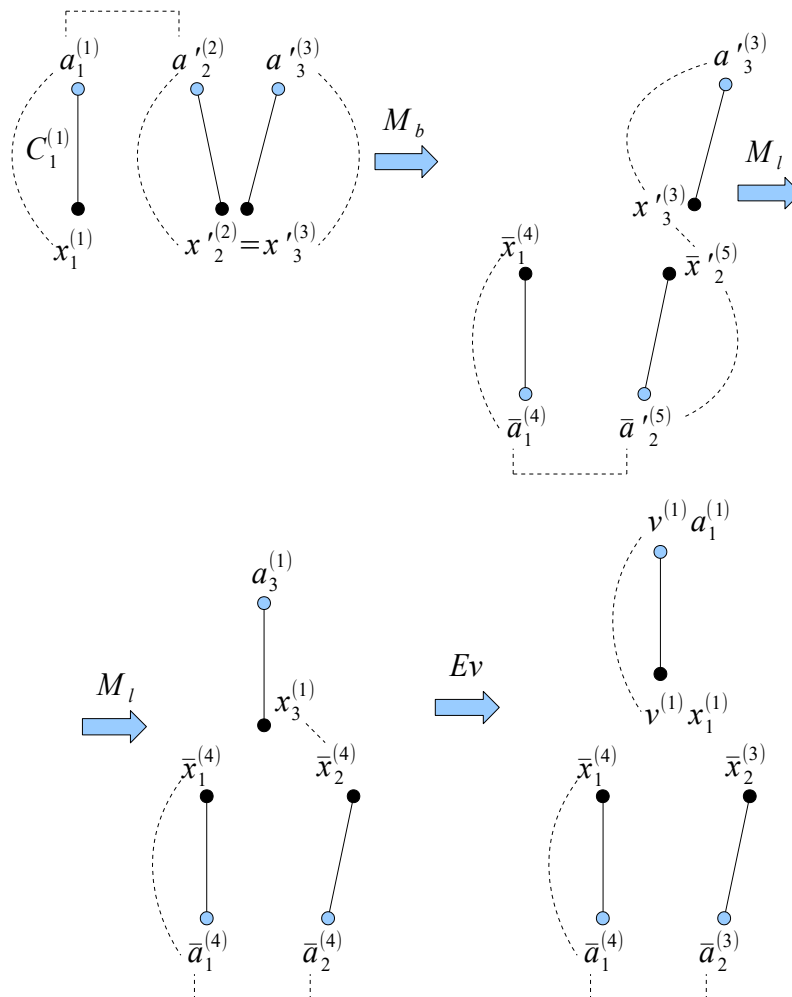
$$\check{C}_1^{(1)} \check{C}_1^{(1)} x_i^{(1)} = \check{C}_1^{(1)} x_i^{(1)}, \check{C}_2^{(1)} \check{C}_2^{(1)} x_j^{(1)} = \check{C}_2^{(1)} x_j^{(1)},$$

для её задания остаётся определить недиагональные члены таблицы умножения, которые можно определить из вида свёртки, как это сделано далее.

Определим внешние склейки и внешние свёртки в виде формулы

$$a_i^{(1)} = C_1^{(1)} x_i^{(1)} \wedge a_i^{(1)} = x_i^{(1)} \wedge a_j^{(2)} = C_2^{(2)} x_j^{(2)} \wedge a_j^{(2)} = x_j^{(2)} \wedge a_k^{(3)} = C_3^{(3)} x_k^{(3)} \wedge a_k^{(3)} = x_k^{(3)} \wedge a_i^{(1)} = a_j^{(2)}$$

или в графических обозначениях (левая верхняя часть)



Равенство  $C_1^{(1)} x_1^{(1)} = C_2^{(2)} x_2^{(2)}$  или  $\check{C}_1^{(1)} x_1^{(1)} = \xi_{12} C_2^{(2)} \xi_{21} x_2^{(2)} = \check{C}_2^{(1)} x_2^{(1)}$  даёт  $\check{C}_j^{(a)} \check{C}_k^{(a)} x_i^{(a)} = \check{C}_k^{(a)} x_i^{(a)}$ ,  $a, j, k = 1, 2$  (при  $a=1$  у иксов нет штриха), то есть получаем алгебру для  $t = \check{C}_1^{(1)}$ ,  $s = \check{C}_2^{(1)}$

·	<b>s</b>	<b>t</b>
<b>s</b>	s	t
<b>t</b>	s	t

Действительно, имея  $ttx = tx$ ,  $ssx = sx$ ,  $sx_2 = tx_1$  получим (с учетом применимости  $\nu$  ко всем переменным и требования, чтобы при интерпретации

функция  $\nu$  была применима ко всем элементам алгебры), применив к последнему  $s$ , выражение  $st=t$ , и применив  $t$ , выражение  $ts=s$ .

Для процедуры свёртки необходимы еще три сорта 4,5,6, вводим соответствующие функциональные символы биекций (теперь имеем биекции  $\xi_{ij}, i, j=1, \dots, 6$ ) и выпишем таблицу соответствия сортов при перемещениях подформулы между клетками полной склейки

1	2,3
4	5,6

Более точно, свёртка по определению в данном случае такова, что сорт 2 никогда не переводится в клетку (1,1), сорт 3 никогда не переводится в клетку (2,2), в связи с чем, сорт 6 не переводится в клетку (2,1) и поэтому может быть опущен.

Таким образом, имеем правила переноса сортов: справа-налево и наоборот  $1 \Leftrightarrow 3, 4 \Leftrightarrow 5$ , сверху-вниз и наоборот  $1 \Leftrightarrow 4, 2 \Leftrightarrow 5$ .

Для проведения свёртки вводим необходимые для внутренних склеек и свёрток переменные и функциональные буквы

$$\bar{x}_i^{(l)}, \bar{x}_j'^{(l)}, \bar{C}^{(l)}, \bar{C}'^{(l)}, l=4,5, i, j \in \mathbb{N},$$

потребуем также  $\check{C}_4^{(1)} = \check{C}_1^{(1)}, \check{C}_5^{(1)} = \check{C}_2^{(1)}$ .

Итак, все шаги в приведённой схеме определены.

Для  $n$ -арной, а не только для рассмотренной унарной операции построения аналогичны. Далее приводится пример для бинарной операции моноидального произведения в симплициальной категории. Для случая формульных термов процедура свёртки также аналогична. При интерпретации все символы переходят в соответствующие операции на одном основном множестве  $X$ .

Мы пришли к следующей теореме.

### Теорема

Пусть задана универсальная алгебра с  $n$ -арной операцией и основным множеством, тогда существует категорная склейка, для которой данная универсальная алгебра является моделью.

Можно распространить теорему на произвольную универсальную алгебру, однако, мы получим здесь более общий результат для моделирования эквациональных теорий категорными склейками, обратившись к подходу Ловера в категорной логике.

Категорные склейки имеют моделями высшие категории, к рассмотрению этого вопроса мы обратимся ниже до указанного подхода Ловера. К основной теореме представления высших категорий (мультипликативных категорий) мы придём во второй части работы, здесь же, имея ввиду объявленный

относительно элементарный уровень изложения, рассмотрим моноидальные, 2-категории, даблкатегории с их слабыми версиями (бикатегории и т.п.), а также  $n$ -категории, начав с примера симплициальной категории  $SC$ .

Объектами симплициальной категории  $SC$  являются конечные ординалы, а стрелками неубывающие функции между ними.  $SC$  играет важнейшую роль в топологии, поскольку имеется функтор  $\Delta: SC \rightarrow Top$  ( $Top$  – категория топологических пространств), переводящий ординал  $n+1$  в  $n$ -мерный симплекс. Существует  $n+1$  штука инъективных монотонных функций  $\delta_i^n: n \rightarrow n+1, i=0,1,2,\dots,n$  и  $n$  штук сюръективных монотонных функций  $\sigma_i^n: n+1 \rightarrow n, i=0,1,2,\dots,n-1$ , из которых с помощью композиции строится любая стрелка категории  $SC$ . Без  $0$  категория  $SC$  превращается в свою полную подкатегорию  $SC^+$ . Контравариантный функтор  $S: SC^+ \rightarrow X$  из  $SC^+$  в категорию  $X$  называется симплициальным объектом, если этот функтор записать в виде  $n+1 \rightarrow S_n$ , то из стрелок  $\delta_i^n, \sigma_i^n$  мы получим операторы грани и операторы вырождения, а если  $X$  абелева категория, то  $\partial = d_0 - d_1 + \dots + (-1)^{n+1} d_{n+1}, \partial \partial = 0$  является гомоморфизмом границы, возникает соответствующий цепной комплекс и гомологии объекта  $S$ . С помощью симплициальных объектов строятся стандартные резольвенты в смысле гомологической алгебры, гомологические функторы типа когомологий групп и так далее (см., например, [Маклейн, 2004], гл.7). Симплициальные объекты являются по словам Маклейна орудием исследования многих вопросов алгебраической топологии, в особенности, гомологий,  $CW$ -комплексов, пространств Эйленберга-Маклейна и так далее, а в гомологической алгебре играют центральную роль.

Построим для столь заслуженного объекта математики, как  $SC$ , соответствующую категорную склейку.

Помимо обычной композиции стрелок ("сложная функция") в  $SC$  имеется бифунктор сложения (некоммутативное сложение или «тензорное (моноидальное) умножение»)  $+: SC \times SC \rightarrow SC$ , переводящий ординалы  $\bar{n}, \bar{m}$  в  $\overline{n+m}$ , а стрелки  $\bar{f}: \bar{n} \rightarrow \bar{n}'$ ,  $\bar{g}: \bar{m} \rightarrow \bar{m}'$  в стрелку  $\bar{f} + \bar{g}: \overline{n+m} \rightarrow \overline{n'+m'}$ , такую, что для  $n > 0$

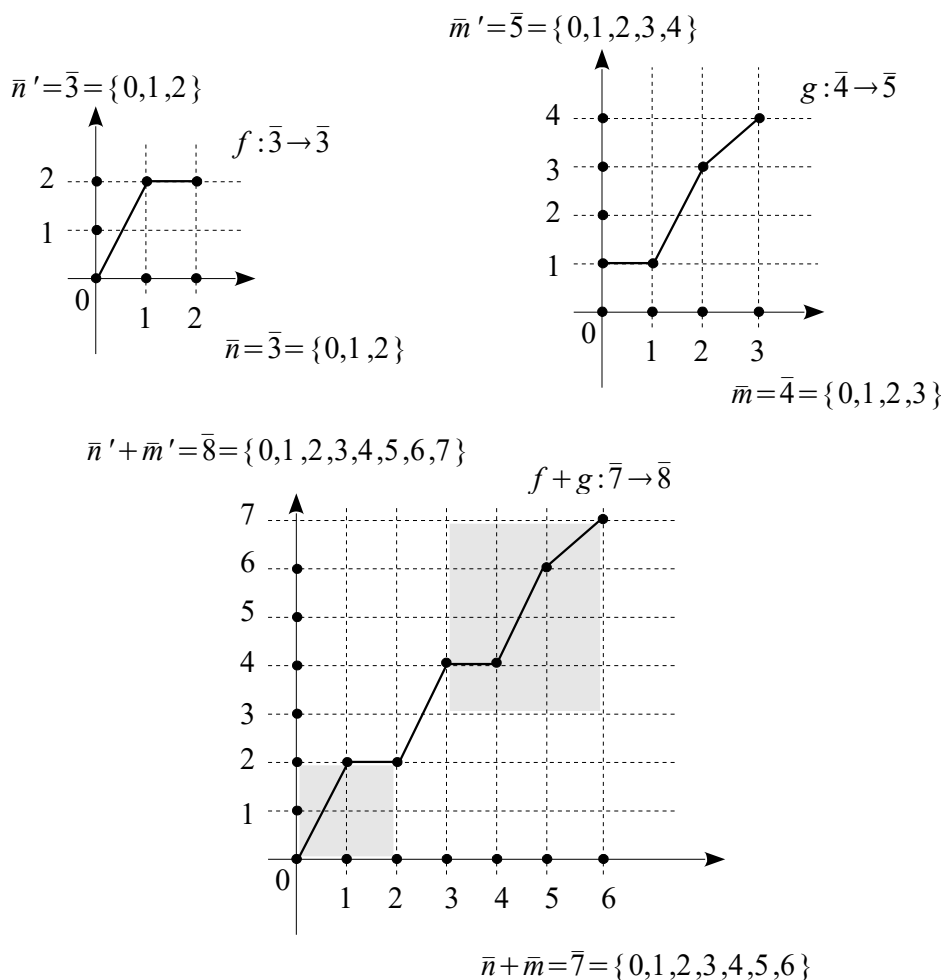
$$\begin{aligned} (\bar{f} + \bar{g})(i) &= \bar{f}(i), i = \bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}; \\ (\bar{f} + \bar{g})(i) &= \bar{n}' + \bar{g}(i - \bar{n}), i = \bar{n}, \overline{n+1}, \dots, \overline{n+m-1}. \end{aligned}$$

где  $i, \bar{n}'$  понимаются как элементы соответствующих множеств, при  $n=0$  функция  $f$  является пустым отображением, которое единственно для каждого множества ( $\bar{0}$  – начальный объект). В этом случае при  $m > 0$  остаётся в силе вторая строка формулы, так как и  $n'$  и  $\bar{g}(0)$  определены. Если  $m=0$ , то  $\bar{g}(0)$  не определено, из-за этого не определена вторая строка формулы. Однако, в этом случае для определения суммы функций формулы не нужны:

функция  $\bar{f} + \bar{g}$  является пустым отображением в множество  $\overline{n' + m'}$ .

Порядковые числа и стрелки на них удобно изображать графиками с отложенными по осям символами порядковых чисел, которые мыслятся как аргументы (на горизонтальной оси) и значения (на вертикальной оси).

Поскольку имеется очевидное взаимно однозначное соответствие конечных порядковых чисел с натуральными числами, то можно в обозначениях на графиках перейти к обычным натуральным числам и функциям от них.

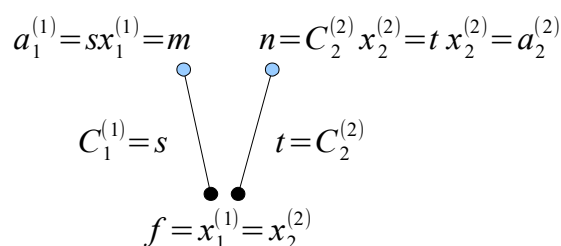


*Рис.1. Пример сложения стрелок в категории SC*

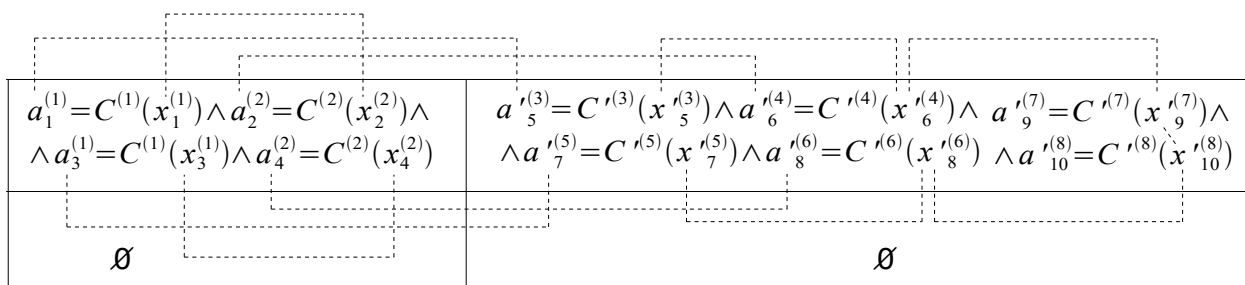
Выше изображён пример сложения (тензорного умножения) стрелок, непосредственно видна некоммутативность порядкового сложения.

Для стрелки  $f: m \rightarrow n$  определим внешнюю склейку следующим ниже указанным образом. Здесь мы фактически работаем в интерпретации формальной теории склеек для симплициальной категории.

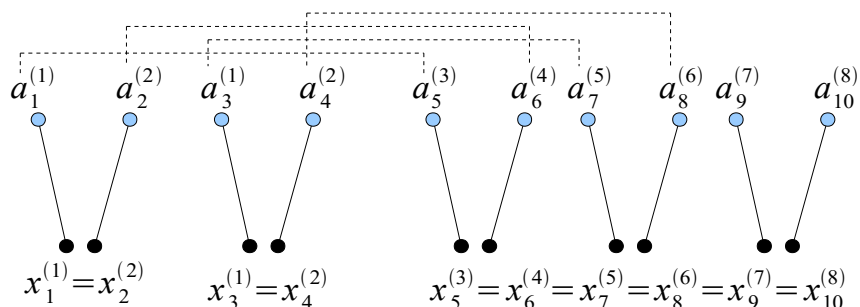
Далее выкладки проведём в несколько более общем виде, после чего вернёмся к симплициальной категории.



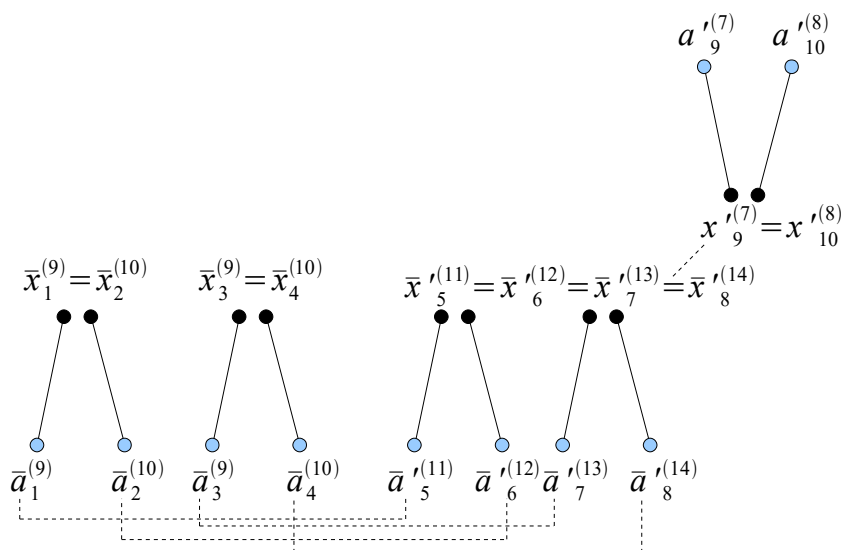
Необходимые внешние свёртки сразу выпишем вместе со свертываемыми внешними склейками



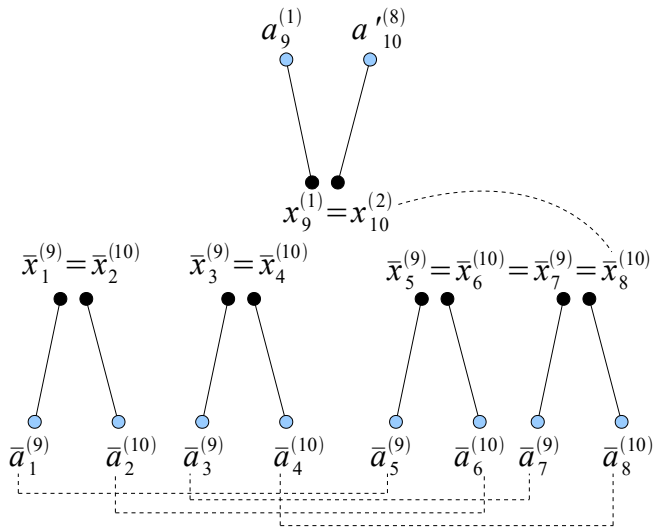
или в явно более удобных графических обозначениях



Применяем правило вывода  $M_b$ , получим



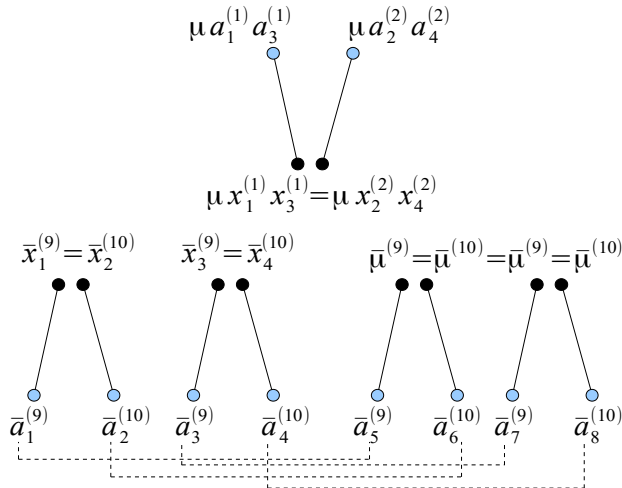
Применяем теперь правило вывода  $M_l$ , получим



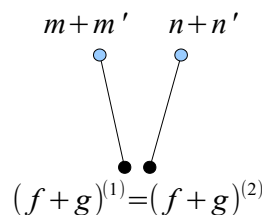
Правило вывода  $Ev$  по определению с учетом интерпретации в симплициальной категории состоит в следующем:

формула  $x_9^{(1)} = x_{10}^{(2)} \wedge a_9^{(1)} = C^{(1)}(x_9^{(1)}) \wedge a_{10}^{(2)} = C^{(2)}(x_{10}^{(2)})$  заменяется на  $\mu a_1^{(1)} a_3^{(1)} = C^{(1)}(\mu x_1^{(1)} x_3^{(1)}) \wedge \mu a_2^{(2)} a_4^{(2)} = C^{(2)}(\mu x_2^{(2)} x_4^{(2)}) \wedge \mu x_1^{(1)} x_3^{(1)} = \mu x_2^{(2)} x_4^{(2)}$ , в графических обозначениях кроме этого пунктир равенства стирается.

После применения правила вывода  $Ev$ , имеем



Явно указывая на интерпретацию в симплициальной категории для проекции  $P_{1,1}$ , имеем для стрелок  $f: m \rightarrow n, g: m' \rightarrow n'$



В приведённом выводе участвуют стрелки, но для них берется не композиция, а проводится алгебраическая операция.

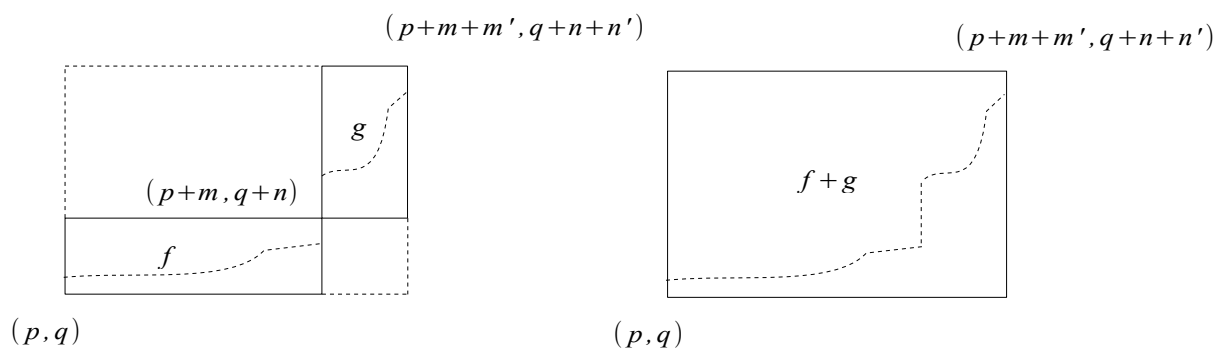
Композиция стрелок, тем не менее, является алгебраической операцией, в результате мы имеем представление одной и той же операции двумя видами свёрток, которые будем называть *композиционной свёрткой* и *алгебраической свёрткой*. Когда имеется композиционная свертка построить алгебраическую свёртку для той же операции несложно. Возможно ли алгебраическую свёртку заменить на дающую тот же результат для внешней склейки композиционную свёртку? В случае рассмотрения универсальных алгебр в подходе Ловера это осуществлено нами в общем виде далее.

Покажем, что для симплициальной категории такое представление моноидального умножения возможно без выхода в рассмотренную далее синтаксическую категорию.

Стрелки в  $SC$  определены как  $f : m \rightarrow n$ , и все они имеют представление в виде графиков на отрезке от нуля до кообласти  $m$ . Однако при моноидальном умножении используется движение на плоскости, начало второго сомножителя переносится в точку  $(m, n)$ . Таким образом, мы не можем обойтись без параллельных сдвигов на плоскости, другими словами, фактически, стрелка суть класс эквивалентности относительно сдвигов на плоскости, подобно обычным векторам на евклидовой плоскости.

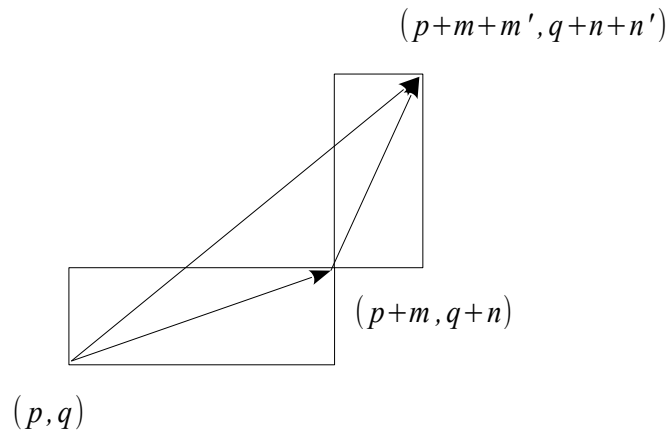
Произвольный представитель класса эквивалентности для стрелки  $f : m \rightarrow n$  является тем же графиком, но только не в прямоугольнике  $(0,0), (m,0), (m,n), (n,0)$ , а в прямоугольнике  $(p,q), (m+p,q), (m+p, n+q), (p, n+q)$ .

Из следующей схемы нетрудно найти представление стрелки  $f : m \rightarrow n$



такой новой стрелкой (обозначенной той же буквой), которая даст композицию при тензорном умножении



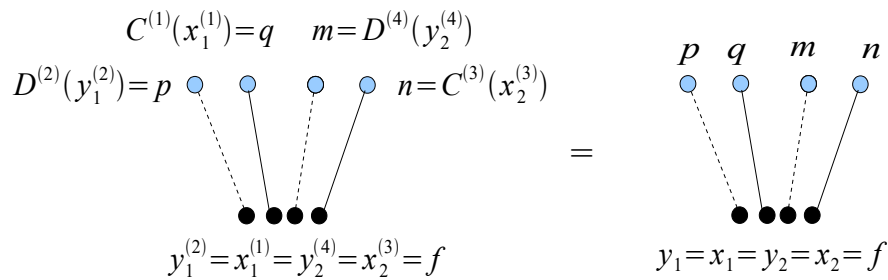


$$f: (p, q) \rightarrow (r, s), r = p + m, s = q + n .$$

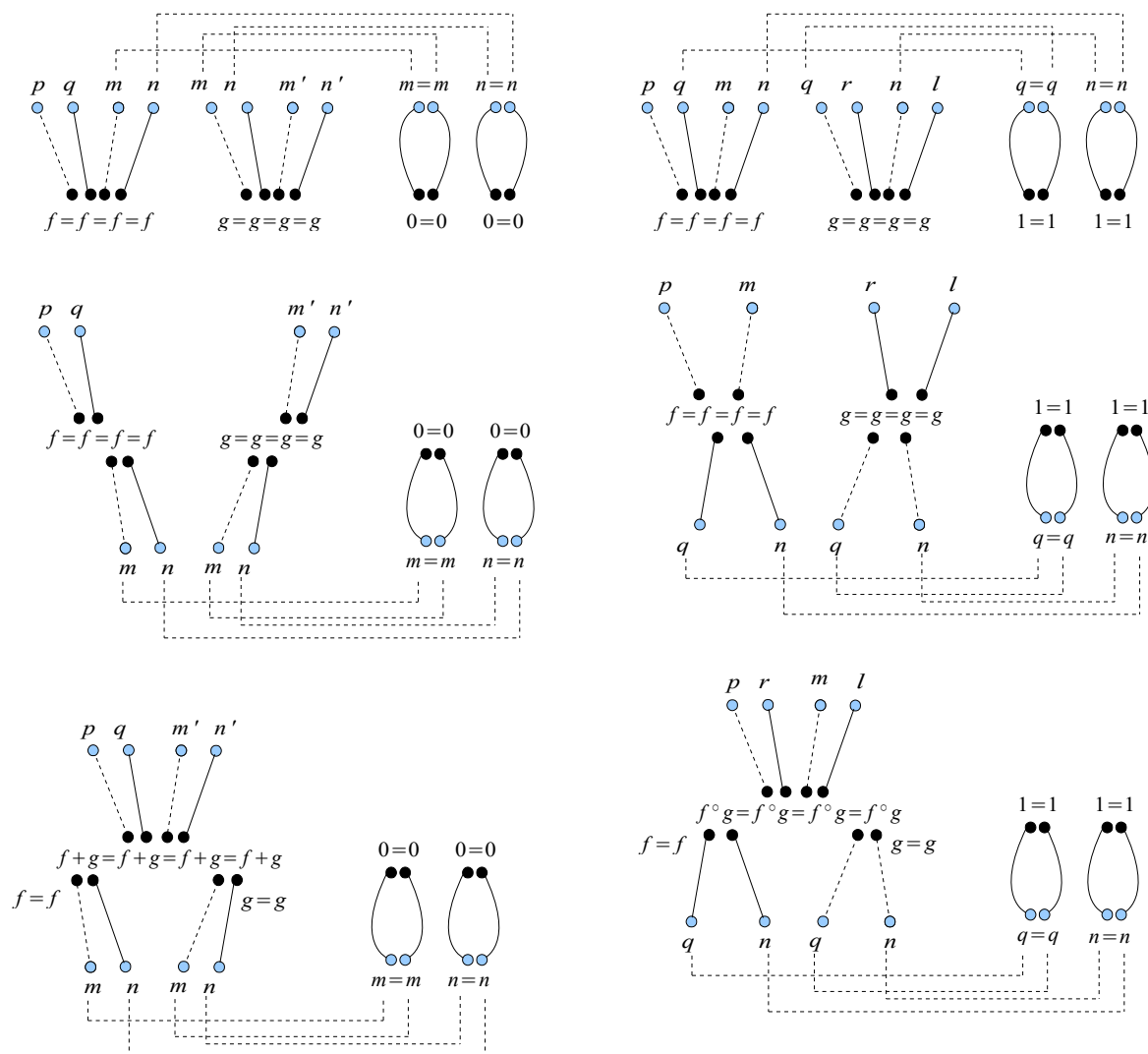
Композиция стрелок  $f: (p, q) \rightarrow (r, s)$  и  $g: (p', q') \rightarrow (r', s')$  возможна, как и положено, при  $(r, s) = (p', q')$ , но для классов эквивалентности композиция возможна всегда.

Следующий выбор склеек, для стрелок для которого проведены выкладки, даёт обе свёртки композиционного типа.

Графическое обозначение внешней склейки имеет следующий вид (чтобы не перегружать изображение, справа опущены индексы сортов).



Свёртки, соответствующие тензорному умножению и композиции, и их действие имеют следующий вид



Общие вопросы неоднозначного представления одной операции различными свёртками, частично обсуждаются во второй части работы и требуют уже более тонких рассуждений, чем предложенный в данной части работы уровень детализации.

Симплициальная категория является строго моноидальной категорией, которая в свою очередь, как и все моноидальные категории, является бикатегорией с одной нулевой клеткой. Другими словами, мы начали рассматривать примеры, так называемых, высших категорий.

Высшие категории также вкладываются в соответствующие категорные склейки, что важно доказать для описания области применения категорных склеек в математике.

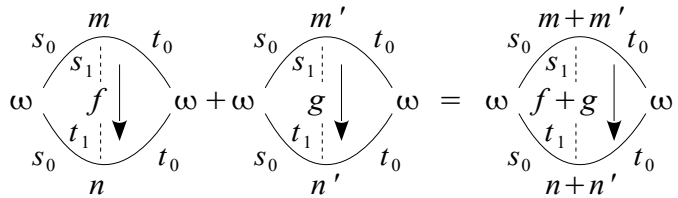
Перейдём к рассмотрению высших категорий и склеек для них, начав с той же симплициальной категории, но уже рассматривая ее, как бикатегорию, состоящую из 2-клеток.

Изучим немного более общий случай, имеются две операции  $\nu$  и  $\mu$  (соответствуют сложению ординалов и моноидальному произведению неубывающих функций на ординалах  $f: m \rightarrow n$ ).

Функциональные символы  $C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}, C^{(4)}$  соответствуют в  $SC$   
 $\check{C}^{(1)\text{def}} = s_0, \check{C}^{(2)\text{def}} = s_1, \check{C}^{(3)\text{def}} = t_1, \check{C}^{(4)\text{def}} = t_0, \quad s_0: f \rightarrow \omega, s_1: f \rightarrow m, t_1: f \rightarrow n, t_0: f \rightarrow \omega$ .

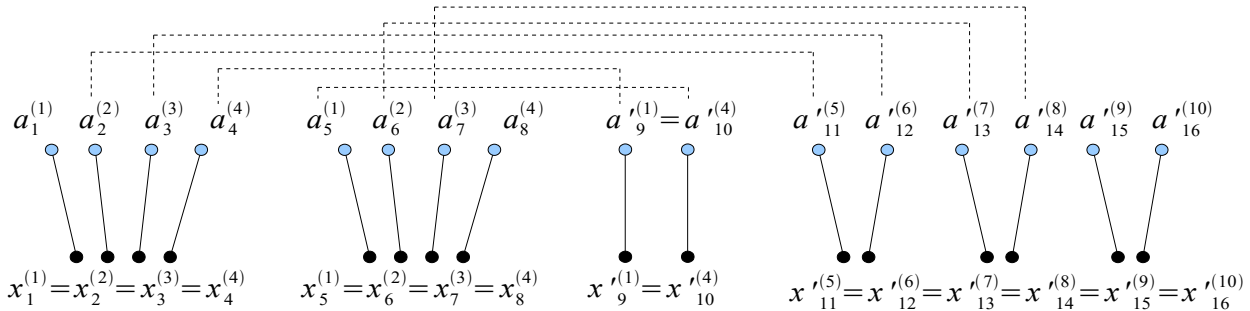
Алгебра функциональных символов имеет таблицу (справа приведены обычные обозначения клеток и проекций, а также тензорное произведение 2-клеток),

$\cdot$	$s_0$	$t_0$	$s_1$	$t_1$
$s_0$	$s_0$	$t_0$	$s_0$	$s_0$
$t_0$	$s_0$	$t_0$	$t_0$	$t_0$
$s_1$	$s_0$	$t_0$	$s_1$	$t_1$
$t_1$	$s_0$	$t_0$	$s_1$	$t_1$



например,  $s_0 f = s_0 s_1 f = s_0 m = \omega$ . Отметим, также для операций  $\nu$  и  $\mu$ , что  $\nu m m' = m + m', \mu f g = f + g$ .

Базовые склейки со свёртками имеют в нашем примере вид



В базовой полной склейке участвует 16 элементарных склеек  $a_i^{(i)} = C^{(i)} x_i^{(i)}, i=1,2, \dots, 16$ . Первые 4 сорта (первый конус) по необходимости разные, первый и четвертый отвечают входу и выходу по операции  $\nu$ , второй и третий отвечают входу и выходу функции  $f$ . Второй конус, отвечающий функции  $g$ , обязан по сортам соответствовать конусу  $f$ . Это уже указано на графической формуле в обозначении сортов. Итак, от общего числа сортов 16 мы перешли с учетом данного вида склеек к 10 отмеченным на схеме сортам.

Свёртка состоит из двух частей, одна часть для операции  $\nu$ , вторая часть для операции  $\mu$  из сигнатуры склейки.

Операция  $\nu$  является композиционной (композиция стрелок, которыми являются ординалы в данном представлении, имеет вид  $m: \omega \rightarrow \omega, n: \omega \rightarrow \omega, \nu m n: \omega \rightarrow \omega, \nu m n = m + n$ ). Свёртка для нее выписана в графическом обозначении, при этом имеется требование, чтобы первая элементарная склейка свёртки имела сорт 1, а вторая сорт 4 (так фиксируется "направление" стрелок как ординалов), что и отмечено на схеме. Но можно отложить выяснение номеров сортов. Поэтому оставшиеся сорта мы оставили в общем виде, перенумеровав их в порядке пересчета.

Перед применением правил вывода для проведения операции свёртки необходимо определиться с переходами номеров сортов, что делается в следующей таблице.

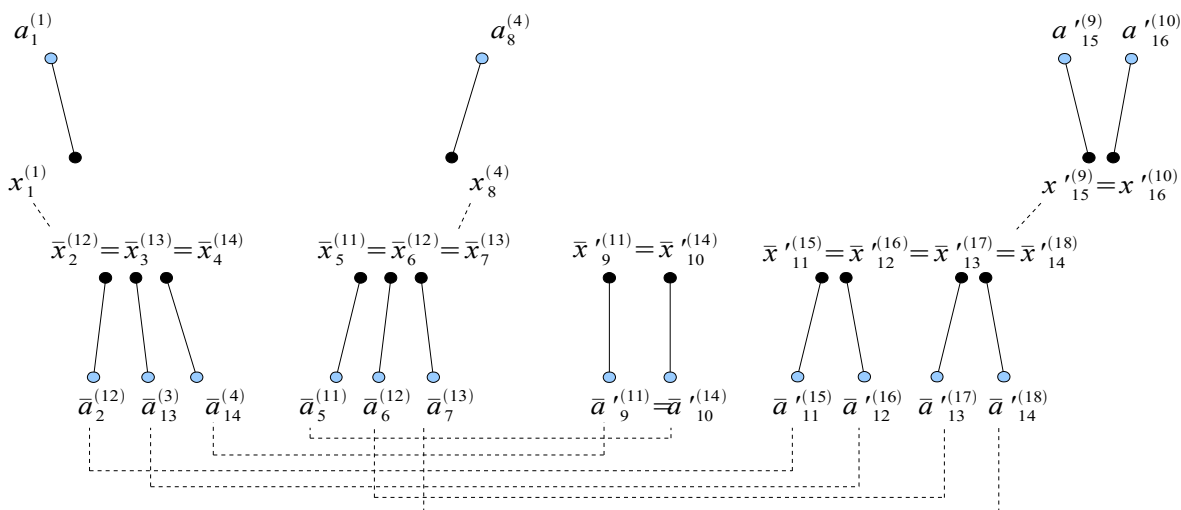
1,2,3,4	1,4,5,6,7,8,9,10
11,12,13,14	11,14,15,16,17,18,19,20

В таблице отмечено соответствие номеров сортов при переходе с верхних ячеек в нижние (и наоборот). При переходе справа налево (и наоборот) одинаковые номера не меняются, а для неодинаковых принимаем соглашение:

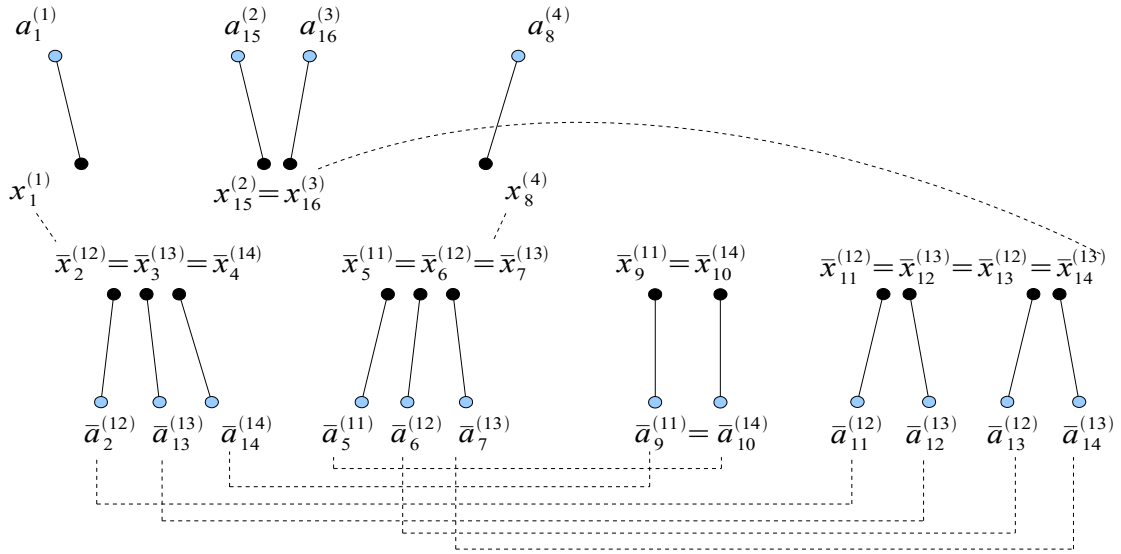
$$5 \rightarrow 2, 6 \rightarrow 3, 7 \rightarrow 2, 8 \rightarrow 3, 9 \rightarrow 2, 10 \rightarrow 3, \\ 15 \rightarrow 12, 16 \rightarrow 13, 17 \rightarrow 12, 18 \rightarrow 13, 19 \rightarrow 12, 20 \rightarrow 13.$$

Это соглашение следует из определения свёртки в тензорном произведении функций из  $SC$ . При интерпретации первый конус перейдет в имя  $f$ , второй конус перейдет в имя функции  $g$ , а  $x_9, x_{10}$  перейдут в имя тождественной функции  $id: \omega \rightarrow \omega$ , то есть в категорную единицу, равную в алгебре ординалов ординалу 0. Интерпретацию для  $x_{11}-x_{16}$  опишем после проведения правил вывода по перемещениям.

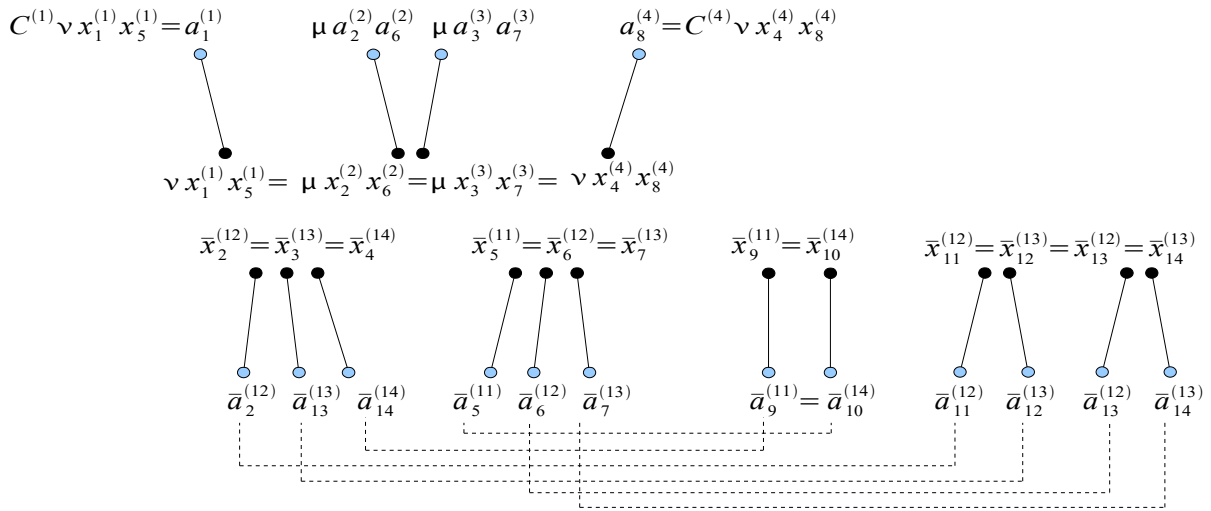
Применяем последовательно правила вывода  $M_b, M_l, Ev$ . Применяем правило вывода  $M_b$ , получаем:



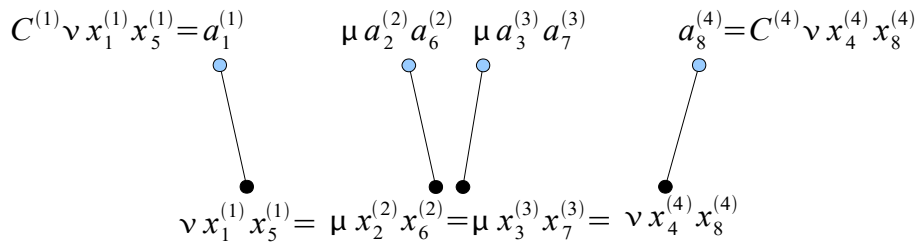
Применяем правило вывода  $M_l$ , получаем:



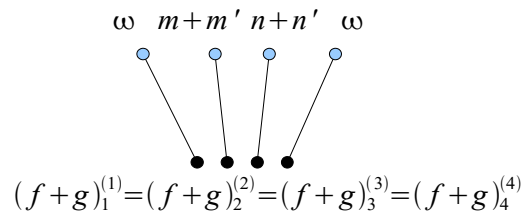
Применяем правило вывода  $E\nu$  получаем:



После применения правила вывода проекции  $Pr_{1,1}$  для первой ячейки склейки получим



При интерпретации нижние равенства перейдут в имя функции  $f+g$ , верхние символы перейдут в, соответственно,  $\omega, m+m', n+n', \omega$  или графически



2.4. Симплициальная категория опирается на глобулярные множества, развиваются также категории на основе кубических множеств, ближайшим для симплициальной категории примером являются даблкатегории, введенные Эресманом [Ehresmann, 1963], применяемые в частности, в конформной квантовой теории поля [Hu, 2007], в теории поликатегорий Сабо [Garner, 2006] и в других областях [Fiore, 2007], [Grandis, 2020].

Построим категорную склейку, среди моделей которой имеются даблкатегории. Напомним, что такое даблкатегории, взяв для определённости их определение из [Fiore, 2007].

Определение

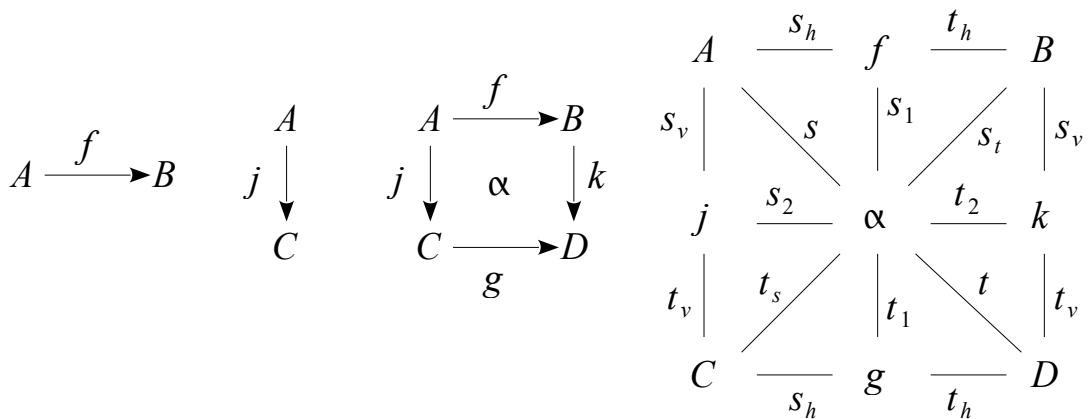
Даблкатегория  $\mathbf{D}$  является по определению категорным объектом в категории малых категорий  $\mathbf{Cat}$ . Раскрывая это определение, имеем следующее.

Даблкатегория  $\mathbf{D}$  состоит из совокупности  $D_0$  объектов  $A, B, C, \dots \in D_0$ , (горизонтальной) категории  $D_1$  с объектами  $D_0$  и стрелками, называемыми горизонтальными морфизмами  $f, g, \dots \in D_1, s_h f, t_h f \in D_0$ , (вертикальной) категории  $D_2$  с объектами  $D_0$  и стрелками, называемыми вертикальными морфизмами  $j, k, \dots \in Ar(D_2), s_v j, t_v j \in D_0$  и совокупности  $D$  квадратов или клеток  $\alpha, \beta, \dots \in D$ . Объекты  $A$  мы будем отождествлять с единичными стрелками  $1_A^h, 1_A^v$  в категориях  $D_1$  и  $D_2$ . Функции источника  $s$  и цели  $t$  определяются для клеток из  $\mathbf{D}$ :

$$s_1 \alpha = f, t_1 \alpha = g, s_2 \alpha = j, t_2 \alpha = k.$$

Отметим для следующей диаграммы проекции категорий  $D_1$  и  $D_2$

$$s_h f = A, t_h f = B, f: A \rightarrow B, s_v j = A, t_v j = C, j: A \rightarrow C.$$



Композицию стрелок вертикальной категории обозначим  $j_2 \circ_v j_1 = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix}$ , а композицию стрелок горизонтальной категории обозначим  $f_2 \circ_h f_1 = [f_1 f_2]$ . Горизонтальное умножение клеток  $[\alpha \beta]$  определено в случае

$$\begin{array}{ccc} A \xrightarrow{f} B & B \xrightarrow{f'} E & A \xrightarrow{[f f']} B \\ j \downarrow \alpha \downarrow k & k \downarrow \beta \downarrow l & j \downarrow [\alpha \beta] \downarrow l \\ C \xrightarrow{g} D & D \xrightarrow{g'} F & C \xrightarrow{[g g']} D \end{array}$$

Вертикальное умножение клеток  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$  определено в случае

$$\begin{array}{ccc} A \xrightarrow{f} B & & A \xrightarrow{f} B \\ j \downarrow \alpha \downarrow k & & \downarrow [j] \downarrow [\alpha] \downarrow [k] \\ C \xrightarrow{g} D & & E \xrightarrow{h} F \\ & & \downarrow [j'] \downarrow [\beta] \downarrow [k'] \\ C \xrightarrow{g} D & & E \xrightarrow{h} F \\ j' \downarrow \beta \downarrow k' & & \downarrow [j'] \downarrow [\beta] \downarrow [k'] \\ E \xrightarrow{h} F & & E \xrightarrow{h} F \end{array}$$

Для горизонтального и вертикального умножения клеток определены единицы

$$\begin{array}{ccc} A \xrightarrow{1_A^h} A & A \xrightarrow{f} B & \\ j \downarrow i_j^h \downarrow j & 1_A^v \downarrow i_f^v \downarrow 1_B^v & \\ C \xrightarrow{1_C^h} C & A \xrightarrow{f} B & \end{array}$$

Определение единиц согласовано с умножениями клеток

$$[i_{f_1}^v i_{f_2}^v] = i_{[f_1 f_2]}^v, \begin{bmatrix} i_{j_1}^h \\ i_{j_2}^h \end{bmatrix} = i_{[j_1 j_2]}^h.$$

Выполняется закон обмена, когда все умножения клеток определены, то

$$\begin{bmatrix} [\alpha \beta] \\ [\gamma \delta] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha] & [\beta] \\ [\gamma] & [\delta] \end{bmatrix}$$

На этом определение даблкатегории завершено.

На схеме с проекциями в клетке мы указали проекции необходимые нам для определения склейки  $s, s_t, t_s, t$ .

Отметим, что по заданным  $s$  и  $s_t$  (и аналогично для других подобных случаев на схеме) область для  $f$  определяется однозначно как  $s\alpha = A$ , поскольку  $s_h f = s_h s_t \alpha = s\alpha = A$ , другими словами, мы можем, не теряя общности, перейти к проекциям  $s, s_t, t_s, t$  от проекций  $s_h, s_v, t_h, t_v$ . Эти проекции действуют непосредственно на клетку, более того, уточняя данное выше определение, следует использовать именно эти проекции, а обозначения из категорий  $D_1$  и  $D_2$  (к которым относятся  $s_h, s_v, t_h, t_v$ ) заменить их образами при вложении категорий  $D_1$  и  $D_2$  в даблкатегорию.

Категория  $D_1$  вкладывается в даблкатегорию в виде поддаблкатегории, образованной горизонтальными умножениями клеток, при этом  $f$  переходит в клетку  $i_f^v$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & i_f^v & \downarrow 1_B^v \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

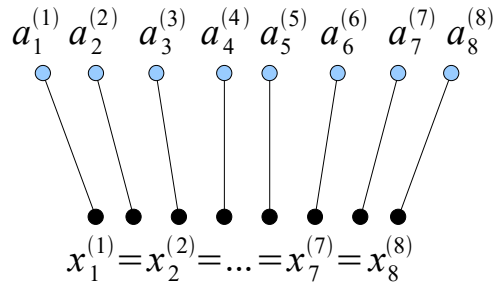
Категория  $D_2$  вкладывается в даблкатегорию в виде поддаблкатегории, образованной вертикальными умножениями клеток, при этом  $j$  переходит в клетку  $i_j^h$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_A^h} & A \\ j \downarrow & i_j^h & \downarrow j \\ C & \xrightarrow{1_C^h} & C \end{array}$$

Теперь мы можем определить таблицу умножения для алгебры функциональных символов проекций для склейки, учитывая следующее: объекты  $A, B, \dots$  суть единицы для обеих категорий и для 2-клеток и проекции двух категорных структур коммутируют между собой. Таким образом, определив таблицу умножения, мы можем ее сопоставить с таблицей умножения для функциональных символов искомой категорной склейки.

Внешняя склейка имеет вид





Дальнейшие несколько громоздкие выкладки полностью аналогичны проведенным для случая симплициальной категории, опуская их приходим к теореме.

Теорема

Пусть задана даблкатегория  $D$ , тогда существует категорная склейка, для которой  $D$  является моделью.

Найдем представление склейками для основанных на глобулярных множествах  $n$ -категорий.

Определение

Множество  $X = X^{(n)}$  называется  $n$ -категорией, если на нём определены  $(\circ_i, s_i, t_i), i=0,1,2, \dots, n-1$   $n$  различных категорных структур (соответственно, с композицией, источником и стоком для каждого  $i$ ), то есть имеются категории  $C_i, Ob(C_i) = s_i X = t_i X, Ar(C_i) = s_{i+1} X = t_{i+1} X, \circ_i, s_i, t_i$ , причём каждая пара  $C_i, C_j, i \neq j$  образует 2-категорию, которая определяется следующим образом.

На множестве  $X^{(2)}$  2-клеток  $\alpha, \beta, \dots \in X^{(2)}$  определены две категорные структуры  $(\circ_i, s_i, t_i), i=0,1$  порождающие две категории, горизонтальную  $(X^{(1)} = s_1 X^{(2)} = t_1 X^{(2)}, \circ_0, s_0, t_0)$  и вертикальную  $(X^{(2)}, \circ_1, s_1, t_1)$ , при этом:

- (1) каждая единица из горизонтальной категории  $(X^{(1)}, \circ_0, s_0, t_0)$  является единицей вертикальной категории  $(X^{(2)}, \circ_1, s_1, t_1)$ ;
- (2) категорные структуры коммутируют, что означает  $(\xi_i, \eta_j - \text{разные из } s_i, t_j, i, j=0,1)$

$$\xi_i \eta_j = \eta_j \xi_i, i \neq j,$$

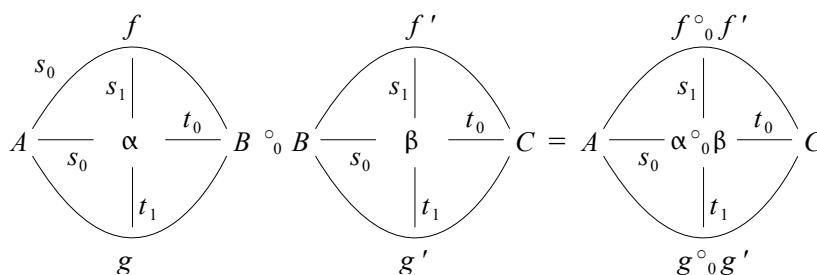
для  $i \neq j, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in X^{(2)}$

$$\begin{aligned} (\alpha \circ_i \beta) \circ_j (\gamma \circ_i \delta) &= (\alpha \circ_j \gamma) \circ_i (\beta \circ_j \delta), \\ t_i(\alpha \circ_j \beta) &= t_i(\alpha \circ_j \beta) \\ t_i(\alpha \circ_j \beta) &= t_i(\alpha \circ_j \beta) \end{aligned}$$

Построим категорную склейку, для которой  $n$ -категории являются моделью. Из определения 2-категории можно получить следующую таблицу

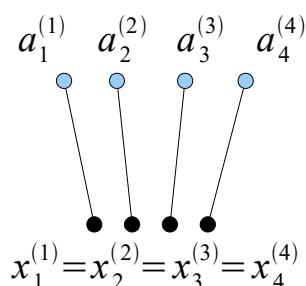
умножения для проекций (справа дана диаграмма для горизонтального умножения 2-клеток)

·	$s_0$	$t_0$	$s_1$	$t_1$
$s_0$	$s_0$	$t_0$	$s_0$	$s_0$
$t_0$	$s_0$	$t_0$	$t_0$	$t_0$
$s_1$	$s_0$	$t_0$	$s_1$	$t_1$
$t_1$	$s_0$	$t_0$	$s_1$	$t_1$



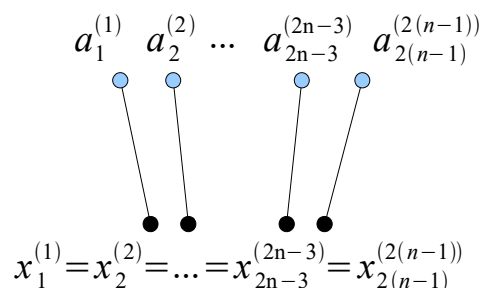
В изображении  $\alpha$ -клетки мы указали между  $A$  и  $f$  проекцию  $s_0$ , действительно, таблица умножения даёт (как и для других единиц)  $s_0 f = s_0 s_1 \alpha = s_1 s_0 \alpha = s_1 A = A$ .

Данная таблица умножения позволяет сопоставить 2-клеткам следующую склейку



Как видим и таблица, и вид склейки, фактически, совпадает с уже рассмотренным выше случаем представления склейками симплициальной категории.

Ввиду того, что 2-категории в определении  $n$ -категории играют основополагающую роль, их (в частности, таблица умножения для случая  $n$ -категории строится с использованием приведенной выше таблицы) представление склейками распространяется на каждую  $n$ -клетку и имеет вид



Необходимые выкладки для соответствующей свёртки повторяют уже проведенные вычисления в указанном случае, мы их не будем проводить. Таким образом приходим к следующей теореме.

Теорема

Пусть задана  $n$ -категория  $X$ , тогда существует категорная склейка, для которой  $X$  является моделью.

Можно было бы рассмотреть случай  $\omega$ -категорий, отвечающий важной для категорной математики конструкции, получающейся из  $n$ -категорий при  $n \rightarrow \infty$ , однако, для этого надо перейти к формулам склеек, содержащих счётное число конъюнкций (обобщенных склеек), то есть требуется обобщение формальных категорных склеек для логического языка с бесконечными формулами. Такое построение мы выполним во второй части работы. Более того, во второй части работы мы построим категорные склейки для наиболее общего случая высших категорий, так называемых, мультипликативных категорий, включая случай слабых мультипликативных категорий (*weak multiple categories*), введенных в работе [Grandis, 2016]. Другими словами мы доказываем следующую теорему (за формулировкой определения мультипликативной категории отсылаем здесь читателя к [Grandis, 2016]).

Теорема

Пусть задана мультипликативная категория  $C$ , тогда существует обобщенная категорная склейка, для которой  $C$  является моделью.

2.5. Перейдем к обещанному доказательству того, что категорные склейки включают универсальные алгебры, как модели, при этом даже в варианте Ловера по функториальной семантике эквациональных теорий.

Под *алгебраической теорией*  $T$  (не в максимальной общности), понимают теорию первого порядка с равенством, сигнатурой, содержащей только функциональные буквы, которые называются  $n$ -арными операциями. При этом помимо букв для операций имеется несколько атомарных формул  $s=t$  ( $s, t$  - термы), называемых аксиомами (тождествами). Многие алгебраические структуры аксиоматизируются в первопорядковых формальных теориях.

Для групп имеем обычное определение при выборе в сигнатуру одной бинарной операции умножения, одной унарной операции взятия обратного элемента и одной нульарной операции представляющей единицу. Операции удовлетворяют тождествам

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, x \cdot e = x, e \cdot x = x, x \cdot x^{-1} = e, x^{-1} \cdot x = e .$$

Однако, эквивалентным образом группу можно определить не тремя, а одной бинарной операцией деления  $x:y$  с аксиомами

$$(x : y) : (y : z) = x : z, x : (y : y) = x, (x : x) : (y : z) = z : y .$$

А, если взять двойное деление  $x * y = x^{-1} \cdot y^{-1}$ , то группа определяется им и нульарной операцией единицы:  $x \cdot y = (x * e) * (y * e), x^{-1} = x * e$ .

Кроме бинарной операции можно построить в группе  $n$ -арные операции

для любого  $n$ . При обычном задании группы базовыми операциями и тождествами ввиду наличия различных заданий суть того, что же такое группа скрывается за частными способами ее задания.

Имеется категорная конструкция, снимающая эти вопросы, мы ее напомним в нужной нам форме и далее построим категорные склейки, охватывающие, в том числе, указанную конструкцию.

Отделяя формальный язык от интерпретации группы в  $Set$ , можно ставить вопрос об интерпретации формальной теории групп в других категориях, отличных от  $Set$ . Однако, аналога понятия элемента множества (объекта) в других категориях может не быть, поэтому обычное по [Мальцев, 1970] понимание интерпретации не проходит.

Композиция стрелок есть во всех категориях, для интерпретаций можно ограничиться категориями, имеющими произведения. Нужно только ответить на вопрос, куда перейдут при интерпретации переменные, если в алгебраических системах они переводились в элементы носителя, а при интерпретации в категориях у объектов нет элементов.

Выход имеется, так как тождества в алгебрах можно сформулировать без использования элементов, например, ассоциативность бинарной операции  $\mu: X \times X \rightarrow X$  в полугруппе с носителем  $X$  можно выразить без элементов  $x \in X$  следующим образом (см., например, [Маклейн, 2004], введение)

$$\mu \circ (\mu \times pr_3) = \mu \circ (pr_2 \times \mu) ,$$

$pr_3, pr_2$  - проекции  $pr_3: X \times X' \times X'' \rightarrow X''$ ,  $pr_2: X \times X' \times X'' \rightarrow X'$ , здесь  $X$  множество и две его копии. Указанное тождество обычно изображают следующей диаграммой для произвольной категории  $C$  с произведениями (на схеме слева,  $X$  - объект категории  $C$ )

$$\begin{array}{ccc}
 X \times X \times X & \xrightarrow{m \times pr_3} & X \times X \\
 \downarrow m \times pr_1 & & \downarrow m \\
 X \times X & \xrightarrow{m} & X
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 I_1 \times I_2 \times I_3 & \xrightarrow{m_{1,2}^{(4)} \times \hat{pr}_3^{(3)}} & I^{(4)} \times I^{(3)} \\
 \downarrow \hat{pr}_1^{(3)} \times m_{2,3}^{(6)} & & \downarrow m_{4,3}^{(5)} \\
 I_1 \times I_6 & \xrightarrow{m_{1,6}^{(7)}} I_7 \xrightarrow{\xi_{7,5}} & I_5
 \end{array}$$

Для дальнейшего удобно уточнять нумерацию сомножителей в категорном произведении. Пусть задан объект  $I$  категории  $C$ , а также ему изоморфные объекты  $I_k, k \in \mathbb{N}, I_k = \xi_k I, I = \xi_k^{-1} I_k$ ,  $\xi_k$  - изоморфизмы, при этом

$$\begin{aligned}
 I^n &= I \times \dots \times I = \xi_1^{-1} I_1 \times \dots \times \xi_n^{-1} I_n = (\xi_1^{-1} \times \dots \times \xi_n^{-1}) I_1 \times \dots \times I_n = \xi_{1, \dots, n}^{-1} I_1 \times \dots \times I_n, \\
 I_1 \times \dots \times I_n &= \xi_1 \times \dots \times \xi_n I^n = \xi_{1, \dots, n} I^n.
 \end{aligned}$$

Обозначим также  $\xi_{k,l} = \xi_k \circ \xi_l : I_k \rightarrow I_l$ .

Проекциям  $pr_k : I^n \rightarrow I, k \leq n$  сопоставим проекции

$$\begin{aligned} \hat{pr}_k^n : I_1 \times \dots \times I_n &\rightarrow I_k, k \leq n, \\ \hat{pr}_k^n(I_1 \times \dots \times I_n) &= \hat{pr}_k^n \xi_{1,\dots,n} I^n = \xi_k I, \xi_k^{-1} \hat{pr}_k^n \xi_{1,\dots,n} I^n = I, \\ \xi_k^{-1} \hat{pr}_k^n \xi_{1,\dots,n} &= pr_k^n = pr_k \end{aligned}$$

Пусть задана бинарная операция, как стрелка  $\mu : I \times I \rightarrow I$ , она определяет операции

$$\mu_{ij}^k : I_i \times I_j \rightarrow I_k, \mu_{ij}^k = \xi_k \mu \xi_i^{-1} \times \xi_j^{-1} = \xi_k \mu \xi_{i,j}^{-1}$$

(аналогичным образом задаются выражения для  $n$ -арных операций  $\mu : I^n \rightarrow I$   $\mu_{i,\dots,j}^k : I_i \times \dots \times I_j \rightarrow I_k, \mu_{i,\dots,j}^k = \xi_k \mu \xi_i^{-1} \times \dots \times \xi_j^{-1} = \xi_k \mu \xi_{i,\dots,j}^{-1}$ ).

В перечисленных обозначениях выписана правая часть схемы выше.

#### Определение

Последовательность (кортеж) переменных  $(x_1, \dots, x_n)$  назовём **контекстом** для термина, переменные которого содержатся в данном кортеже. Сопоставим кортежу объект  $I^n$  категории  $C$ , такое сопоставление является взаимнооднозначным.

Ясно, что у термина может быть много допустимых контекстов, и что некоторые контексты недопустимы для заданного термина (например, контекст  $(x_1, x_2)$  недопустим для термина  $t(x_1, x_7)$ ).

Ближайшая задача состоит в том, чтобы перейти от обычной интерпретации формального языка алгебраической теории в **Set** к языку полностью интерпретируемому с помощью стрелок категории  $C$ , имеющей конечные произведения: константам, переменным, базовым операциям (функциональным символам) и терминам сопоставить соответствующие стрелки категории  $C$ .

Поскольку в категории с конечными произведениями имеется терминальный объект  $1$ , то его можно использовать для сопоставления констант стрелкам: каждой константе сопоставим по отдельному морфизму  $1 \rightarrow I$ .

Сопоставим переменным  $x_1, \dots, x_k, \dots$  стрелки в  $C$ .

Выберем контекст  $(x_1, \dots, x_n)$ , ему соответствует  $I^n$  для этого объекта имеется  $n$  проекций  $pr_k : I^n \rightarrow I$ , которые отвечают произведению  $pr_k : I \times \dots \times I \rightarrow I$  (эти проекции возникли в категории  $C$  при построении данного произведения).

Сопоставим переменной  $x_k$  в контексте  $(x_1, \dots, x_n), k \leq n$  стрелку  $pr_k: I \times \dots \times I$  и, тем самым, стрелку  $\hat{pr}_k^n(I_1 \times \dots \times I_n) = I_k$ . Подчеркнем, что контексты с  $n < k$  недопустимы для термина  $x_k$ .

Перейдем к сопоставлению стрелок базовым операциям языка алгебраической теории.

Сопоставим каждой  $k$ -арной операции  $\mu$  морфизм (обозначенный той же буквой)  $\mu: I^k \rightarrow I$ . Теперь необходимо задать морфизм в контексте для определения соответствия терминам базовых операций от произвольных переменных. Для термина  $\mu(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$  (переменные попарно различны) допустим контекст  $(x_1, \dots, x_n)$  при  $n \geq \max(i_1, \dots, i_k)$ .

В терме  $k$ -арной операции переменных может быть меньше, чем  $k$ , в случае когда на некоторых местах стоят константы или на некоторых местах стоит одна и та же переменная. Такие термы являются примерами производных операций, полученных из базовых операций. Подобным образом из каждого термина имеющего  $q$  различных переменных можно получить операции меньшей арности, такие операции мы будем называть **простыми производными операциями**. На данном шаге индуктивного построения сопоставления терминам стрелок, зададим таким терминам  $t$ , содержащим  $m$  различных переменных морфизмы  $t: I^m \rightarrow I$ , при  $m=0$  морфизмы  $1 \rightarrow I$ . При обычной интерпретации простые производные операции задаются автоматически вместе с морфизмами базовых операций. Например,  $t(x_2, x_3) = \mu(a, x_2, x_3, x_2)$ , для операции  $\mu(x_1, x_2, x_3, x_4)$  арности 4 определяется как функция двух переменных из функции четырех переменных, соответствующей при интерпретации самой операции  $\mu$ .

Для удобства сначала рассмотрим случай бинарной операции и термина  $\mu(x_i, x_j), i \neq j$ .

Сопоставим данному терму стрелку

$$\mu_{i,j}^k \circ \hat{pr}_i^n \times \hat{pr}_j^n(I_1 \times \dots \times I_n) = \mu_{i,j}^k(I_i \times I_j) = I_k$$

или

$$\mu_{i,j}^k \circ \hat{pr}_i^n \times \hat{pr}_j^n(I_1 \times \dots \times I_n) = \mu_{i,j}^k \circ \hat{pr}_i^n \times \hat{pr}_j^n \circ \xi_{1,\dots,n}(I^n) = \mu_{i,j}^k(I_i \times I_j) = I_k = \xi_k I,$$

или

$$\xi_k^{-1} \circ \mu_{i,j}^k \circ \hat{pr}_i^n \times \hat{pr}_j^n \circ \xi_{1,\dots,n}(I^n) = I.$$

Мы из  $\mu: I^2 \rightarrow I$  получили морфизм  $\mu_n^l: I^n \rightarrow I$  для каждого  $n$  из допустимых контекстов.

Формула морфизма  $\mu_n^l: I^n \rightarrow I$  для  $k$ -арной операции  $\mu: I^k \rightarrow I$  (или  $k$ -арной производной операции) имеет следующий вид

$$\xi_l^{-1} \circ \mu_{i_1,\dots,i_k}^l \circ \hat{pr}_{i_1}^n \times \dots \times \hat{pr}_{i_k}^n \circ \xi_{1,\dots,n}(I^n) = I.$$

Перейдем к сопоставлению стрелок произвольным терминам языка

алгебраической теории.

Определение проводим по индукции, опираясь на уже сопоставленные на предыдущих шагах стрелкам  $I^n \rightarrow I$  переменные и базовые операции, термы и простые производные операции.

Пусть в заданном терме  $t$  последней применена базовая операция из сигнатуры с именем  $\mu$ , то есть терм имеет вид  $t = \mu(t_1, \dots, t_k)$ , причём термам  $t_1, \dots, t_k$  уже сопоставлены морфизмы  $t_{n,k}^I: I^n \rightarrow I$ . Если при построении терма последнее применение операции  $\mu$  дополнено использованием констант и размещением букв одной переменной на нескольких местах, то рассматриваем этот терм как простую производную операцию соответствующей арности меньшей  $k$ .

Для наглядности, сначала рассмотрим сопоставление стрелок терму  $t = \mu(t_1, t_2), t_1 = \mu(x_2, x_3), t_2 = x_4, t = t(x_2, x_3, x_4) = \mu(\mu(x_2, x_3), x_4)$ . Допустимый контекст здесь  $(x_1, \dots, x_n), n \geq 4$ , для термов  $\mu(x_2, x_3), x_4$  и объекта  $I$  имеем морфизмы  $\mu_n^I, pr_4^n$ . Действуем в нумерованном представлении  $I_1 \times \dots \times I_n$  в выбранном контексте: вставляем выписанные в нумерованном представлении морфизмы с учетом номеров переменных вместо термов и применяем для последней операции терма известное для нее представление (включая случай известных для нее простых производных операций).

$$\mu(\mu(x_2, x_3), x_4) \rightarrow \mu((\mu_{2,3}^k \circ (\hat{pr}_2^n \times \hat{pr}_3^n)), \hat{pr}_4^n) \rightarrow \mu_{k,4}^q \circ ((\mu_{2,3}^k \circ (\hat{pr}_2^n \times \hat{pr}_3^n)) \times \hat{pr}_4^n)$$

Далее с помощью изоморфизмов приходим в выражению в ненумерованном представлении.

Данный шаг выглядит в общем случае  $t = \mu(t_1, \dots, t_k)$  следующим образом

$$I^n \xrightarrow{(t_1^I, \dots, t_k^I)} I^k \xrightarrow{\mu^I} I$$

Построенную интерпретацию алгебраической теории в категории называют *моделью*  $M$  теории  $T$  в категории  $C$ .

Естественным образом обобщается понятие гомоморфизма алгебр на их категорные модели. Гомоморфизм моделей  $h: M \rightarrow M'$  определяется как морфизм  $h$  категории  $C$  (в *Set* это отображения множеств), который коммутирует с базовыми  $k$ -арными операциями моделей  $h \circ f = f' \circ h^k$ .

$$\begin{array}{ccc} M \times \dots \times M = M^k & \xrightarrow{h \times \dots \times h = h^k} & M'^k = M' \times \dots \times M' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ M & \xrightarrow{h} & M' \end{array}$$

Сами модели образуют категорию  $M(T, C)$  с гоморфизмами в качестве стрелок.

Контексты можно принять за объекты, так называемой, **синтаксической категории**, стрелками в которой являются классы эквивалентности термов, равных между собой за счёт имеющихся в теории тождеств (например, тождество ассоциативности бинарной операции  $\mu x_1 \mu x_2 x_3 = \mu x_1 x_2 x_3$  означает эквивалентность стоящих в равенстве термов), а композицией стрелок является подстановка

$$\vec{t} = (t_1, \dots, t_m) : (x_1, \dots, x_k) \rightarrow (x_1, \dots, x_m), \vec{s} = (s_1, \dots, s_n) : (x_1, \dots, x_m) \rightarrow (x_1, \dots, x_n), \\ (\vec{s} \circ \vec{t})_i = s_i(t_1, \dots, t_m / x_1, \dots, x_m) .$$

### Теорема

Пусть задана алгебраическая теория  $T$  и ее синтаксическая категория  $C_T$ , тогда выполняется следующее:

$C_T$  является категорией с конечными произведениями;

категорное произведение в  $C_T$  двух объектов  $(x_1, \dots, x_m)$  и  $(x_1, \dots, x_n)$  задается выражением  $(x_1, \dots, x_{m+n})$ ;

всякая модель теории  $T$  в категории с конечными произведениями может быть получена с помощью сохраняющего произведения функтора.

Обсуждаемые конструкции эквациональных теорий, основанные на представлении композиции в виде подстановок, введены и разработаны Ловером [Lawvere, 1963] и лежат в основе ряда разделов категорной логики (см. например, [Кок, 1982]). Обсуждаемое выше представление объектов стрелками и переход к синтаксической категории позволил рассматривать алгебры со всей совокупностью операций, в обобщении данном Ловером уже становятся не определяющими сами тождества, операции и термы.

### Определение

**Алгебраическая теория**  $T$  есть по определению категория, объектами которой являются целые неотрицательные числа  $0, 1, 2, \dots$ , стрелками  $n \rightarrow m$  являются наборы из  $m$  отображений  $n \rightarrow 1$ , называемых  $n$ -арными операциями и для каждого  $n$  определены проекции

$$pr_i : n \rightarrow 1, i = 1, 2, \dots, n$$

позволяющие рассматривать объект  $n$  как  $n$ -кратное категорное произведение  $n = 1^{\times n} = 1 \times 1 \times \dots \times 1$ .

Понятие модели для алгебраической теории по Ловеру вводится аналогичным приведенному выше способом.



Определение

Пусть задана алгебраическая теория  $T$  и категория  $E$ , имеющая конечные произведения. Полная подкатегория  $Alg(T, E)$  категории функторов  $E^T$  с объектами в виде функторов сохраняющих произведение, называется **категорией  $T$ -моделей** или **категорией  $T$ -алгебр**. Категорию  $E$  при этом называют **категорией значений**.

$T$ -модель, задаваемая функтором  $A: T \rightarrow E$ , то есть алгебра  $A$ , вполне определена, если известно  $A(1)$ , именно,  $A(n) = A(1)^{\times n}$ .

Стрелки в  $T$  также определены, например,  $\mu: 2 \rightarrow 1$  переходит в

$$A(2) = A(1) \times A(1) \xrightarrow{A(\mu)} A(1),$$

так что, если  $E = Set$ , то  $A(1)$  - множество, называемое носителем алгебры, а стрелка (абстрактная бинарная операция)  $\mu$  переходит в бинарную операцию на множестве  $A(1)$ .

Определение

Морфизмом алгебраической теории  $T$  в алгебраическую теорию  $T'$  называется всякий функтор  $f: T \rightarrow T'$ , сохраняющий все проекции  $f(pr_i) = pr'_i$  и удовлетворяющий условию  $f(n) = n$ .

Например, имеется морфизм из теории колец Ли в теорию ассоциативных колец, переводящий лиевскую операцию в коммутатор в ассоциативном кольце.

Морфизм теорий  $f: T \rightarrow T'$  индуцирует функтор между категориями  $T$ -моделей  $\check{f}: Alg(T', E) \rightarrow Alg(T, E)$ , который при  $E = Set$  имеет левый сопряженный  $F: Set \rightarrow Alg(T', Set)$ . При этом если  $H$  - множество, то  $F(H)$  называется свободной алгеброй на множестве  $H$  образующих. Сама теория  $T$  оказывается эквивалентной некоторой категории, двойственной полной подкатегории в  $Alg(T)$ , порожденной свободными алгебрами.

Обычно в определении Ловера целые числа заменяют на категорные степени объекта.

Определение

Алгебраическая теория по Ловеру - это малая категория с конечными произведениями, каждый объект которой представляется в виде степени объекта  $A, A^1 = A, A^n = A \times \dots \times A$ , при этом имеет место равенство  $A^m \times A^n = A^{n+m}$ .

Синтаксическую категорию  $C_T$  можно представить в виде алгебраической теории Ловера, поскольку  $(x_1, \dots, x_{n+m}) = (x_1, \dots, x_n) \times (x_1, \dots, x_m)$ , стрелки при этом остаются теми же, что

и в  $C_T$ , в том числе и переменные, но теперь они имеют смысл проекций  $pr_i^n: A^n \rightarrow A$ .

Рассмотрим пример алгебраической теории Ловера для теории коммутативных колец и построим для него категорную склейку.

Пример

В качестве стрелок  $f: n \rightarrow m$  рассматриваются наборы по  $m$  полиномов с целыми коэффициентами от  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$ , композицией стрелок является подстановка полиномов друг в друга. Проекция  $pr_i: n \rightarrow 1$  имеют вид  $pr_i(n) = x_i$ .

В терминологии контекстов, например, полином  $f = x_2 - 5x_3^2$  является стрелкой  $f: 3 \rightarrow 1, (x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{f} (x_1)$ . Рассмотрим пример композиции стрелок  $f = (f_1, f_2, f_3), f_1 = x_1 + x_2x_3, f_2 = x_2^2, f_3 = 1 + 2x_3^2$ ,  $f: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, x_3)$  и  $g = (g_1, g_2), g_1 = x_1x_2x_3, g_2 = x_3^2 - x_1$ ,  $g: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$ . Композиция  $g \circ f$  должна быть стрелкой  $g \circ f: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2)$ .

Действительно, имеем

$$(g \circ f)_1 = g_1(f_1, f_2, f_3) = (x_1 + x_2x_3)x_2^2(1 + 2x_3^2) = x_1x_2^2 + x_2^3x_3 + 2x_1x_2^2x_3^2 + 2x_2^3x_3^2,$$

$$(g \circ f)_2 = g_2(f_1, f_2, f_3) = (1 + 2x_3^2)^2 - x_1 - x_2x_3 = 1 - x_1 - x_2x_3 + 4x_3^2 + 4x_3^4.$$

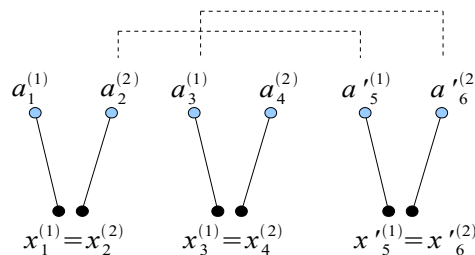
Композиция позволяет строить из полиномов меньшей степени полиномы больших степеней переменных на основе производных операций от базовых операций, также являющихся стрелками категории.

Приведённый пример называют теорией коммутативных колец.

Построим, не опуская деталей, категорную склейку для этого примера.

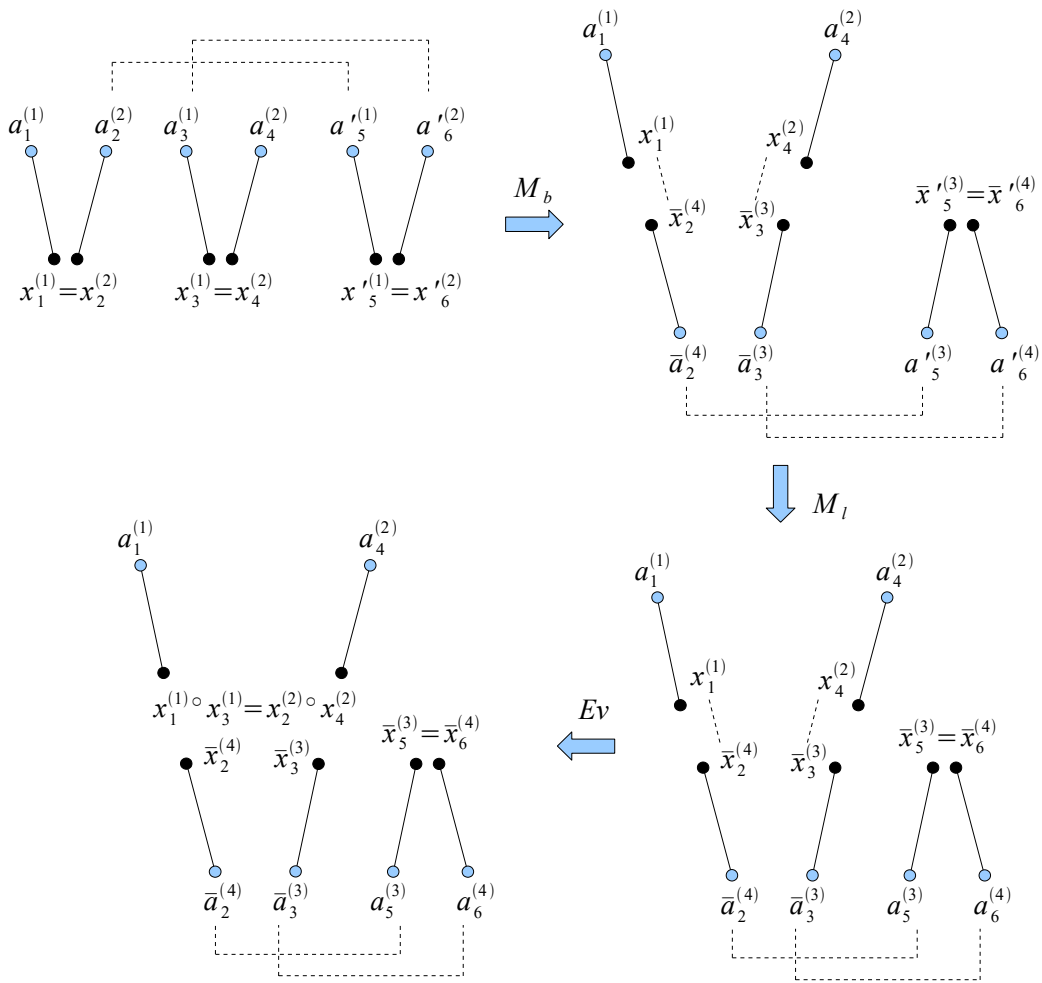
Вернемся к обозначениям склеек, проекции будем обозначать через  $a$  с индексами, имена функций - через  $x$  с индексами. Начнём с простейшего случая композиции двух стрелок  $f: 1 \rightarrow 1, g: 1 \rightarrow 1$ .

Внешние склейки и свёртки имеют вид



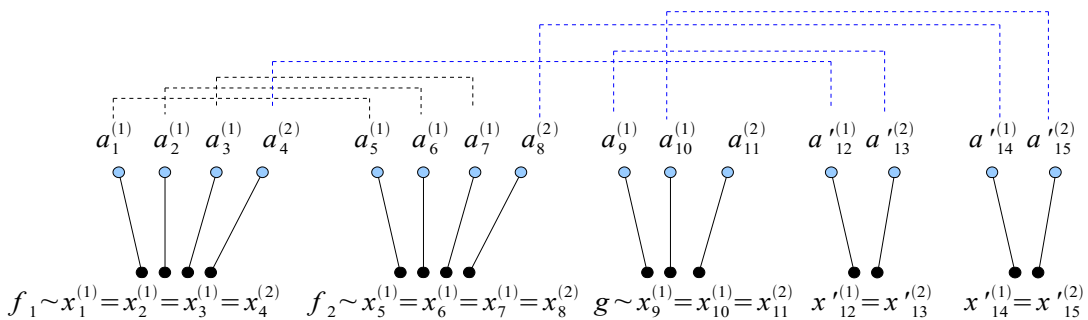
Для внешних склеек и свёрток нужны два сорта переменных в языке первый для выходов, второй для входов с проекциями  $a_1^{(1)} = C^{(1)}x_1^{(1)}, a_2^{(2)} = C^{(2)}x_2^{(2)}$ , проекции удовлетворяют свойствам  $C^{(1)}C^{(1)} = C^{(1)}, C^{(2)}C^{(2)} = C^{(2)}$ . Поскольку требуется  $a_2^{(2)} = a_5^{(1)}$ , то  $\check{C}^{(i)}\check{C}^{(j)} = \check{C}^{(j)}, i \neq j, i, j = 1, 2$ .

Выполним свёртку в приведённой диаграмме, получим

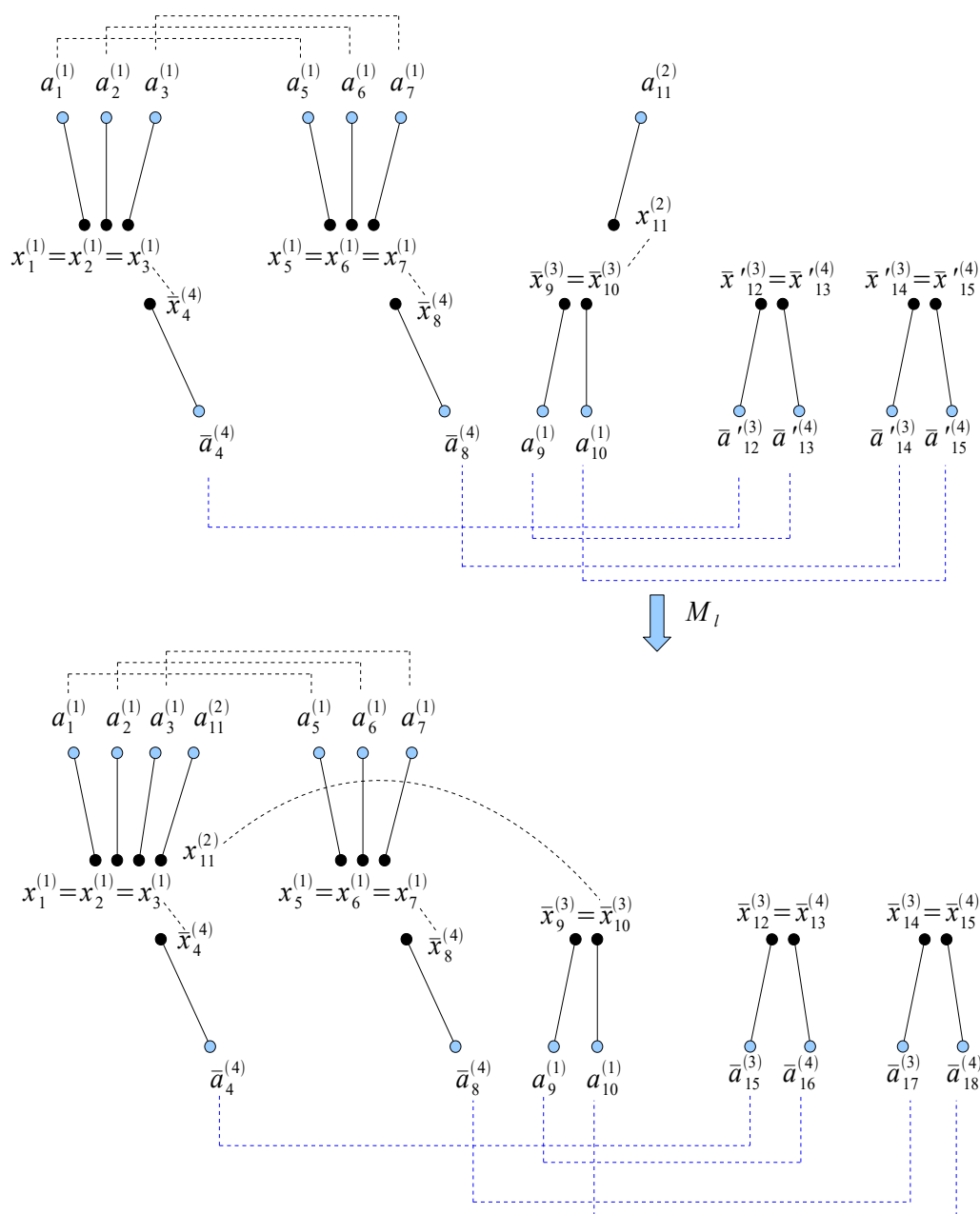


В свёртке стоит единичная стрелка с контекстом  $(a_1) \rightarrow (a_1)$ ,  $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1))$  - "сложная" функция. Приведённая свёртка практически не отличается от случая представления склейками композиции стрелок категории.

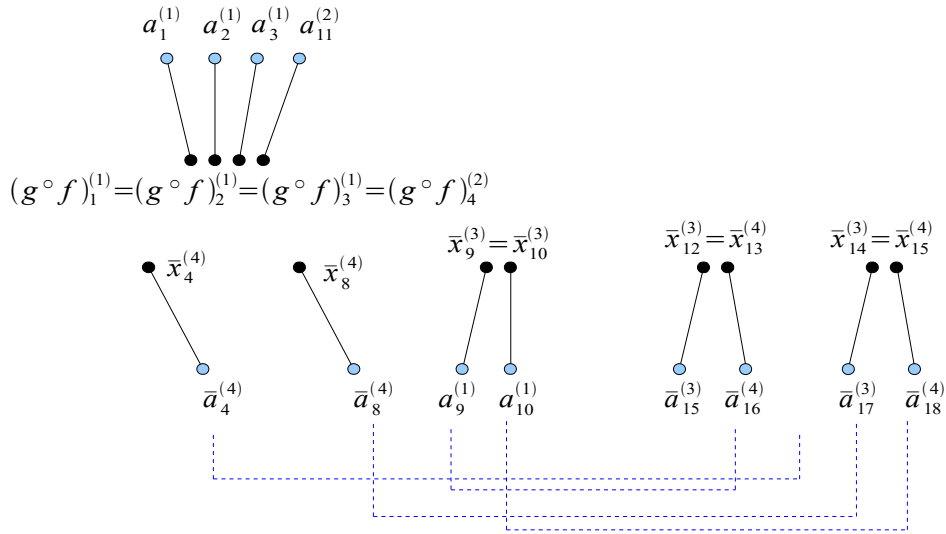
Рассмотрим еще свёртку для примера  $g \circ f, f: 3 \rightarrow 2, g: 2 \rightarrow 1$ ,  $f = (f_1, f_2), f_1 = x_1 - 2x_3, f_2 = 1 + x_2^2, g = (g_1), g_1 = x_1 x_2$ .



Применим правило вывода  $M_b$  (затем  $M_i, Ev$ ), получим



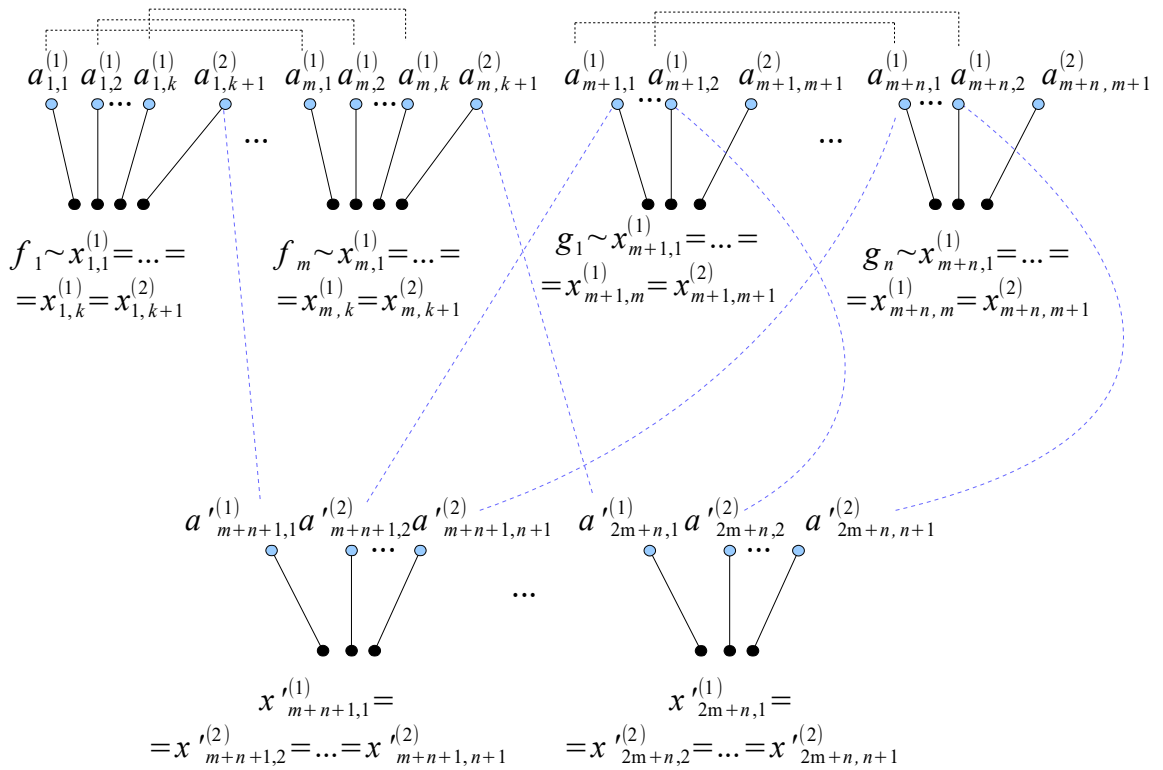
Правило вывода  $E\nu$  убирает пунктиры между внешней и внутренней склейками, часть формул с копией контекста и вводит подстановку, окончательно имеем



Явное выражение для примера имеет вид  $(g \circ f): (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1)$   
 $(g \circ f)(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3)(1 + x_2^2) = x_1 - 2x_3 + x_1x_2^2 - 2x_2^2x_3$ .

Примера достаточно, чтобы построить категорную склейку для теории коммутативных колец. Мы сразу проведём построение для синтаксической категории общей алгебраической теории.

Внешняя склейка с внешней свёрткой для синтаксической категории имеет вид  $( f : (x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_m), g : (x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) )$



Выкладки, аналогичные проделанным в примере теории коммутативных

колец, проходят, хотя и являются более громоздкими, в общем случае синтаксической категории произвольной алгебраической теории. В результате приходим к следующей теореме.

Теорема

Пусть задана алгебраическая теория  $T$  и её синтаксическая категория  $C$ , тогда существует категорная склейка, для которой  $C$  является моделью.

Теорема позволяет заключить, что универсальные алгебры являются моделями подходящих категорных склеек.

Обобщением теории Ловера являются введённые Маклейном *PROP* - пропы [MacLane, 1965].

Определение

*PROP* (проп) - это симметричная строгая моноидальная категория, объектами которой являются целые числа, тензорное произведение в которой на объектах совпадает с их суммой.

В последние годы интерес к пропам усилился, в частности, в связи с направлением их применения к различного вида сетям (электрическим, сетям Петри, нейронным сетям) [Baez, 2015], [Fong, 2018].

Алгебраические теории Ловера оказываются пропами.

Теорема

Синтаксическая категория алгебраической теории является пропом.

Моноидальные категории являются бикатегориями с одной 0-клеткой, а высшие категории мы уже рассмотрели в отношении их вложения в категорные склейки. Поэтому останавливаться на пропах для их представления склейками здесь мы не будем.

Приведенные теоремы показывают, что язык категорных склеек единообразно описывает основные алгебраические конструкции от универсальных алгебр до высших категорий.

Более того, как и всякий новый математический язык помимо описания известных объектов даёт возможность ввести новые, в том числе, более общие математические структуры. В случае категорных склеек такими новыми структурами являются, в частности, рассмотренные разнообразные внешние склейки, для которых внешние свёртки *отличаются* от рассмотренных, характерных для известных структур. Вторая важная особенность состоит в

новых возможностях описания дуальностей в категориях, включая высшие категории и поликатегории (и уже дуальностей в самих категорных склейках), как известных, так и новых, что мы рассмотрим во второй части работы. Некоторая избыточность языка склеек, которая имеет место для ряда вопросов алгебраических структур, полностью оправдывается и является необходимой в связи с потребностями общей теории систем, которая, собственно, становится большим разделом теории категорных склеек и ее приложений.

Важнейшей особенностью теории категорных склеек является ее изложение, опирающееся на логические языки и понятие формальной теории. Как утверждает в известном высказывании академик А.И.Мальцев выписывание на языках первого (и второго) порядка определений алгебраических структур само по себе уже даёт многочисленные их конкретные свойства.

### ***3. Свёрточные поликатегории и искусственные нейронные сети***

3.1. В этом небольшом разделе мы приведём основанное на категорных склейках определение свёрточных поликатегорий, введённых автором в [Толоконников, 2016] и рассмотрим представление нейронных сетей произвольной топологии в виде свёрточных поликатегорий со свёртками типа короны [Толоконников, 2016], [Tolokonnikov, 2020, v. 938]. Мы также расширим модель нейрона, которая использует свёрточные поликатегории до модели нейрона на основе склеек, что даёт возможность учитывать неспайковые коммуникации нейронов между собой и с другими клетками. В последние годы учёт неспайковых коммуникаций нейронов привлекает большой интерес [Кузнецов, 2018].

#### Определение

Категорная склейка называется *свёрточной поликатегорией*, если она имеет ровно два типа сортов переменных ("входы" и "выходы"), алгебру проекций вида  $C_i C_j = C_j$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots$  со свёртками, соединяющими выходы с входами, и являющимися конусами указанных сортов.

Свёрточные поликатегории достаточно подробно изучались в [Толоконников, 2016, 2017, 2018], мы на них здесь не останавливаемся, считая необходимые для данной статьи их свойства известными. Перейдем к определению новой склеечной модели нейронов и их сетей.

Поликатегорная модель нейрона введена автором [Толоконников, 2016], входы и выходы полистрелок, представляющих нейроны, моделируют пути распространения спайков. Однако, межклеточные коммуникации намного богаче спайковой активности. Во многих исследованиях обнаружено влияние на

спайковую активность со стороны других видов связей между нейронами. Появились модели нейронов [Кузнецов, 2018], учитывающие подобные взаимодействия.

### Определение

Пусть задана модель категорной склейки, имеющей два выделенных сорта переменных, которые будем называть входами (*in*) и выходами (*out*) и  $n$  сортов переменных, которые будем называть сортами каналов неспайковой коммуникации. Пусть также эта модель состоит из наборов конусов из указанных  $n_{in} + n_{out} + n$  сортов переменных. Тогда **нейроном** называется каждый из указанных конусов, а сама модель категорной склейки с имеющимися свертками называется **категорной склеечной нейронной сетью**.

Поскольку склейки включают, как частные случаи свёрточные поликатегории и высшие категории, то данное определение с учетом наличия в склейках соответствующих свёрток носит весьма общий характер и имеет богатый инструментарий для моделирования связей большой сложности между нейронами, взаимодействующими не только с помощью спайков. В следующем пункте рассмотрено моделирование традиционных искусственных нейронных сетей свёрточными поликатегориями.

3.2. Один из основных имеющихся общепринятых подходов в теории нейронных сетей, именно, *PDP* (*Parallel Distributed Processing*), был в 1980-е годы выработан группой ученых физиологов, психологов, математиков, компьютерщиков, в члены которой, входил нобелевский лауреат Френсис Крик.

Модель нейронной сети *PDP* содержит три вида элементов, **нейрон** или сома (обрабатывающий элемент, сейчас это процессор или транспьютер), **аксон** (линия передачи сигналов) и **синапс** («стык» преобразующий сигнал с аксона в подходящий сигнал для сомы).

Нейронная *PDP* сеть в простейшем варианте образует «граф» с узлами в виде нейронов со следующими свойствами:

- (а) к каждому синапсу подходит только одна линия;
- (б) к различным синапсам на данном нейроне подходят линии от различных нейронов;
- (в) линии передачи не ветвятся, являются обычными дугами графа.

Свойство (в), взятое из [Широков, 1990] стр.274, на самом деле требует, чтобы у нейрона было несколько выходов, это **ошибочно** не только потому, что далее в тексте [Широков, 1990] нейрон выдаёт только один сигнал, но и потому, что затушевывается важнейшее свойство живых нейронных сетей, когда один выход соединяется с **несколькими** входами других нейронов. Здесь явно используется вариант свёртки, отличающийся от известного в теории категорий способа соединения стрелок с помощью композиций. В графических



обозначениях из [Rumelhart, 1987] где описана *PDP* модель, пункт (в) призван заменить

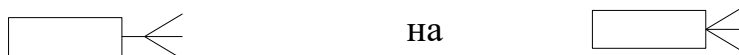


Рис.2. Схематичное изображение нейронов

что не удаётся, в примере (см. рис. 3) снова появляется ветвление линий.

Соединение нейронов в сеть порождает свёртку полистрелок, для примеров из [Широков, 1990] стр.275 имеем поликатегорный вид (нейроны, с которыми связан нейрон на первой части рисунка не указаны):

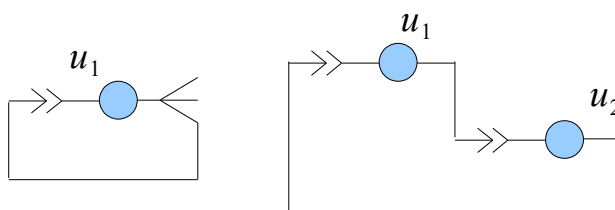


Рис.3. Схематичное изображение связей нейронов

В нашем подходе нейрону мы в данной *PDP* модели сопоставляем полистрелку с входами в виде синапсов и выходом в виде линии, которая, как и аксон, расщепляется на несколько линий, идущих к другим нейронам (свертка типа короны).

В понятие графа входит по определению два множества, множество вершин и множество пар вершин («дуги» графа). Обычно, инженеры-нейросетевики продолжают говорить о нейросети, как о графе, но когда им вместе с определением графа (с которым они соглашаются!) из нейросети предьявляется точка ветвления, которая не входит в граф, они попадают в затруднительное положение: **нейронная сеть не является графом** в обычном, как это соответствует приведенному определению смысле. И попытка рис.3 «убрать» эту точку ветвления в нейрон не случайна.

Основной современный стандарт нейроинформатики (см., например, [Голубев, 2005]) образуют нейроны, вычисляющие значение

$$a = f(Wx + b), x = (x_1, \dots, x_k) \in \{0,1\}^k, a \in \{0,1\}, \\ W = (w_1, \dots, w_k)^T, w_i, b \in \mathbb{R}, f: \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}.$$

Нейроны в нейросети соединяются друг с другом так, что с единственного выхода нейрона (аксона) связь разветвляется на несколько входов других нейронов, в том числе, не исключен случай соединения выхода с входом одного и того же нейрона.

Таким образом, нейрон  $n$  представляется в виде функции многих переменных  $n: \{0,1\}^k \rightarrow \{0,1\}$ . Для нейросети соединения нейронов можно

моделировать свёрткой в ассоциативной композиционной свёрточной поликатегории согласно следующей ниже теореме, доказанной в [Толоконников, 2017]. Перед формулировкой отметим, что свёртка, разветвляющая один выход на несколько входов в полистрелки свёрточного полиграфа называется *свёрткой типа корона* или просто короной.

*Теорема* (моделирования нейросети)

Пусть имеется искусственная нейронная сеть с нейронами  $n: \{0,1\}^k \rightarrow \{0,1\}$ , имеющими несколько входов ( $k \in \mathbb{N}$ ) и один выход, со своей функцией активации  $u$  каждого нейрона, с поступающими на вход синапсов нейрона сигналами из совокупности  $b$ , являющейся множеством. Соединения нейронов осуществляются имеющимся выходом, который ветвится на конечное число  $m \in \mathbb{N}$  линий, соединяющихся с входами других нейронов. Тогда нейронные сети, построенные из указанных нейронов, образуют ассоциативную композиционную свёрточную поликатегорию с набором свёрток типа "корона".

Представление нейросети в виде поликатегории помогает устранить многие неточности в теории нейросетей. Так, во второй части работы, опираясь на свойства и понятие дуальности поликатегорий, мы построим корректные схемы популярного у нейросетевиков интуитивного метода С.Осовского [Осовский, 2017] для вычисления частных производных, используемых в методе обратного распространения ошибки.

#### **4. Категорные системы, как категорные склейки, и системный подход**

Категорная теория систем возникла как вариант формализации теории функциональных систем П.К.Анохина. В настоящем разделе мы даём определение категорных систем в их обобщении на случай категорных склеек и сравнение с рядом других строгих математических подходов в теории систем. Детальное рассмотрение самих постулатов теории функциональных систем с обсуждением категорной парадигмы, вопросов формализации интуитивных принципов изоморфизма и иерархии по П.К.Анохину, а также подробный физиологический пример категорной теории гомеостаза рассмотрены во второй части работы.

4.1. В данном разделе мы приведём ключевые определения и подходы к системам на основе теории множеств. Сначала напомним основные понятия из теории систем [Месарович, 1973], [Месарович, 1978], которую мы будем называть теорией систем по М.Месаровичу.

### Определение

Пусть заданы два множества: множество  $X$  входов и множество  $Y$  выходов. Тогда **системой**  $S$ , или **системой по Месаровичу**, называется отношение  $S$  на декартовом произведении  $X \times Y$ . Как и в [Месарович 1973, 1978], будем использовать функциональные обозначения  $S: X \rightarrow Y$ .

Если задана совокупность  $S$  систем  $S_i$ , причём индексное множество «<<»-частично упорядочено, тогда пара  $(S, <)$  называется **иерархией** систем.

Выделяется три вида иерархии систем, стратификация, слои и эшелоны.

### Стратификация

Если  $X = X_1 \times \dots \times X_n$  и  $Y = Y_1 \times \dots \times Y_m$ , то  $i$ -й **стратой** системы  $S$  называется система  $S_i$

$$\begin{aligned} S_n &: X_n \times W_n \rightarrow Y_n; \\ S_i &: X_i \times L_i \times W_i \rightarrow Y_i, 1 < i < n; \\ S_1 &: X_1 \times L_1 \rightarrow Y_1, \end{aligned}$$

имеются сюръекции  $h_i: Y_i \rightarrow W_{i+1}$ ,  $c_i: Y_i \rightarrow L_{i-1}$ , такие, что

$$\begin{aligned} y_n &= S_i(x_n, h_{n-1}(y_{n-1})); \\ y_i &= S_i(x_i, c_{i+1}(y_{i+1}), h_{i-1}(y_{i-1})); \\ y_1 &= S_1(x_1, c_2(y_2)). \end{aligned}$$

$L_i, W_i$  – множества стимулов,  $h_i$  – информационная функция  $i$ -й страты,  $c_i$  – распределительная функция  $i$ -й страты.

Система  $S$  в этом случае называется **стратифицированной системой**.

### Слои

Если система  $S$  может быть представлена подсистемами  $S_i: M_i \rightarrow M_{i-1}$ , то эти подсистемы называются **слоями системы**  $S$ .

### Эшелоны

В иерархии, составленной из упорядоченных по номерам  $1, 2, 3, \dots, n$  страт или слоёв, на каждом уровне  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  находится по одной подсистеме, в случае эшелонной иерархии на каждом уровне может присутствовать по несколько подсистем. В этом случае уже нет строго порядка на множестве индексов  $I$ . В соответствии с упорядоченностью в  $I$  имеем следующие эшелоны

$J^{(1)}, \dots, J^{(k)}, \dots$ , на которые разбивается исходная система:

$$\begin{aligned} J^{(1)} &= \{S_i | i \in I_1\}, \quad I_1 - \text{набор минимальных элементов в } I, \\ J^{(k)} &= \{S_i | i \in I_k\}, \quad I_k - \text{набор минимальных элементов в } I \setminus \{I_1 \cup \dots \cup I_{k-1}\} \end{aligned}$$

и так далее.

Определение закончено.

Отметим, что к этому определению независимо пришёл В.М.Матросов (см. обзор теории систем в [Матросов, 1974]), обобщивший далее его до систем процессов. Классическая математическая теория систем чрезвычайно обширная область исследований. Мы укажем на основные направления, отсылая читателя к огромной литературе по классической математической теории систем, приведённой в [Матросов, 1974], [Матросов, 1980], [Васильев, 2000].

В развитии математических концепций систем и процессов как аксиоматических систем в [Матросов, 1974] выделено три направления.

Первое направление возникло в трудах А.М.Ляпунова и А.Пуанкаре на основе качественных и аналитических методов исследования классической динамики и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Возникла созданная Дж.Д.Биркгофом теория динамических систем, определяемых автономными дифференциальными уравнениями, правые части которых удовлетворяют условиям существования, единственности, продолжимости на всю вещественную ось времени и непрерывности решений от начальных данных. Аксиоматизация этих условий привела А.А.Маркова к концепции абстрактной динамической системы, лежащей в основе классической теории динамических систем по В.В.Немыцкому и В.В.Степанову.

Для включения в область приложений теории по возможности более широкого класса вопросов динамики автономных систем, в том числе с распределёнными параметрами, с последствием, с дискретным временем и так далее в работах Е.А.Барбашина, М.Морса, Дж.Д.Биркгофа и других учёных была определена общая динамическая система в топологическом пространстве, у которой ось времени заменена произвольной группой.

Возникает определение обобщённой динамической системы, в которой отсутствует свойство единственности траекторий, аксиоматизируется существование непосредственно множеств достижимости (Е.А.Барбашин и др.). О.Гаеком и Дж.Селлом вводятся динамические системы без свойства неограниченной продолжимости решений. Далее появились полудинамические и локальные полудинамические системы, свойства которых изучаются в работах Н.П.Батъя, О.Гаека, Дж.Сегё, Г.Треккани и других ученых.

Дальнейшие обобщения концепции динамической системы изучаются в статьях Р.Е.Калмана, Дж.К.Хейла, М.Месаровича, где, в частности, введено определение переходной системы, в которой не используется начальное условие и полугруппа заменена частичным группоидом. В.И.Зубов вводит известное определение общей системы, позволяющее в первую очередь охватить неавтономные дифференциальные уравнения с непрерывной правой частью без единственности. Основными объектами исследования в общей системе являются множества достижимости, однако, во многих конкретных случаях, например, для систем с распределёнными параметрами, не все аксиомы общей

системы имеют место.

Далее вводятся общая система с единственностью, но без неограниченной продолжимости и другие модификации концепции общей системы В.И.Зубова.

Второе направление связано с возможностью записи конечных и счётных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с последействием, стохастических дифференциальных уравнений, эволюционных дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и так далее в форме дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Это послужило стимулом развития теории дифференциальных уравнений в функциональных пространствах в работах К.П.Персидского, М.Г.Крейна, М.А.Красносельского, В.М.Миллионщикова и многих других исследователей.

А.А.Мовчаном введено понятие процессов, к этому направлению примыкают работы Т.Вожеля, А.Халаяна, И.Е.Гильберта, Р.Дж.Кнопса, М.Жана, Д.Башо и других авторов. В дальнейшем принят подход, связанный с аксиоматическим заданием процессов как частичных функций времени со значениями в абстрактных множествах, обобщающий концепцию А.А.Мовчана.

Остановимся на третьем направлении исследований по динамике систем, возникшем в начале 60-х годов, развивавшемся под влиянием потребности объединения теории автоматического регулирования и теории автоматов и получившем название общей теории систем управления.

Определение абстрактной управляемой системы было введено Р.Калманом, по существу, путём индексации процессов множеств достижимости общей системы элементами пространства входов и дополнительным заданием выходной функции, определенной на пространстве событий. Л.А.Заде отметил целесообразность определить выходную функцию на произведении пространств входов и событий. В результате появилась модификация определения управляемой системы. Аксиоматическое задание функции достижимости при внутреннем описании, предложено Е.Роксиним. Модификация Д.Башо внутреннего описания управляемой системы, привела его к понятию динамической полисистемы, изучавшейся Г.Халкиным и другими математиками. Дальнейшее обобщение понятия полисистемы, связанное с отказом от явного рассмотрения зависимости движений от времени и изучением лишь множеств достижимости, привело к определению квазипорядка в пространстве событий.

Как пишет В.М.Матросов [Матросов, 1974] "Трудности разработки математического аппарата описания процессов функционирования, развития и управления в системах связаны прежде всего с тем, что он должен, с одной стороны, иметь **высший уровень общности**, а с другой, - допускать формулировку и изучение в своих терминах основных динамических свойств системы и позволить возвращение к всевозможным конкретным системам и свойствам естественным образом, как к частным случаям (интерпретациям).

Итак, первой нашей задачей должно являться аксиоматическое определение процессов в абстрактных множествах с обобщением известных аксиом, хотя совершенно справедливо, что в данной области никто не может утверждать, что последнее слово осталось за ним".

Большинство многочисленных систем было объединено выработанным В.М.Матросовым определением системы процессов [Матросов, 1974]. Мы, однако, не будем приводить подобное мощное обобщение столь обширного количества подходов к системам в виде систем процессов.

Наиболее общее определение системы, охватывающее как системы процессов, так и многочисленные подходы, не описываемые системами процессов, дано академиком С.Н.Васильевым [Васильев, 1981], [Матросов, 1980]. На этом определении мы остановимся в следующем пункте.

4.2. В этом разделе мы рассмотрим подход к системам на основе описания их свойств в логистических исчислениях, детально реализованный для логистических исчислений классической логики.

Метод сравнения, используемый в теории систем процессов, привёл в 1974 году к новому определению систем, опирающемуся на описание свойств систем в виде формул исчисления предикатов в аксиоматических теориях [Васильев, 1981], [Матросов, 1980]. Первоначальное определение [Васильев, 1981], было уточнено С.Н.Васильевым в [Матросов, 1980].

Использующий это определение метод типовых кванторов получил значительное число приложений в искусственном интеллекте [Васильев, 2000]. [Васильев, 2015]. В работе [Tolokonnikov, 2020, v.1126] построена поликатегорная модель для исчисления типовых кванторов. К сожалению, развития для других помимо классической и частично интуиционистской логик данное определение не получило.

Пусть  $\Gamma_0$  - аксиоматическая теория множеств  $NBG$  (обсуждавшаяся выше, далее используются те же обозначения, что и ранее,  $x, y, z$  - обозначение множеств  $X, Y, Z$  - обозначения классов и т.п.). Теория  $NBG$  функциональных символов и констант не имеет, но ряд констант обычно вводится, как мы видели, вместе с соответствующими аксиомами. Добавим в эту теорию константы  $a_1, a_2, \dots, a_{l'}$  и аксиому  $U$ , которая может содержать эти константы. Полученную таким расширением теорию обозначим  $\Gamma(\sigma)$ ,  $\sigma = \{a_1, \dots, a_{l'}, U\}$ . Новые константы и аксиома будут отвечать описанию среды для системы. Отметим, что в исчислении предикатов имеется конъюнкция с такими свойствами, что можно в определении обойтись одной аксиомой, если есть две аксиомы (или больше), то беря их конъюнкцию, приходим к приведённому определению. Наоборот, если аксиома является конъюнкцией нескольких формул, то беря эти формулы по отдельности можно

говорить о выполнении не одной, а нескольких аксиом. Теперь добавим еще константы  $a_{l'+1}, a_{l'+2}, \dots, a_l, l > l'$  и еще одну аксиому  $V$ , которая может содержать любые из введенных констант  $a_1, a_2, \dots, a_l$ . Полученную таким расширением теорию обозначим  $\Gamma(\Sigma(\sigma)), \Sigma(\sigma) = \{a_{l'+1}, \dots, a_l, V\}$ , и будем  $\sigma, \Sigma(\sigma)$ , соответственно, называть родом среды и родом системы в среде рода  $\sigma$ , а теорию  $\Gamma(\Sigma(\sigma))$  называть **теорией систем рода  $\Sigma(\sigma)$  в средах рода  $\sigma$** . Пусть теперь задано расширение  $NBG$  теории  $\Gamma' \supseteq \Gamma_0$  и в нём кортеж термов  $M' = \langle M_1, \dots, M_{l'} \rangle$  и в этой теории выводима формула

$$S_{M_1, \dots, M_{l'}}^{a_1, \dots, a_{l'}} U,$$

полученная из формулы  $U$  одновременной подстановкой вместо  $a_1, \dots, a_{l'}$  соответственно  $M_1, \dots, M_{l'}$ . Тогда кортеж  $M' = \langle M_1, \dots, M_{l'} \rangle$  называется **средой** рода  $\sigma = \{a_1, \dots, a_{l'}, U\}$ .

Если теперь в теории  $\Gamma' \supseteq \Gamma_0$  задан кортеж термов  $M = \langle M_{l'+1}, \dots, M_l \rangle, l' \neq 0$  и в этой теории выводима формула

$$S_{M_1, \dots, M_l}^{a_1, \dots, a_l} V,$$

полученная из формулы  $V$  одновременной подстановкой вместо  $a_1, \dots, a_l$  соответственно  $M_1, \dots, M_l$ . Тогда кортеж  $M = \langle M_1, \dots, M_l \rangle$  называется **системой** рода  $\Sigma(\sigma) = \{a_{l'+1}, \dots, a_l, V\}$  со средой  $M'$  рода  $\sigma = \{a_1, \dots, a_{l'}, U\}$ .

"Введенное определение ... соответствует интуитивным представлениям о системе как о совокупности взаимосвязанных объектов, погруженных в некоторую среду, влияющую на свойства этой совокупности" (см. [Матросов, 1980], стр.377). Для того, чтобы в этом убедиться в [Матросов, 1980] советуют рассмотреть примеры систем.

### Пример

Полугруппа, как система по С.Н.Васильеву.

Среды нет, то есть  $\sigma = \emptyset$ , для  $\Sigma(\sigma) = \langle A, \phi, U \rangle$ , в качестве предметной константы выбрана буква  $A$ , которая будет интерпретироваться как множество. Константа  $\phi$  является двуместной функциональной константой, аксиомой является формула ассоциативности для  $\phi$

$$\forall x \forall y \forall z (\langle x, y, z \rangle \in A \times A \times A \supset (\phi(\phi(x, y), z) = \phi(x, \phi(y, z)))) .$$

Здесь  $\forall x, \forall y, \forall z$  типовые кванторы для ограниченных формул (см. [Мендельсон, 1984] стр.178). Декартово произведение  $Y_1 \times Y_2$  классов как новая функциональная буква в  $NBG$  вводится формулой

$$\forall x (x \in Y_1 \times Y_2 \equiv \exists u \exists v (x = \langle u, v \rangle \wedge u \in Y_1 \wedge v \in Y_2)) .$$

Функция вводится как класс упорядоченных однозначных пар. Если для функций не вводить функциональных констант, то  $\phi$  следует рассматривать как множество пар, то есть как множество (а не функцию) при интерпретации. Другими словами, как  $A$ , так и  $\phi$  будут предметными константами. Вообще

говоря, надо указывать в каком расширении  $NBG$  ведутся рассуждения.

Итак, мы получаем теорию систем рода  $\Sigma(\sigma) = \langle A, \phi, U \rangle, \sigma = \emptyset$ , это алгебраическая система полугрупп по А.И.Мальцеву. Её моделями являются разные полугруппы при выборе конкретных множеств  $A$  и бинарных операций  $\phi$ . Если рассмотреть множество  $N$  натуральных чисел в  $NBG$  и операцию сложения, то мы получим систему по С.Н.Васильеву, если в качестве теории  $\Gamma' \supseteq \Gamma_0$  возьмем саму  $\Gamma' = \Gamma_0 = NBG$  с её натурально-числовым объектом (совпадает с  $N$ ) и  $M = \langle N, + \rangle$ . Аксиома для  $+$  выполнена. Итак, кортеж из двух элементов  $M = \langle N, + \rangle$  есть система по С.Н.Васильеву.

Следующий пример уже имеет среду и систему в среде.

Род сред имеет вид  $\sigma = \{ X, R, T, c, U \}$ ,  
 $U = (R - \text{топология на } X) \wedge (T - \text{группа с операцией } c)$ .

Род систем имеет вид  $\Sigma = \langle F, V \rangle$ ,

$$V = F : X \times T \rightarrow X \wedge$$

$$\wedge \exists e (e \in T \wedge \forall t (t \in T \rightarrow c(e, t) = c(t, e) = t) \wedge \forall x (x \in X \rightarrow F(x, e) = x)) \wedge$$

$$\wedge (F - \text{непрерывно по } x \text{ в топологии } R) \wedge$$

$$\wedge \forall x \forall t_1 \forall t_2 (x \in X \wedge t_1 \in T \wedge t_2 \in T \rightarrow F(F(x, t_1), t_2) = F(x, c(t_1, t_2)))$$

" $R$  - топология на  $X$ " - обозначение для следующей  $NBG$ -формулы.

Напомним ([Мендельсон, 1984] стр.183), что  $P(X)$  - функциональная буква, вводимая соотношением (булеан)  $\forall x (x \in P(X) \equiv x \subseteq X)$ , функциональная буква  $U(Y)$  вводится соотношением (объединение всех элементов класса)  $\forall x (x \in U(X) \equiv \exists v (x \in v \wedge v \in Y))$ . Теперь для неформального определения топологии на множестве  $X$  (см. [Келли, 1981], стр.60) как множества подмножеств множества  $X$ , в которое, кроме самого  $X$  и пустого множества  $\emptyset$ , входит пересечение любых двух из этих подмножеств и объединение любого их числа, можно выписать формулу

$$R \subseteq P(X) \wedge X \in R \wedge \emptyset \in R \wedge \forall w (w \subseteq R \supset U(w) \in R) \wedge$$

$$\wedge \forall u \forall v (u \in R \wedge v \in R \supset u \cap v \in R).$$

Для других, выраженных словами формул, также имеются формальные выражения.

Если  $X$  считать прямой  $\mathbb{R}^1$ ,  $R$  считать обычной топологией вещественных чисел,  $T$  считать временем, с суммой ( $c(t_1, t_2) = t_1 + t_2$ ), а  $F$  непрерывной функцией  $y = F(x, t)$ , то мы получаем среду в виде прямой и времени и **систему** (кортеж из одного элемента  $F$ ), дающую положение  $y$  точки, находившейся в начале отсчета времени в точке  $x$ . Здесь система суть закон движения точки по прямой. Системы по М.Месаровичу являются частным случаем систем по С.Н.Васильеву [Васильев, 1981], здесь  $\sigma = \emptyset$ ,  $\Sigma(\sigma) = \langle a, b, c, V \rangle, V = c \subseteq a \times b$ . Если  $X$  - множество входов,  $Y$  - множество выходов, то всякое отношение (подмножество декартова произведения входов на выходы), точнее кортеж  $\langle X, Y, \phi \rangle$ , будет системой  $\langle X, Y, \phi, \phi \in X \times Y \rangle$ , отвечающей системе  $\phi$  (черный ящик с входами  $X$  и выходами  $Y$ ) по М.Месаровичу.



Теорию категорий, интерпретируемую в множествах, также можно представить как систему. Действительно, обратимся к аксиомам А1-А6 теории категорий, введённых Хетчером [Hatcher, 1980]. Будем считать  $\sigma = \emptyset$ ,  $\Sigma(\sigma) = \langle D, C, S, V \rangle$ , в качестве аксиомы  $V$  возьмем конъюнкцию шести аксиом, указанных ниже  $V = A1 \wedge A2 \wedge A3 \wedge A4 \wedge A5 \wedge A6$ . Здесь буквы кортежа отвечают функциональным символам областей  $D$ , функциональным символам кообластей  $C$ ,  $S(p, q, r)$  - трёхместному предикату композиции.

Аксиома А1

$$\forall p (D(C(p)) = C(p) \wedge C(D(p)) = D(p)) ,$$

$$\forall p (D(D(p)) = D(p) \wedge C(C(p)) = C(p)) .$$

Аксиома А2

$$\forall p \forall q \forall r \forall t (S(p, q, r) \wedge S(p, q, t) \supset r = t) ,$$

если композиция определена, то она единственна.

Аксиома А3

$$\forall p \forall q (\exists r (S(p, q, r) \equiv C(p) = D(q))) ,$$

если композиция существует того и только тогда, когда кообласть первой стрелки совпадает с областью второй.

Аксиома А4

$$\forall p \forall q \forall r (S(p, q, r) \supset C(r) = D(q) \wedge D(r) = D(p)) ,$$

необходимое условие на композицию - область композиции стрелок суть область первой стрелки, а кообласть суть кообласть второй.

Аксиома А5

$$\forall p (S(D(p), p, p) \wedge S(p, C(p), p)) ,$$

композиция области стрелки с ней равна этой области, композиция стрелки с ее кообластью равна самой стрелке ("единичность" областей и кообластей как стрелок).

Аксиома А6

$$\forall p \forall q \forall r \forall t \forall x \forall y \forall z$$

$$(S(p, q, r) \wedge S(q, t, x) \wedge S(r, t, y) \wedge S(p, x, z) \supset y = z) ,$$

выражает ассоциативность композиции.

Аналогично возникает как система теоретико-множественная реализация аксиом свёрточных поликатегорий и категорных склеек с системными аксиомами. Другими словами, в формализме, предложенном С.Н.Васильевым для систем, также выражается теоретико-множественная категорная теория систем. Однако, категорная теория систем охватывает по крайней мере два

более общих уровня, чем теоретико-множественные системы по С.Н.Васильеву. Один из них, исходящий из стрелок, как частного случая склеечных конусов, но не из элементов объектов, использует в качестве универсума для интерпретаций топосы, в которых теория множеств лишь один и весьма частный случай. Здесь подход С.Н.Васильева может быть обобщён, по крайней мере, на уровне основных определений, а, возможно, и во всей технологии теории сравнений, что было бы весьма интересно осуществить, поскольку теория топосов детально разработана и ее начали использовать физики, как фундамент для физических теорий [Doring, 2008]. Тогда этот класс категорных систем аналогично ляжет в структуру систем по С.Н.Васильеву.

Второй уровень, оставляя за исходный материал построения стрелки (полистрелки, склеечные конусы), отходит от языка исчисления предикатов. Здесь обобщение метода С.Н.Васильева представляется проблематичным уже в принципе.

4.3. В данном пункте мы дадим определение категорных систем на основе категорных склеек и дальнейшее обсуждение их сравнения с другими подходами.

Важнейший момент, по поводу которого П.К.Анохин подверг исчерпывающей критике подходы М.Месаровича и их разновидности (что относится также к подходу к системам по С.Н.Васильеву), - это отсутствие системообразующего фактора в определении системы. **Определение системы должно отражать источник и механизм собирания системы из подсистем**, чего в подходе С.В.Васильева к системам не наблюдается. Именно поэтому под определение систем попадают алгебраические системы по А.И.Мальцеву и другие самые общие структуры математики, рассматриваемые в виде систем, определяемых по С.Н.Васильеву, как расширения аксиоматической теории множеств.

Мы определим категорные системы и категорные функциональные системы, включающие формулировку системообразующего фактора.

Пусть заданы две модели категорных склеек. Как и в случае категорий [Mac Lane, 2013] можно подчеркнуть различие аксиоматического определения от модели приставкой «мета». Другими словами, удобно называть категорные склейки в их формальном определении метасклейками, а их модели категорными склейками, что мы иногда, в частности, в данном пункте, будем делать.

Отображение одной модели или, другими словами, категорной склейки в другую называется **склеечным функтором**, если оно сохраняет склеечные структуры (свёртки, проекции и так далее). Здесь мы не будем изучать свойства функторов между категорными склейками, отметив только, что категорные склейки со склеечными функторами образуют обычную категорию, которую мы будем называть **категорией склеек**.

Определение

Пусть задана категорная склейка, как модель формальной метасклейки. Тогда всякая склейка или набор конусов категорной склейки называется **категорной системой** или просто **системой**. Система называется **составной**, если она представима в виде свёрток других систем, называемых **подсистемами** исходной системы. Если систему нельзя представить в виде свёртки других систем, то она называется **простой системой**.

Как видно, система по М.Месаровичу как отношение на декартовом произведении множества входов и множества выходов ("черный ящик" с входами и выходами) в приведённом определении заменяется на полиграф, свёрточной поликатегории, например, отдельную полистрелку - непосредственное обобщение отношения на декартовом произведении до полистрелки поликатегории. Однако, как это уже использовано при моделировании нейронов с их неспайковой активностью и их сетей склейками в категорных системах возможно моделирование более общих связей, чем в подходе Месаровича, использующем только два типа сортов (входы и выходы).

Системы, которые М.Месарович представляет в виде иерархии систем (стратифицированные, послойные и эшелонные), в категорном исполнении представляются в виде соответствующих свёрток подсистем. Например, ниже изображена часть из трёх страт.

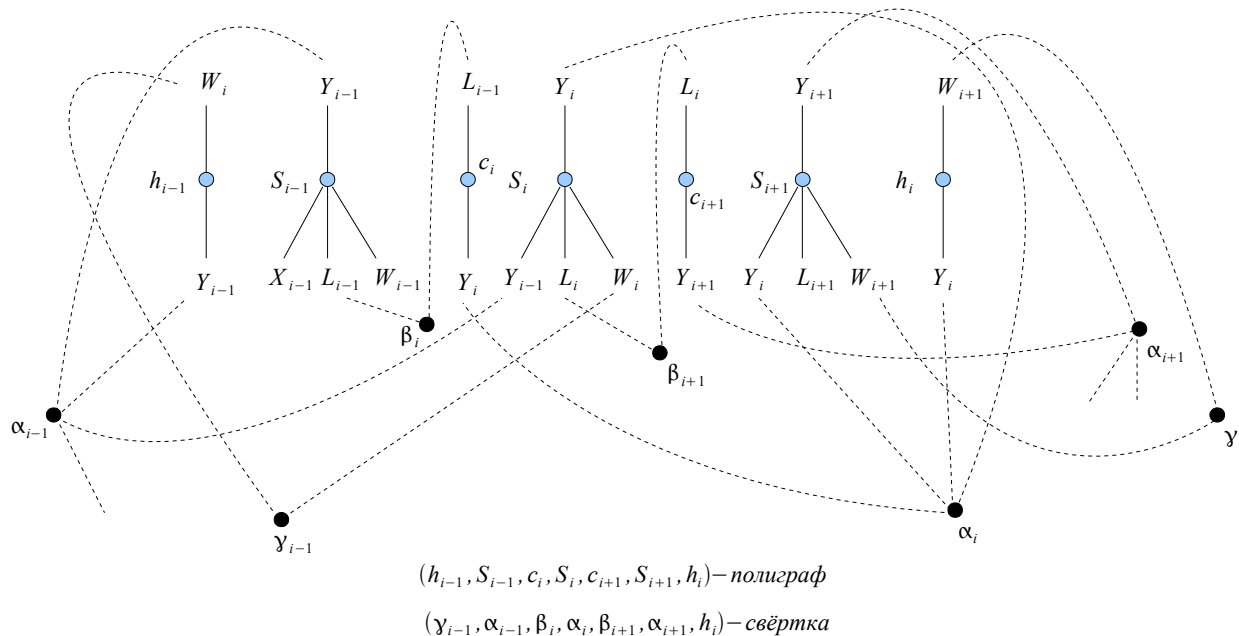


Рис.4. Категорная схема для трех страт

Слои и эшелонные системы по Месаровичу представляются категорными системами аналогично [Толоконников, 2016, Т.2].

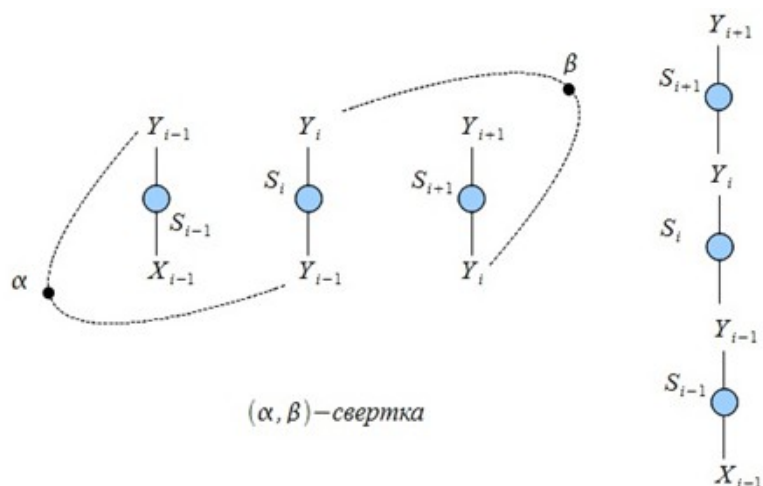


Рис. 5. Категорная схема для трех слоев

На рисунке изображена часть из трёх слоев иерархии по слоям. Эшелонные системы по Месаровичу представляются категориными системами аналогично, в этом случае на каждом уровне иерархии могут находиться несколько подсистем. Эшелонные системы могут моделировать случай, когда выходы подсистемы соединяются с входами подсистемы не на следующем, а на более высоком уровне иерархии. Здесь удобно использовать специальную «единичную» систему, имеющую один вход и один выход, который не отличается от входа (система «ничего не делает»).

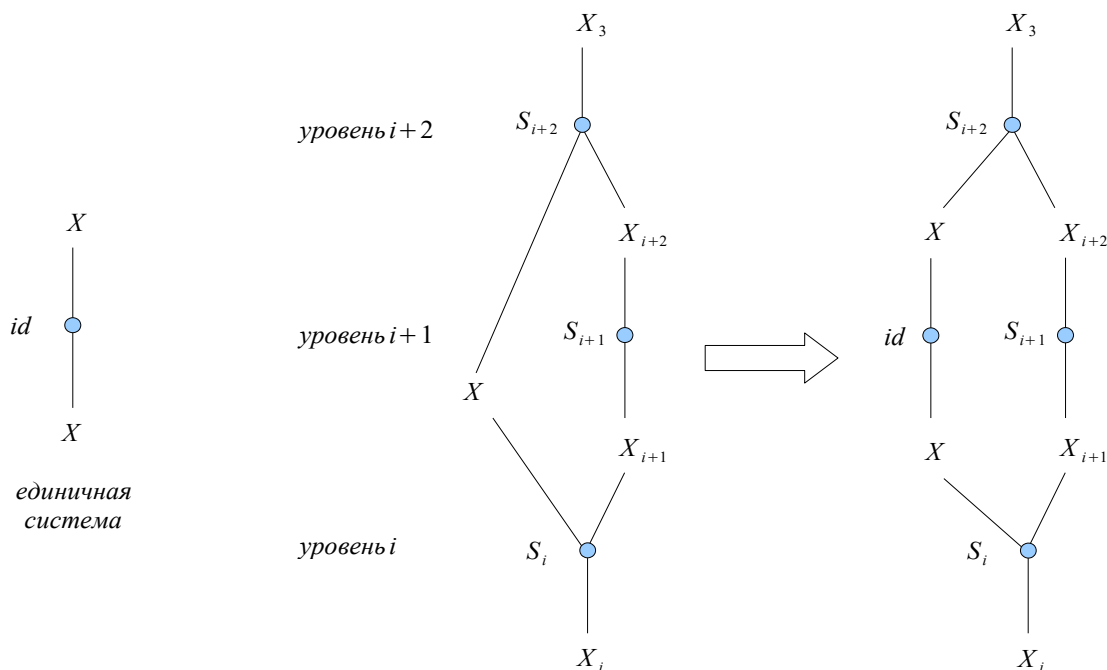


Рис. 6. Категорный эшелонный вариант иерархии

Как показано на рисунке, использование такой единичной системы приводит систему к случаю соединения лишь систем из соседних уровней, но на каждом уровне может быть несколько подсистем (эшелонный вариант иерархии).

Системообразующий фактор по П.К.Анохину находит естественную модель в категорных функциональных системах.

### Определение

Пусть задана совокупность категорных систем  $\{S_\alpha, S_r, \alpha \in I\}$ ,  $I$  – индексное множество,  $S_r$  – выделенная система, называемая *результатом*, склеечный эндифунктор  $F$  в категории систем и свёртка  $\Delta$ . Тогда, если свёртка применима к совокупности преобразованных систем  $\{FS_\alpha, FS_r, \alpha \in I\}$ , то пара  $(F, S_r, \Delta)$  называется *системообразующим фактором* составной системы  $S = \Delta(\{FS_\alpha\})$ , имеющей систему  $S_r$  в качестве результата.

### Замечание

Эндифунктор можно было бы включить в свёртку, однако, удобно указывать явно на изменения в подсистемах и отдельно на соединение подсистем в систему свёрткой. Более того, эндифунктор может включать свёртку и свёртка определения становится в этом случае тождественной. Иногда удобнее при создании системы из подсистем сначала применить свёртку, а потом подходящий эндифунктор, с чем мы сталкиваемся в теории категорных искусственных нейронных сетей.

Подход М.Месаровича, как мы видели, является теоретико-множественным и опирается на представление о системе в виде «черного ящика» с входами и выходами. Эргатические системы «человек-машина» явно состоят из двух блоков со связями между ними, можно сказать, из двух «черных ящиков». Теория эргатических систем (как синонимы или близкие по значению понятия применяются также следующие термины: системы "человек-машина", системы "человек-техника", инженерная психология, человеческие факторы) с 1960-х годов превратилась в обширную научно-техническую область с многочисленными результатами и проблематикой ([Бодров, 1998], [Ломов, 1966], [Сергеев, 2011]). Однако, мы здесь затронем лишь ключевое структурное качество: состоять из двух «взаимодействующих» блоков образно названных «человек» и «машина».

Биомашсистемы (см. обзор [Черноиванов, 2017]), если отвлечься от категорного их построения, основаны на трех подобных взаимодействующих блоках, опираются на триаду «человек-машина-живое». Конечно, функциональные

системы становятся в возникающий ряд видов систем, они «состоят» уже из четырёх взаимодействующих блоков афферентного синтеза, принятия решения, акцептора результата действия и программы действия.

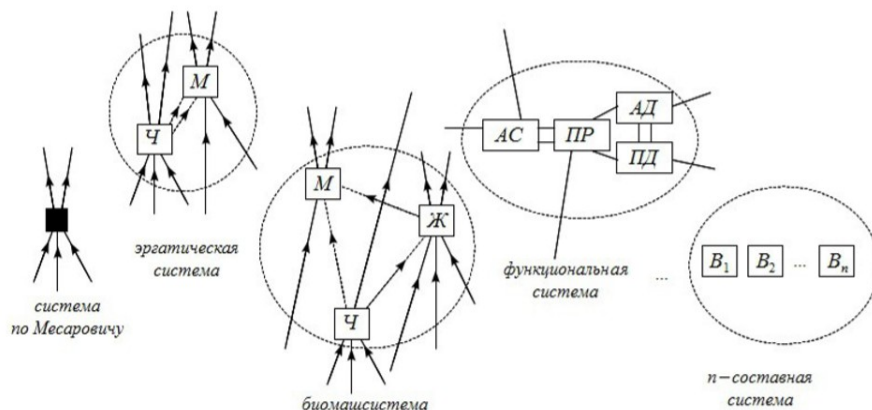


Рис.7. Ч – «человек», М - «машина», Ж - «живое», АС – блок афферентного синтеза, ПР – блок принятия решения, АД – блок акцептора действия, ПД – блок программы действия,  $B_i (i=1,2, \dots, n)$  – блоки  $n$ -составной системы.

Направления стрелок и сами стрелки взаимодействий мы опустили в некоторых местах на приведенном рисунке, но они подразумеваются.

Если не изучать строение этих блоков, то мы получаем функциональную систему в виде четырех «взаимодействующих» «черных ящиков». Имеются системные образования, содержащее пять или более аналогичных блоков, в частности, ААУ-системы А.А.Жданова [Толоконников, 2017], как это можно показать, имеют пять категорных блоков.

Основная идея П.К.Анохина состоит в том, что из совокупности систем может быть собрана новая система **только** при наличии системообразующего фактора, имеющего двойственную природу. С одной стороны, фиксируется результат для составной системы, с другой стороны, имеется некоторый «оператор», меняющий соответствующим образом каждую из систем (например, с помощью «выключения» некоторых степеней свободы, синапсов и т.п. и «включения» других степеней свободы), которые станут в результирующей системе подсистемами.

Итак, система по М.Месаровичу (отношение на множестве входов и выходов) моделируется категорной системой в виде отдельного полиграфа. Энергетические системы, содержащие по определению две подструктуры «человек-машина», моделируются категорной системой, состоящей из двух подсистем, биомаши́системы опираются на триаду «человек-машина-живое» и моделируются категорной системой, имеющей три подсистемы, функциональные системы по П.К.Анохину включают в обязательном порядке четыре блока, афферентный

синтез, решатель (блок принятия решения), акцептор результата действия и блок программы действий, моделируются категорной системой, содержащей четыре подсистемы. Перечисленные выше системы, являются частными случаями *n-составной категорной системы*, содержащей  $n=1,2,3,4,5,6,7\dots$  подсистем. Отметим, что категорные функциональные системы не просто обобщают известные системы, а явно выделяют в них системообразующий фактор, который во многих примерах систем (кроме функциональных систем) присутствует неявно в виде «целей» и тому подобного.

*n-составные категорные системы* формализуют понятие изоморфизма по П.К.Анохину в отношении естественного инварианта - числа необходимых подсистем, первого внутреннего уровня. Безусловно существуют и другие инварианты в том или ином классе подсистем. Если все инварианты совпадают, то мы должны получить полностью изоморфные, а не только подобные системы. Вопросы формализации «изоморфизма и иерархии систем» по П.К.Анохину с физиологическими примерами рассмотрены во второй части работы.

4.4. Данный раздел дает строгое понятие *системного подхода* на основе категорной теории систем и написан в целях возможного использования категорной теории систем для практических приложений.

Существует несколько десятков определений системы и, соответственно, близкое число, так называемых, системных подходов (математически обоснованные подходы мы не рассматриваем). В системных подходах, основанных на традиционных математических теориях систем в определении системы не учитывается системообразующий фактор, необходимость наличия которого для понятия системы обосновал П.К.Анохин. В категорной теории систем системообразующий фактор является ключевым, как и в теории функциональных и биомашсистем. Категорная теория систем даёт математически обоснованное строгое определение системного подхода, охватывающее, насколько известно автору, другие подходы, как частные случаи.

Назначение системного подхода состоит в методике построения систем (или изучения уже существующих систем), основывается, тем самым, на определении и свойствах систем.

Для системного подхода имеются две ситуации: изучить уже функционирующую систему и построить новую (желаемую, потребную) систему. Обе ситуации в системном подходе рассматриваются сначала в отношении системообразующего фактора системы или будущей системы и того результата, к которому стремится данная (или желаемая) система (для определенности далее говорим, в основном, о построении потребных систем).

Системный подход на основе категорной теории систем (далее просто "системный подход") опирается на *системную парадигму*: в окружающем мире, который моделируется категорной теорией систем, все объекты являются исключительно системами (подсистемами, которые тоже суть системы) и их

совокупностями. Парадигма детально рассмотрена во второй части работы и полностью аналогична известной по многотомному сочинению Н.Бурбаки теоретико-множественной парадигме, сводящей все объекты к множествам и подмножествам.

Системный подход в категорной теории систем состоит из двух этапов: во-первых, в определении систем, как будущих подсистем потребной системы (или подсистем уже существующей изучаемой системы) и формировании свёртки, которая указанные системы должна при своей реализации привести к желаемой системе и, во-вторых, в реализации (применении) на практике полученной свёртки к указанным системам.

Таким образом, краткое определение системного подхода состоит в **построении потребной категорной системы, на основе проводимого формирования (разработки, проектирования) свёртки и ее дальнейшего применения к выбранным необходимым системам, которые превращаются свёрткой в подсистемы потребной системы.**

Все действия методики на каждом ее шаге проходят на основе системообразующего фактора, изучения предметной области потребной системы и применения к формируемым ее фрагментам математических методов категорной теории систем.

На **первом шаге** методики системного подхода, поскольку потребная система является категорной склейкой, устанавливаются (проектируются) ее связи с другими системами. В идеале **все** её связи определяют систему однозначно (с точностью до изоморфизма) вместе с количеством иерархией и свойствами всех её подсистем. Аналог этому утверждению даёт стандартный факт теории категорий: "Учет  $\text{Hom}_C(Y, X)$  для всех  $Y$  несёт полную информацию об объекте  $X$  с точностью до изоморфизма" [Гельфанд, Манин, 1988].

Если такое определение удаётся, то задача решена, свёртка сформирована и можно приступить к реальному подбору необходимых будущих подсистем и применению к ним найденной свёртки.

На практике подобный идеал недостижим, поэтому на **втором шаге** после частичного определения внешних связей потребной системы с другими системами проводится определение наличия подсистем первого уровня (которые могут иметь свои подсистемы и так далее). Такое определение может быть основано как на математических следствиях наличия уже установленных связей на первом шаге методики, так и на непосредственном дальнейшем изучении предметной области потребной системы диктуемом системообразующим фактором. Для каждой выявленной подсистемы проводится определение ее системообразующего фактора, определение связей между подсистемами, а также с внешними системами и вышестоящей системой.

Данный фрагмент иерархии систем (наличие систем первого уровня) позволяет провести простую классификацию систем, отнести данную систему к



одному из видов  $n$ -составных систем, содержащих  $n$  систем первого уровня. Количество подсистем первого уровня является простейшим инвариантом для классификации систем. Изоморфные системы имеют одинаковое число подсистем первого уровня.

#### Примечание

Важный для теории биомашсистем и функциональных систем вопрос состоял [Черноиванов, 2017] в возможности их сведения друг к другу, однако, число подсистем первого уровня у биомашсистем равно трем ("человек, машина, живое"), а у функциональных систем - четырем (блоки "афферентного синтеза, принятия решения, акцептора результата действия и программы действий"), так что изоморфизм, желательный при указанном сведении, не имеет места.

Дальнейшие шаги методики, если они еще нужны, итерируют второй шаг до момента приемлемой для практики точности.

Методика системного подхода требует *завершения* построения свёртки для категорной системы со всеми её связями и подсистемами. Такое завершение даёт возможность, применяя свёртку провести полную реализацию для данной потребной системы всех мероприятий, предписываемых системным подходом.

На этом описание методики системного подхода в категорной теории систем мы заканчиваем. Мы вернёмся к системному подходу и его реализации в разделе посвященном системе гемостаза во второй части работы.

**4.5. Редукционизм и категорная теория систем.** Мы уже касались во введении возможности сведения в каком-либо смысле одной теории к другой, то есть *редукционизма*, в данном пункте, опираясь на категорную теорию систем раскроем это понятие более детально, дадим определение физической системы и ответим на вопросы Н.Василюка о возможных описаниях взаимодействия двух системных структур (физиологической и физической) на одном субстрате живого организма.

Можно ли свести химию к физике, есть ли в физической теории объяснения физиологическим законам и нельзя ли их «вывести» из физики, такие и подобные вопросы относят к проблеме редукционизма, то есть сведения одной теории к другой. На наш взгляд физическую (химическую, биологическую и так далее) теорию следует представлять как теорию физических (химических, биологических и так далее) систем. Это согласуется с принятым в настоящее время представлением о том, что теория систем - это наука наук (см., например, [Yi-Lin Forrest, 2018]). Таким образом, ответ на вопросы о сведении одной науки к другой не может быть решен на уровне отдельных наук, он есть вопрос теории систем. Именно в теории систем мы должны определиться с тем, что такое физическая или химическая системы,

заодно возникнет возможность построить морфизмы одной теории в другую и отвечать на их основе на вопросы о взаимодействии систем, в том числе, о включении одной системы в другую и несводимости одной теории к другой.

Этот вопрос находит решение в категорной теории систем.

Для определенности ограничимся сейчас языками первого порядка, ряд обобщений на основе других логик или исчислений помимо классической логики оказывается в принципе несложным.

Пусть задана формальная теория категорных склеек, простыми, элементарными (несоставными) системами мы называем склейки, опирающиеся непосредственно на функциональные и предикатные символы без использования свёрток (полная склейка простой системы имеет пустые внешние свертки и пустые внутренние склейки и свёртки). Например, для случая систем материальных точек в механике сами материальные точки отвечают простым системам в категорной системе. Здесь мы затрагиваем вопрос интерпретации формальной теории, сопоставления переменным теории некоторых объектов, в частности систем в виде материальных точек. Отметим, что даже если вопрос интерпретации переменных решен, сами простые системы интерпретации еще не определяют какая теория (система) на них далее строится (физическая, химическая и тому подобное). Простые системы по словам П.К.Анохина обладают многочисленными "степенями свободы", которые должны быть ограничены для составной системы с помощью ресурсов системообразующего фактора, определяемого как результат, которого составная система должна достигнуть. Таким образом, всевозможные варианты движения (изменений и тому подобное) простых систем образующие хаос возможных движений приводятся в порядок именно системообразующим фактором, заставляющим простые системы, оказавшиеся в составе составной системы, эволюционировать вполне упорядоченным, а не произвольным (хаотическим) способом. Систообразующим фактором для систем материальных точек в механике (классической или квантовой, в квантовой теории поля или стандартной модели рассматриваются не частицы, а поля) является **принцип наименьшего действия**. Из него выводятся уравнения движения (Гамильтона, Шредингера), которым удовлетворяет эволюция каждой из частиц, как простых систем внутри составной системы  $N$  материальных точек.

Принцип наименьшего действия имеет различные выражения для классической и квантовой механик, как мы условились, уточняем - классической и квантовой систем материальных точек, поэтому эти системы различны, хотя и имеют одни и те же простые подсистемы. Окончательное решение вопросов соотношения классической и квантовой механик проводится в рамках системного рассмотрения этих двух различных категорных систем. Соотношение квантовой и классической механик как категорных систем мы проводим в отдельной работе.

Поскольку в понятие системы входит системообразующий фактор, а в

обоих упомянутых механиках для их построения достаточно принципа наименьшего действия, то физическую теорию (теорию физических систем) под названием *квантовая механика* или *классическая механика  $N$  материальных точек* в рамках теории категорных систем можно точно определить как категорную склейку с простыми системами в виде  $N$  материальных точек и системообразующим фактором в виде принципа наименьшего действия.

Обобщая этот пример физических теорий, определяем физическую теорию как теорию физических систем.

### Определение

**Физическая система** является моделью, описывающей предметную область формальной категорной склейки с системообразующим фактором в виде принципа наименьшего действия.

Для конкретизации физической теории необходимо уточнять набор функциональных и предикатных символов склейки и выбирать объект интерпретации переменных и стрелок формальной склейки.

Химические системы выделяются как системы с другим системообразующим фактором, однако с требованием, чтобы как в квантовой химии, не нарушался принцип наименьшего действия. В таком случае химическая теория (например, по Бейдеру в его подходе «атомов в молекулах») отвечает системообразующему фактору для квантовой механики частиц и сводится к физике, что можно изложить более точно. Однако, в химии используются многочисленные приближения, например, системы углеводов ограничиваются рассмотрением ковалентных связей изображаемых в химических формулах отрезками между именами атомов. В рамках категорной химии мы можем ставить вопрос о том какой системообразующий фактор соответствует таким системам углеводов, поскольку уравнение Шредингера для этого приближения не выполняется и не действует системообразующий фактор в виде принципа наименьшего действия квантовой механики. Тем не менее, имеются теории систем углеводов и они не сводимы к квантовой механике, что можно доказывать как строго математический факт, а не вдаваться в общефилософские рассуждения редукционизма. Этих вопросов мы коснемся в разделе категорной химии во второй части работы. Ответ на вопросы Н.Василюка о способах возможного описания взаимодействия на субстрате одного и того же организма функциональных систем и физических систем [Василюк, 2021] имеется в категорной теории систем.

Подобно тому как строятся алгебраические теории в различных категориях, а не только в *Set*, можно говорить об универсуме физических теорий и уже в этом универсуме строить теорию функциональных систем, поскольку физические законы для организмов никто не берётся отменять, но

системообразующие факторы функциональных систем несут свои законы физиологии, которые таким образом, вообще говоря, не сводятся к законам физическим.

Другими словами ответ на вопросы Н.Василюка состоит в следующем. Модель организма обычно представляет собой систему материальных точек (атомов, молекул, составленных из атомов, и так далее), подчиняющихся квантовой механике. Последнюю моделируем категорной склейкой с системообразующим фактором в виде принципа наименьшего действия. Рассматриваем универсум таких квантовомеханических систем. Аналогично тому, как алгебраическую теорию мы интерпретировали в различных категориях, отличных от *Set*, интерпретируем категорную функциональную систему для организма со своими системообразующими факторами в динамике системоквантов по К.В.Судакову в универсуме физических систем. Подобная модель даёт инструментарий для описания свойств и взаимодействия функциональных и физических систем организма. Точные расчеты во многом весьма трудны, но представление о сути феномена на строго математической основе мы получили в рамках категорной теории систем. Как мы знаем [Анохин, 2018], теория функциональных систем, по большому счету, была инструментом, с помощью которого П.К.Анохин исследовал проблему сознания или, более широко, проблему Дарвина-Павлова, главную проблему, решению которой он посвятил свою жизнь. Считается, что функциональные системы в существенном охватывают проблему сознания. Так что обсуждаемые функционально-физические системы могут пролить свет со своей стороны на проблему сознания. Этой проблемы мы кратко коснемся в следующем пункте, в том числе и потому, что все (!) доклады на Совещании (труды которого представлены данным выпуском журнала Биомашсистемы) непосредственно или косвенно касаются проблематики сознания.

**4.6. Функционально-физические категорные системы и элементы сознания.** Наличие роботов, которые познают мир и могут обеспечивать за счёт этого свое выживание (см., например, [Финн, 2021], работы Е.Е.Витяева и А.А.Жданова в данном выпуске журнала) и при этом никто не говорит о наличии у этих роботов сознания, *доказывает*, что сознание для выживания, в принципе, не нужно. Здесь уже можно не ссылаться на вирусы, бактерии и мелких насекомых (необщественных), которые по сравнению с указанными аниматами крайне сложны и до конца еще далеко не изучены. С другой стороны оснащенные сознанием высшие организмы - несоизмеримо более мощные в отношении поисков не только алгоритмов выживания, но и улучшения условий своего существования. Поиск элементов сознания логичнее искать не там, где имеются решения без его участия, а там где оно играет ключевую роль. Известные решения поисков и реализации алгоритмов поведения автономных аниматов (см., [Финн, 2021], работы Е.Е.Витяева и А.А.Жданова в данном выпуске журнала, работы других авторов) *являются частными случаями*

следующего универсального подхода. Отметим, что аниматы выполняют команды, задаваемые их управляющими устройствами в виде закодированных тем или иным способом алгоритмов (исчислений) поведения. Сами указанные управляющие устройства аниматов, действуя с помощью различных технических решений, выдают алгоритмы поведения и отличаются лишь тем или иным классом достижимых ими совокупностей этих алгоритмов. Предложенный автором в 2012 году [Толоконников, 2012], [Толоконников, 2014] универсальный зомби-агент искусственного интеллекта опирается на теоремы об универсальных исчислениях (Э.Пост, С.Ю.Маслов, Ю.В.Матиясевич), принципиально не пропуская ни одного возможного алгоритма или исчисления, генерирует их и служит исчерпывающим решением для возможных технических решений какими бы они ни были. Для генерирования алгоритмов и исчислений зомби-агенту не нужен внешний мир, который лишь направляет генерирование в нужном для заданной предметной области направлении. Этим качеством зомби-агент *принципиально* отличается от указанных решений (см., [Финн, 2021], работы Е.Е.Витяева и А.А.Жданова в данном выпуске журнала). Следующая схема из работы [Tolokonnikov, 2021], в которой интегрированы функциональная система и универсальный зомби-агент даёт в принципе исчерпывающее решение для создания человека-киборга: на основе каких-то потребностей в афферентном синтезе и принятии решения формируется «образ» потребного результата, его параметры считываются в память универсального зомби-агента, который со 100% -м успехом добивается желаемого (если это желаемое существует или может существовать и ресурсы агенту предоставлены).

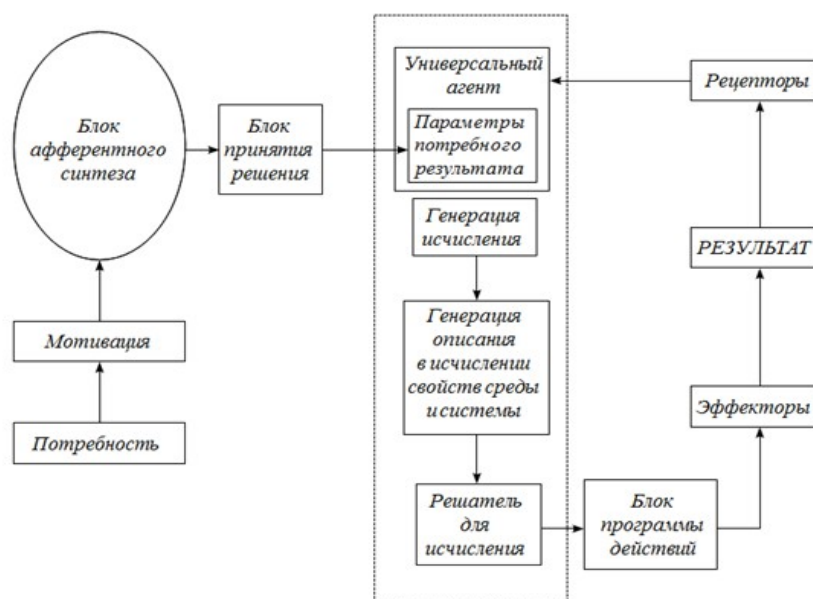


Рис.8. Функциональная система, интегрированная с универсальным зомби-агентом

Итак, во-первых, из приведённой схемы следует, что для аниматов достаточно заложить в их системообразующий фактор результат в виде закодированного «выжить и размножиться», а универсальный зомби-агент сделает всё остальное. Именно поэтому тут вполне можно обойтись без вкладывания сознания в анимат, сконцентрировав усилия на технических вопросах реализации и функционирования универсального зомби-агента. По-видимому, бессознательные бактерии успешно существуют на земном шаре в несметных количествах, что доказывает (если предположить что доказано отсутствие у них сознания, что, вообще говоря, спорно, если вспомнить эмоциональные рассуждения Р. Пенроуза, обсуждающего одноклеточное животное парамецию...) эффективность такого подхода к аниматам.

Во-вторых, из приведённой схемы рис. 8 следует, что, освободив высшее животное от всего прочего, кроме совершаемого в афферентном синтезе поиска и выработки решений, мы сконцентрируем на этих подсистемах функциональной системы поиск и самого сознания, и его ключевых атрибутов. Стоит отметить, что тактически может оказаться, что проявления сознания легче обнаружить по его участию в программе действий, получении сигналов извне и тому подобному, но, так сказать, «место концентрирования» сознания находится именно в указанных блоках функциональной системы. Именно на это указывает схема рис. 8.

Вторая часть данной статьи размещается в №2 пятого тома журнала Биомашсистемы.

### *Литература*

Анохин К.В. Теория функциональных систем: теоретические и экспериментальные исследования высших функций мозга, *Биомашсистемы*, 2018, т.2, №4, С. 31-40.

Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. 4-е изд., М., Наука, 1984, 600 с.

Бодров В.А., Орлов В.Я. Психология и надежность: человек в системах управления техникой. М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 1998, 288 с.

Васильев С.Н., Метод сравнения в анализе систем. I, *Дифференц. уравнения*, 1981, том 17, № 9. С. 1562–1573.

Васильев С.Н. Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунов Б.Е. Интеллектуальное управление динамическими системами, М., 2000. 352 с.

Васильев С.Н., Дружинин А.Э., Морозов Н.Ю. Вывод условий сохранения свойств математических моделей, *ДАН*, 2015. том 465. № 1. С. 14–19.

Василюк Н.В. О взаимодействии на одном субстрате организма функциональных и физических систем. *Биомашсистемы*, Т.5, №2, 2021 (в печати).

Васюков В.Л. Логический плюрализм и неклассическая теория категорий,

*Логические исследования.* Вып. 18. М.-СПб., 2012. С.60-76.

Гельфанд С.И., Манин Ю.И. Методы гомологической алгебры. Введение в теорию когомологий и производные категории, М., Наука, 1988, 416 с.

Голубев Ю.Ф. Нейронные сети в мехатронике, *Фунд. и прикл. Математика*, 2005, Т. 11, № 8, С. 81-103.

Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики, М., Наука, 1979, 412 с.

Жевлаков К.А., Слинко А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным, М., Наука, 1978.

Кириллов А.А. Локальные алгебры Ли, *УМН*, Т. 31, № 4, 1976, С. 57–76.

Кузнецов О.П., Базенков Н.И., Болдышев Б.А., Жиликова Л.Ю., Куливец С.Г., Чистопольский И.А. Асинхронная дискретная модель химических взаимодействий в простых нейронных системах, *Искусственный интеллект и принятие решений*. 2018, № 2, С. 3-20.

Кок А., Рейес Г.Э. Доктрины в категорной логике, с. 289-319 в кн. *Справочная книга по математической логике*, ч.1, М., Наука, 1982, 392 с.

Ломов Б. Ф. Человек и техника: Очерки инженерной психологии. М., Радио и связь, 1966, 464 с.

Мальцев А.И. Алгебраические системы, М., Наука, 1970, 392 с.

Мальцев А.И. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями, *Матем. Сб.*, 26, №1, 1950, С.19-33.

Матросов В.М., Метод сравнения в динамике систем. I, *Дифференц. уравнения*, Т. 10, № 9, 1974, С. 1547–1559.

Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. Метод сравнения в математической теории систем, Новосибирск, Наука, 1980. 480 с.

Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М., Наука, 1971, 322 с.

Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических многоуровневых систем, Москва, Мир, 1973, 344 с.

Месарович М., Такахара И. Общая теория систем: математические основы. М., Мир, 1978, 311с.

Осовский С. Нейронные сети для обработки информации. М., Горячая Линия-Телеком, 2017, 448 с.

Порецкий П.С. О способах решения логических равенств и об одном обратном способе математической логики, Казань, 1884, переиздано под ред. В.И.Лобанова в 2011 году («Логические равенства», Москва, «Русская правда», 2011г., 158 с.).

Сергеев С.Ф. Введение в инженерную психологию и эргономику иммерсивных сред. Спб., Изд-во СПбГУ ИТМО, 2011, 258 с.

Сидоров А.В. Эволюция межклеточной коммуникации и структурная организация мозга, *Журнал эволюционной биохимии и физиологии*, 2012, т. 48, № 4, С. 323-328.

Толоконников Г.К., «Вычислимые и невычислимые физические теории по Р.Пенроузу. Часть 3, Прикл. матем., квант. теория и программ., 2012г., т.9, №4,

стр.3-294.

Толоконников Г.К. Универсальный зомби и виртуальная реальность. В Современные системы искусственного интеллекта и их приложения в науке. Материалы II Всероссийской научной интернет-конференции, Казань, 14 мая 2014г. С. 88-102.

Толоконников Г.К. Математические основы теории биомашсистем. В кн. Биомашсистемы. Теория и приложения, Том 1, М., Росинформагротех, 2016, С. 31-213.

Толоконников Г.К. Математическая категорная теория систем. В кн. Биомашсистемы. Теория и приложения, Том 2, М., Росинформагротех, 2016, С. 22-114.

Толоконников Г.К. Манифест: нейрографы, нейрокатегории и категорные склейки, *Биомашсистемы*, Т. 1, № 1, 2017, С. 59-146.

Толоконников Г.К. Категорные модели искусственных нейронных сетей и системной информации, категорные склейки и парадигма категорной теории систем, *Биомашсистемы*, т.2, №1, 2018, С. 127-174.

Толоконников Г.К. О классификации алгебр функций, близких к ассоциативным, с помощью метода функциональных уравнений, *Матем. заметки*, Т. 39, № 6, 1986, С. 806–818.

Толоконников Г.К. Функциональные уравнения, интеграл Фейнмана и универсальные обертывающие алгебры Ли, *Изв. вузов. Матем.*, 1987, № 1, 79–82.

Толоконников Г.К., Широков Ю.М. Ассоциативная алгебра обобщенных функций, замкнутая относительно дифференцирования и взятия первообразной, *ТМФ*, Т. 46, № 3, 1981, С. 305–309

Финн В.К. Интеллект, информационное общество, гуманитарное знание и образование, М., Ленанд, 2021, 464 с.

Черноиванов В.И. Биомашсистемы: возникновение, развитие и перспективы. *Биомашсистемы*. Т. 1, №1, 2017, С. 7-60.

Чёрч А., Введение в математическую логику, Т. 1, М., 1960.

Широков Ю.М. Аксиоматика гамильтоновых теорий общего вида, включающих классическую и квантовую как частные случаи, *ТМФ*, Т. 25, № 3 1975, С. 307–312.

Широков Ф.В. На пути к нейрокомпьютерам. Физические и математические модели нейронных сетей. М., ВИНТИ, 1990, С. 229-315.

Abramsky S., Coecke B. Categorical quantum mechanics, *Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures: Quantum Logic*. ELSVIER. North-Holland. 2009, P. 261-324.

Anastassiou C.A. and others, Ephaptic coupling of cortical neurons, *Nature neuroscience*, 2011, no.1, P. 1-8.

Baez J.C., Erbele J. Categories in control, *Theory Appl. Categ.*, v. 30, 2015, P. 836-881



Burroni A. T-categories (categories dans un triple). *Cahiers Topologie Géom. Différentielle*, 12, 1971, 215–321.

Doring A., Isham C.J. A topos foundation for theories of Physics, *Journ.Math.Phys.* 49. No. 5, 2008.

Ehresmann C. Catégories structurées. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), 80, 1963, P. 349–426.

Fiore T.M. Pseudo algebras and pseudo double categories, *Journ. Homotopy and Related Struct.*, vol. 2(2), 2007, P. 119–170.

Fong B. Decorated corelations, *Theory Appl. Categ.*, v. 33, 2018, 608-643

Gambino F., Kock J. Double adjunctions and free monads, *Cahiers de Top. et Géom. Diff.* Vol. LIII-4, 2012, P. 242-307.

Garner R. Double clubs. *Cahiers Topologie Géom. Différentielle*, 47(4), 2006, P. 261–317.

Garner R. Polycategories via pseudo-distributive laws, *Adv. Math.* 218, 2008, no. 3, P. 781-827.

Grandis M., Pare R. An introduction to multiple categories *Cahiers de Top. et Géom. Diff.* Vol. v.57, no 2, 2016, P. 103-159.

Grandis M. Higher dimensional categories: from double to multiple categories, Издательство: World Scientific Publishing, 2020, 536 p.

Graves D. Props for involutive monoids and involutive bimonoids, *Theory and Applications of Categories*, Vol. 35, No. 42, 2020, P. 1564-1575.

Hatcher W.S. The logical foundations of mathematics, Perg.Pr., 1982, 320 p.

Hermida C. Representable multicategories. *Adv. Math.*, 151(2), 2000, P. 164–225.

Hu P., Kriz I. Conformal field theory and elliptic cohomology, *Adv. Math.* 189, no. 2, 2004, P. 325–412.

Kosłowski J. A monadic approach to polycategories, *Theory and Applications of Categories*, Vol. 14, No. 7, 2005, P. 125-156.

Lawvere F.V. Functorial semantics of algebraic theories, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1963, v. 50, P. 869-872.

Leinster L. Higher operads, higher categories, volume 298 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

Kock J. Frobenius algebras and 2D Topological Quantum Fields Theories, Cambridge Univ. Press, 2003.

Mac Lane S. Categorical algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.* 1965, v.71, P. 40-106.

Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician, Springer, Berlin, 2013.

Rumelhart D.E., McClelland J.L. Parallel distributed processing. Explorations in the Microstructure of Cognition, vol.1, Foundations, MIT Press, 1987, XX, 547 pp.

Shulman M. The 2-Chu-Dialectica construction and the polycategory of multivariable adjunctions, *Theory and Applications of Categories*, Vol. 35, No. 4, 2020, P. 89-136.

Soboleff S. L. Le problème de Cauchy dans l'espace des fonctionnelles, *C.R. Acad. Sci. URSS*, V. 3, no. 7, 1935, P. 291–294.

Szabo M.E. Polycategories. *Communications in Algebra*, 3(8), 1975, P. 663-689.

Tolokonnikov G.K. Convolution Polycategories and Categorical Splices for Modeling Neural Networks, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol 938, 2020, Springer, P. 259-267.

Tolokonnikov G.K. The Use of Convolutional Polycategories in Problems of Artificial Intelligence. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, v. 1126. Springer, 2020, P. 23-32.

Tolokonnikov G.K. Functional Systems Integrated with a Universal Agent of Artificial Intelligence and Higher Neurocategories, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, volume 1315, 2021, pp. 3-12, DOI <https://doi.org/10.1007/978-3-030-67133-4>.

Yi-Lin Forrest J. *General Systems Theory. Foundation, Intuition and Applications in Business Decision Making*, IFSR International Series in Systems Science and Systems Engineering, V. 32, Springer, 2018, 370 p.

### ***Categorical splices, categorical systems and their applications in algebraic biology. I***

Tolokonnikov G.K.

Ph.D., FNATS VIM, Moscow, Russia, [admci@mail.ru](mailto:admci@mail.ru)

**Annotation.** *The work is devoted to a new section of categorical mathematics - the theory of categorical splices and its applications in the general theory of systems. The language of categorical splices, as shown in the work, uniformly describes the basic algebraic structures from universal algebras to polycategories and higher categories and gives examples of new algebraic structures used, in particular, in general systems theory. Categorical splices are introduced as formal logical theories with models in various universes, including various categories, including those other than the category of sets. Szabo polycategories and convolutional polycategories introduced by the author earlier are private models of categorical splices. In addition to new algebraic structures, the theory of categorical splices offers a description of well-known category dualities and examples of new types of dualities, including dualities, in fact, the categorical splices itself. Among the applications there is a representation of traditional artificial neural networks of arbitrary topology by convolutional polycategories, in which dualities are used, in particular, to clarify and substantiate the well-known Osovsky formulas for calculating gradients in the backpropagation method. A categorical model of a neuron is proposed, which takes into account not only its spike activity, but also other types of intercellular communication and neural networks with the topology of higher categorical adhesions, which far generalizes the types of neuron connections in traditional artificial neural networks. The formalization of the theory of functional systems of P.K. Anokhin-K.V. Sudakov proposed earlier by the author is axiomatized with the help of categorical splices and is proposed in the form of categorical theory of systems as a general theory of systems. The categorical theory of systems includes a formalized system-forming factor, the principles of isomorphism and hierarchy, postulated at the intuitive level for general systems by P.K. Anokhin. The categorical theory of systems, based on the strict definition of the system, gives*

*an exhaustive and strict concept of the systems approach, demonstrated in the work on the example of the agrarian biomachsystem. In this work, a categorical system of hemostasis has been constructed, in which many ambiguities and contradictions of the usual intuitive constructions of functional systems by physiologists have been overcome. Numerous diagrams of functional systems, proposed in the works of physiologists of the school of P.K. Anokhin-K.V. Sudakov, have been refined to categorical diagrams. Similar work has been done for chemical formulas and the model "atoms in molecules" according to Bader, the emerging direction of category chemistry is used for the category modeling of DNA and RNA molecules. Rigorous algebraic models of biomolecules have been proposed as new methods for algebraic biology, in which, thus, it becomes possible to take into account the algebraic properties of biomolecules for working with the genome. The content of the work, including systems research, is a continuation of work in the direction of the problem of finding formalisms for algebras of new observable physical theories. Initially, this problem, initiated by a number of questions in quantum field theory, was posed for Hamiltonian mechanics by the author's scientific advisor Yuri Mikhailovich Shirokov, who gave the axioms of such mechanics and inspired the author to work on this problem. Later, the same problem was posed by R. Penrose in the context of the search for formalisms of new physical theories more suitable than the known formalisms for describing the phenomenon of consciousness.*

**Keywords:** *Hamiltonian mechanics, categories, polycategories, categorical splices, categorical systems theory, duality, functional and biomachsystems, hemostasis, algebraic biology*

### **Referencies**

Anokhin K.V. Teoriya funktsionalnikh sistem: teoreticheskie i eksperimentalnie issledovaniya vishikh funktsiy mozga [Theory of functional systems: theoretical and experimental studies of the higher functions of the brain], *Biomashsystems*, 2018, vol. 2, no. 4, pp. 31-40.

Bogolyubov N.N., Shirkov D.V. Vvedenie v teoriyu kvantovannikh poley [Introduction to the theory of quantized fields]. 4th ed., M., Nauka, 1984, 600 p.

Bodrov V.A., Orlov V.Ya. Psikhologiya i nadezhnost: chelovek v sistemakh upravleniya tekhnikoy [Psychology and reliability: man in technology control systems]. Moscow, Institute of Psychology RAS, 1998, 288 p.

Vasiliev S.N., Metod sravneniya v analize sistem. I [Comparison method in systems analysis]. I, *Differential Uravn.*, 1981, Volume 17, No. 9. P. 1562–1573.

Vasiliev S.N. Zherlov A.K., Fedosov E.A., Fedunov B.E. Intellectnoe upravlenie dinamicheskimi sistemami [Intelligent control of dynamic systems], M., 2000. 352 p.

Vasiliev S.N., Druzhinin A.E., Morozov N.Yu. Vivod usloviya sokhraneniya svoystv matematicheskikh modeley [Derivation of conditions for the conservation of properties of mathematical models], *DAN*, 2015. V. 465. No. 1. P. 14–19.

Vasilyuk N.V. O vzaimodeistvii na odnom substrate organizma funktsionalnikh i fizicheskikh sistem [On the interaction of functional and physical systems on one substrate of the organism]. *Biomashsystems*, Vol.5, No. 2, 2021 (in press).

Vasyukov V.L. Logichesky pluralizm i neklassicheskaya teoriya kategory [Logical pluralism and non-classical category theory], *Logical Investigations*. Issue 18. M.-SPb., 2012, P. 60-76.

Gelfand S.I., Manin Yu.I. Metodi gomologicheskoy algebri [Homological algebra methods. Introduction to the theory of cohomology and derived categories], M., Nauka, 1988, 416 p.

Golubev Yu.F. Neironnie seti v mekhatronike [Neural networks in mechatronics], *Fund. and app. Mathematics*, 2005, V. 11, No. 8, P. 81-103.

Dirac P.A.M. Printsipi kvantovoi mekhaniki [Principles of quantum mechanics], M., Nauka, 1979, 412 p.

Zhevnikov K.A., Slinko A.M., Shestakov I.P., Shirshov A.I. Koltsa blizkie k assotsiativnim [Rings close to associative], M., Nauka, 1978.

Kirillov A.A. Lokalnie algebri Li [Local Lie Algebras], *Uspekhi Mat.Nauk*, Vol. 31, No. 4, 1976, P. 57–76.

Kuznetsov O.P., Bazenkov N.I., Boldyshev B.A., Zhilyakova L.Yu., Kulivets S.G., Chistopolskiy I.A. Asinkhronnaya diskretnaya model khimicheskikh vzaimodeistviy v prostakh neironnikh sistemakh [Asynchronous Discrete Model of Chemical Interactions in Simple Neural Systems], *Artificial Intelligence and Decision Making*. 2018, No. 2, P. 3-20.

Kok A., Reyes G.E. Doktrini v kategornoi logike [Doctrines in Category Logic], p. 289-319 in the book. Reference book on mathematical logic, part 1, M., Nauka, 1982, 392 p.

Lomov B.F. Chelovek i tekhnika: Ocherki ingenernoi psikhologii [Man and technology: Essays in engineering psychology]. M., Radio and communication, 1966, 464 p.

Maltsev A.I. Algebraicheskie sistemi [Algebraic systems], M., Nauka, 1970, 392 pp.

Maltsev A.I. Ob algebrakh s opredelyayushimi sootnosheniyami [On algebras with identical defining relations], *Mat. Sat*, 26, No. 1, 1950, S. 19-33.

Matrosov V.M. Metod sravneniya v dinamicheskikh sistemakh [Comparison method in the dynamics of systems. I], *Differential Equations*, vol. 10, no. 9, 1974, P. 1547–1559.

Matrosov V.M., Anapolskiy L.Yu., Vasiliev S.N. Metod sravneniya v matematicheskoi teorii sistem [Comparison Method in Mathematical System Theory], Novosibirsk, Nauka, 1980.480 p.

Mendelssohn E. Vvedenie v matematicheskuyu logiku [Introduction to mathematical logic]. M., Nauka, 1971, 322 p.

Mesarovich M., Mako D., Takahara I. Teoriya ierarkhicheskikh mnogourovnevnykh sistem [Theory of hierarchical multilevel systems], Moscow, Mir, 1973, 344 p.

Mesarovich M., Takahara I. Obschaya teoriya sistem: matematicheskie osnovi [General theory of systems: mathematical foundations]. M., Mir, 1978, 311 p.

Osovsky S. Neironnie seti dlya obrabotki informatsii [Neural networks for information processing]. M., Hot Line-Telecom, 2017, 448 p.

Poretsky P.S. O sposobakh resheniya logicheskikh ravenstv I ob odnom obratnom sposobe matematicheskoi logiki [On the methods of solving logical equalities and on one reverse method of mathematical logic], Kazan, 1884, republished under the editorship of V.I. Lobanov in 2011 ("Logical Equalities", Moscow, "Russian Truth", 2011, 158 p.).

Sergeev S.F. Vvedenie v ingenernyuyu psikhologiyu i ergonomiku immersivnykh sred [An introduction to engineering psychology and the ergonomics of immersive environments]. SPb., Publishing house of SPbGU ITMO, 2011, 258 p.

Sidorov A.V. Evolutsiya mezhekletchnoi kommunikatsii i strukturnaya organizatsiya mozga [The evolution of intercellular communication and the structural organization of the brain], *Journal of Evolutionary Biochemistry and Physiology*, 2012, vol. 48, no. 4, P. 323-328.

Tolokonnikov G.K. Vichislimie i nevichislimie fizicheskie teorii po R.Penrouzu [Computable and non-computable physical theories according to R. Penrose]. Part 3,

App. math., quantum. theory and programs., 2012, vol. 9, no. 4, p. 3-294.

Tolokonnikov G.K. Universalniy zombi i virtualnaya realnost [Universal zombie and virtual reality]. B Modern systems of artificial intelligence and their applications in science. Materials of the II All-Russian Scientific Internet Conference, Kazan, May 14, 2014. S. 88-102.

Tolokonnikov G.K. Matematicheskie osnovi teorii biomashsistem [Mathematical foundations of the theory of biomachsystems]. In the book. Biomachsystems. Theory and applications, V. 1, M., Rosinformagrotekh, 2016, P. 31-213.

Tolokonnikov G.K. Matematicheskaya kategornaya teoriya sistem [Mathematical categorical theory of systems]. In the book. Biomachsystems. Theory and applications, V. 2, M., Rosinformagrotekh, 2016, P. 22-114.

Tolokonnikov G.K. Manifest: neirografi, neirokategorii i kategornie kleiki [Manifest: neurographs, neurocategories and categorical splices], *Biomachsystems*, vol. 1, no. 1, 2017, P. 59-

146.

Tolokonnikov G.K. Kategornye modeli iskusstvennykh neironnykh setey i sistemnoi informatsii, rftegornye skleiki i paradigma kategornoi teorii sistem [Categorical models of artificial neural networks and system information, categorical splices and the paradigm of categorical systems theory], *Biomashsystems*, vol. 2, No. 1, 2018, P. 127-174.

Tolokonnikov G.K. O klassifikatsii algebr funktsii blizkikh k assotsiativnim s pomoshyu metoda funktsionalnykh uravnenii [On the classification of algebras of functions close to associative ones using the method of functional equations], *Mat. Notes*, Vol. 39, No. 6, 1986, P. 806–818.

Tolokonnikov G.K. Funktsionalnye uravneniya , integral Feinmana I universalniye obyertivayushie algebr Li [Functional equations, the Feynman integral, and universal enveloping Lie algebras], *Izv. universities. Mat.*, 1987, no. 1, P. 79–82.

Tolokonnikov G.K., Shirokov Yu.M. Assotsiativnaya algebra obobshennikh funktsii zamknutaya otnositelno differentsirovaniya I vzyatiya pervoobraznoi [Associative algebra of generalized functions, closed under differentiation and taking antiderivatives], *TMF*, V. 46, no. 3, 1981, pp. 305–309.

Finn V.K. Intellect, informatsionnoe obshestvo, gumanitarnoye znanie i obrazovanie [Intelligence, information society, humanitarian knowledge and education], M., Lenand, 2021, 464p.

Chernoivanov V.I. Biomashsistemi: vzniknovenie, razvitie I perspektivi [Biomachystems: origin, development and prospects]. *Biomachsystems*. T. 1, No. 1, 2017, pp. 7-60.

Church A. Vvedenie v matematicheskuyu logiku [Introduction to Mathematical Logic], Vol. 1, Moscow, 1960.

Shirokov Yu.M. Aksiomatika gamiltonovikh teorii obshego vida vkluchayushikh klassicheskuyu I kvantovuyu kak chastnie sluchai [Axiomatics of Hamiltonian theories of general form, including classical and quantum as special cases], *TMF*, V. 25, No. 3 1975, pp. 307–312.

Shirokov F.V. Na puti k neirokompyuteram, fizicheskie I matematicheskie modeli neironnykh setey [Towards neurocomputers. Physical and mathematical models of neural networks]. M., VINITI, 1990, P. 229-315.

Abramsky S., Coecke B. Categorical quantum mechanics, *Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures: Quantum Logic*. ELSVIER. North-Holland. 2009, P. 261-324.

Anastassiou C.A. and others, Ephaptic coupling of cortical neurons, *Nature neuroscience*, 2011, no.1, P. 1-8.

Baez J.C., Erbele J. Categories in control, *Theory Appl. Categ.*, v. 30, 2015, P. 836-881

Burroni A. T-cat'egories (cat'egories dans un triple). *Cahiers Topologie Géom. Différentielle*, 12, 1971, 215–321.

Doring A., Isham C.J. A topos foundation for theories of Physics, *Journ.Math.Phys.* 49. No. 5, 2008.

Ehresmann C. Catégories structurées. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), 80, 1963, P. 349–426.

Fiore T.M. Pseudo algebras and pseudo double categories, *Journ. Homotopy and Related Struct.*, vol. 2(2), 2007, P. 119–170.

Fong B. Decorated corelations, *Theory Appl. Categ.*, v. 33, 2018, 608-643

Gambino F., Kock J. Double adjunctions and free monads, *Cahiers de Top. et Géom. Diff.* Vol. LIII-4, 2012, P. 242-307.

Garner R. Double clubs. *Cahiers Topologie Géom. Différentielle*, 47(4), 2006, P. 261–317.

Garner R. Polycategories via pseudo-distributive laws, *Adv. Math.* 218, 2008, no. 3, P. 781-827.

Grandis M., Pare R. An introduction to multiple categories *Cahiers de Top. et Géom. Diff.* Vol. v.57, no 2, 2016, P. 103-159.

Grandis M. Higher dimensional categories: from double to multiple categories, Издательство: World Scientific Publishing, 2020, 536 p.

Graves D. Props for involutive monoids and involutive bimonoids, *Theory and Applications of Categories*, Vol. 35, No. 42, 2020, P. 1564-1575.

Hatcher W.S. *The logical foundations of mathematics*, Perg.Pr., 1982, 320 p.

Hermida C. Representable multicategories. *Adv. Math.*, 151(2), 2000, P. 164–225.

Hu P., Kriz I. Conformal field theory and elliptic cohomology, *Adv. Math.* 189, no. 2, 2004, P. 325–412.

Kosłowski J. A monadic approach to polycategories, *Theory and Applications of Categories*, Vol. 14, No. 7, 2005, P. 125-156.

Lawvere F.V. Functorial semantics of algebraic theories, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1963, v. 50, P. 869-872.

Leinster L. *Higher operads, higher categories*, volume 298 of London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

Kock J. *Frobenius algebras and 2D Topological Quantum Fields Theories*, Cambridge Univ. Press, 2003.

Mac Lane S. Categorical algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.* 1965, v.71, P. 40-106.

Mac Lane S. *Categories for the Working Mathematician*, Springer, Berlin, 2013.

Rumelhart D.E., McClelland J.L. *Parallel distributed processing. Explorations in the Microstructure of Cognition*, vol.1, Foundations, MIT Press, 1987, XX, 547 pp.

Shulman M. The 2-Chu-Dialectica construction and the polycategory of multivariable adjunctions, *Theory and Applications of Categories*, Vol. 35, No. 4, 2020, P. 89-136.

Soboleff S. L. Le problème de Cauchy dans l'espace des fonctionnelles, *C.R. Acad. Sci. URSS*, V. 3, no. 7, 1935, P. 291–294.

Szabo M.E. Polycategories. *Communications in Algebra*, 3(8), 1975, P. 663-689.

Tolokonnikov G.K. Convolution Polycategories and Categorical Splices for Modeling Neural Networks, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, vol 938, 2020, Springer, P. 259-267.

Tolokonnikov G.K. The Use of Convolutional Polycategories in Problems of Artificial Intelligence. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, v. 1126. Springer, 2020, P. 23-32.

Tolokonnikov G.K. Functional Systems Integrated with a Universal Agent of Artificial Intelligence and Higher Neurocategories, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, volume 1315, 2021, pp. 3-12, DOI <https://doi.org/10.1007/978-3-030-67133-4>.

Yi-Lin Forrest J. *General Systems Theory. Foundation, Intuition and Applications in Business Decision Making*, IFSR International Series in Systems Science and Systems Engineering, V. 32, Springer, 2018, 370 p.

## **Математическая вероятностная модель когнитивного и функциональных систем<sup>1</sup>**

Витяев Е.Е.

д.ф.-м.н., Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,  
Новосибирский государственный университет, Россия  
e-mail: vityaev@math.nsc.ru

**Аннотация.** В работе приводится формализация когнитивного и когов феноменального опыта и функциональных систем с опорой на достаточно общий принцип работы мозга: мозг обнаруживает все возможные причинные связи во внешнем мире и осуществляет выводы по ним. Для этого анализируется понятие причинно-следственной связи и проблема статистической двусмысленности, связанная с противоречивостью выводов по вероятностным причинным связям. Решается проблема статистической двусмысленности и определяются максимально специфические вероятностные причинные связи, предсказывающие без противоречий. Определяется формальная модель нейрона, обнаруживающая такие причинные связи. Показывается, что клеточные ансамбли таких нейронов дают «естественную» классификацию объектов внешнего мира в виде неподвижных точек циклически взаимно предсказывающихся свойств объектов. Показывается, что эти циклические максимально специфические причинные связи формируют вероятностные формальные понятия, формализующие «естественную» классификацию и «естественные» понятия, возникающие в когнитивных науках. Кроме того, они обладают свойством высоко интегрированной информации в смысле G.Toponi. Формализация когов функциональных систем, основывается на рассмотрении целенаправленного поведения и выработки условных (причинных) связей между действием и его результатами. В работе приводится формальная модель когов функциональных систем и показано, что она может эффективно использоваться для моделирования аниматов.

**Ключевые слова:** когнитивное, формальное понятие, категоризация, теория функциональных систем, целенаправленное поведение.

### **Введение**

Понятие когнитивного – когнитивной гиперсети головного мозга – является в настоящее время одним из наиболее развитых подходов к изучению фундаментальных механизмов работы мозга и когнитивных функций [1]. Когнитивное состоит из взаимосвязанных когов («когнитивных групп нейронов, представляющих элементы субъективного опыта») двух типов – функциональных систем и клеточных ансамблей Д. Хебба [2].

*Гиперсеть когнитивного – это сети, сетей, сетей ..., состоящие из гиперсимплексов. К.В.Анохин видит «задачу фундаментальной теории мозга и*

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №19-01-00331-а. Автор выражает благодарность Баяру Пак за проведенные эксперименты по восстановлению цифр.

разума в описании этих структур, их происхождения, функций и процессов в них» [1].

Цель данной работы – показать, что основные свойства и функции когов функциональных систем и клеточных ансамблей могут быть выведены из более общего принципа – *мозг обнаруживает во внешнем мире все возможные причинные связи и осуществляет выводы по ним*. Для этого мы, прежде всего, детально анализируем понятие причинной связи и формализуем её.

Причинность является следствием физического детерминизма: «для любой изолированной физической системы некоторое ее состояние определяет все последующие состояния» [3]. Но рассмотрим автомобильную аварию [3]. В чем её причина? Это может быть состояние дорожного покрытия, его влажность, положение солнца относительно водителя, безрассудное вождение, психологическое состояние водителя, неисправность тормозов и так далее. Очевидно, что в этом случае нет определенной причины.

В философии науки причинность сводится к предсказанию и объяснению. «Причинно-следственная связь означает предсказуемость... если известна вся предыдущая ситуация, событие может быть предсказано..., если даны все факты и законы природы, связанные с этим событием» [3]. Понятно, что знать все факты, число которых в случае аварии потенциально бесконечно, и все законы невозможно. Кроме того, человек и животные узнают законы внешнего мира путем обучения (индуктивного вывода). Поэтому, причинность сводится к предсказанию с помощью индуктивно-статистического вывода (см. раздел 1), когда предсказание выводятся из фактов и статистических законов с некоторой вероятностью.

Кроме того, причинно-следственные связи в виде статистических законов, обнаруженных на реальных данных или в результате обучения, сталкиваются с *проблемой статистической двусмысленности* – из них могут быть выведены противоречивые предсказания (см. раздел 1) [4-5]. Чтобы избежать этой двусмысленности Гемпель ввел требование максимальной специфичности (см. раздел 1), неформально состоящее в том, что статистические законы должны включать максимум наличной информации.

Нами была решена проблема статистической двусмысленности и определены максимально специфические статистические законы, для которых можно доказать (см. теорему 1), что индуктивно-статистический вывод, использующий их, не приводит к противоречиям [6-7]. Для обнаружения таких законов, был разработан специальный семантический вероятностный вывод (см. определение), который их обнаруживает. Кроме того, нами разработана формальная модель нейрона, удовлетворяющая правилу Хебба, которая осуществляет этот вывод и обнаруживает максимально специфические статистические законы [8]. Заметим, что индуктивно-статистический вывод предсказаний охватывает также предсказания по причинно-следственным связям, но они формализуют вероятностную причинность – тип причинности,



который может быть обнаружен на основе данных, и не гарантирует, что это действительно причинная связь в естественно-научном смысле. Поэтому мы далее будем предполагать, что максимально специфические статистические законы являются вероятностными максимально специфическими причинными связями.

Вероятностные причинно-следственные связи, отражая взаимосвязь свойств объектов внешнего мира зацикливаться, образуя клеточные ансамбли и создавая неподвижные точки циклически взаимно предсказывающихся атрибутов. Эти неподвижные точки имеют особый смысл и отражают «естественную» классификацию объектов внешнего мира.

Строение объектов внешнего мира впервые было проанализировано в области «естественной» классификации (см раздел 2). Было замечено, что «естественные» классы животных или растений отличаются потенциально бесконечным множеством свойств [9]. Естествоиспытатели, строившие «естественные» классификации, отмечали, что построение «естественной» классификации заключается в «индикации» – от бесконечно большого числа признаков нужно перейти к ограниченному их количеству, которое заменило бы все остальные признаки [10]. Это означает, что в «естественных» классах признаки сильно коррелированы, например, если есть 128 классов и атрибуты двоичные, то независимыми «индикаторными» атрибутами среди них будут около 7 атрибутов, т.к.  $2^7 = 128$ , а другие атрибуты могут быть предсказаны по значениям этих 7 атрибутов. Мы можем выбирать различные 7-10 атрибутов в качестве «индикаторных» и тогда другие атрибуты, которых потенциально бесконечное количество, могут быть предсказаны на основе этих выбранных атрибутов. Поэтому, существует огромное множество причинно-следственных связей между атрибутами объектов «естественных» классов.

Мы формализуем «естественную» классификацию путем обобщения анализа формальных понятий [11-12]. Формальные понятия могут быть определены как неподвижные точки детерминированных правил (не имеющих исключений) [11]. Мы обобщаем формальные понятия на вероятностный случай, заменяя детерминированные правила вероятностными максимально специфическими причинно-следственными связями и определяя вероятностные формальные понятия как неподвижные точки этих максимально специфических правил [7,13]. В силу того, что вывод по максимально специфическим причинным связям непротиворечив, полученная неподвижная точка также будет непротиворечива и не будет содержать одновременно признак и его отрицание, то есть такое определение вероятностных формальных понятий корректно.

Можно показать [14], что вероятностные формальные понятия адекватно формализуют «естественную» классификацию и полученная «естественная» классификация удовлетворяет всем требованиям, которые естествоиспытатели предъявляли к «естественным» классификациям [14].

Таким образом, клеточные ансамбли определенных нами нейронов могут обнаруживать «естественную» классификацию объектов внешнего мира.

Мы покажем далее (см. раздел 3), что данная формализация является также формализацией «естественных» понятий, как это определено в работах Eleanor Rosch [15-16]. Определение «естественных» понятий основано на принципе категоризации Eleanor Rosch, постулирующей структурность воспринимаемого мира: «воспринимаемый мир не является неструктурированным множеством равновероятно встречающихся свойств, наоборот, объекты воспринимаемого мира имеют высоко коррелированную структуру» [16].

На высоко коррелированной структуре внешнего мира основана также интегрированная информация, определенная G. Tononi [17-18] (см. раздел 4). Но у G. Tononi нет модели внешнего мира, и интегрированная информация рассматривается как внутреннее свойство системы причинных связей, проявляющаяся в сознании. Он определяет понятие концепта как системы причинных связей с максимально интегрированной информацией. Поскольку у него нет внешнего мира, то он не может сказать, что понятие концепта отражает «естественные» понятия и «естественные» объекты.

Таким образом, наша формализация «естественной» классификации с помощью вероятностных формальных понятий является одновременно формализацией, «естественных» понятий и интегрированной информации. Она принципиально отличается от формализации систем причинных связей, основанной на байесовских сетях, как это сделано в [19], поскольку байесовские сети не поддерживают циклов.

В нашей формализации гиперсимплексы сети, сетей, сетей ... тогда есть отражение иерархии «естественных» классов внешнего мира, где вершина гиперсимплекса – это паттерн класса (вероятностное формальное понятие класса), а основание гиперсимплекса – неподвижная точка взаимных предсказаний свойств объектов класса, формирующая вероятностное формальное понятие. Эта неподвижная точка формирует максимально интегрированную информацию по G. Tononi. Алгоритм «естественной» классификации основан на определенном критерии максимальной согласованности причинных связей по взаимному предсказанию, который близок по смыслу к интегрированной информации.

Формализация когов второго типа – когов функциональных систем, основана на рассмотрении целенаправленного поведения. Целенаправленное поведение осуществляется путем выработки условных (причинных) связей между действием и его результатами. В разделе «Формальная модель» показано, что этих условных связей достаточно для моделирования функциональных систем и разработки аниматов.

## 1. Причинность

Как уже говорилось причинность сводится к предсказанию и объяснению. «Причинное отношение означает предсказуемость ... в том смысле, что, если полная предыдущая ситуация будет известна, событие может быть предсказано ..., если будут даны все относящиеся к событию факты и законы природы» [3].

Существуют две модели предсказания некоторого высказывания  $G$ :

1. дедуктивно-номологическая (Deductive-Nomological (D-N)), основанная на фактах и дедуктивных законах;

2. индуктивно-статистическая (Inductive-Statistical (IS)), основанная на фактах и вероятностных законах.

**Дедуктивно-номологическая модель** может быть представлена следующей схемой.

$$\frac{L_1, \dots, L_m}{C_1, \dots, C_n} \\ \hline G$$

- 1)  $L_1, \dots, L_m$  - множество законов;
- 2)  $C_1, \dots, C_n$  - множество фактов;
- 3)  $G$  – предсказываемое высказывание;
- 4)  $L_1, \dots, L_m, C_1, \dots, C_n \vdash G$ ;
- 5)  $L_1, \dots, L_m, C_1, \dots, C_n$  множество непротиворечиво;
- 6)  $L_1, \dots, L_m \not\vdash G, C_1, \dots, C_n \not\vdash G$ ;
- 7) Законы  $L_1, \dots, L_m$  содержат только кванторы всеобщности. Множество фактов  $C_1, \dots, C_n$  – бескванторные формулы.

**Индуктивно-статистическая модель** аналогична предыдущей с тем отличием, что вывод осуществляется с некоторой вероятностью, поэтому свойство 7 формулируется иначе:

7) множество  $L_1, \dots, L_m$  содержит статистические законы. Множество фактов  $C_1, \dots, C_n$  – бескванторные формулы;

При обнаружении законов на реальных данных возникает проблема статистической двусмысленности, которая состоит в том, что в процессе обучения (индуктивного вывода) мы можем получить вероятностные правила, из которых выводится противоречие.

### **Классический пример статистической двусмысленности**

Предположим, что есть следующие высказывания:

(Л1) – ‘почти все случаи заболевания стрептококком быстро вылечиваются инъекцией пенициллина’;

(Л2) – ‘Почти всегда устойчивая к пенициллину стрептококковая инфекция не вылечивается после инъекции пенициллина’;

(C1) – ‘Джейн Джонс заболел стрептококковой инфекцией’;

(C2) – ‘Джейн Джонс получил инъекцию пенициллина’;

(C3) – ‘Джейн Джонс имеет устойчивую к пенициллину стрептококковую инфекцию’.

Из этой теории можно вывести два противоречивых утверждения: одно, объясняющее почему Джейн Джонс выздоровеет быстро (E), и другое, объясняющее, почему Джейн Джонс не выздоровеет быстро ( $\neg E$ ).

Объяснение 1		Объяснение 2	
L1			L2
C1,C2	[r]		C2,C3
E			$\neg E$

Условия обоих объяснений не противоречат друг другу, оба они могут быть одновременно истинными. Тем не менее, их выводы противоречат друг другу.

Чтобы избежать противоречий Гемпель [5] ввел требование максимальной специфичности для статистических законов:

Правило  $F \Rightarrow G$  является максимально специфичным в состоянии знания K,

$$\frac{F \Rightarrow G, p(G;F)}{\frac{F(a)}{G(a)} [r]},$$

если для каждого класса H, для которого оба следующих высказывания  $\forall x (H(x) \Rightarrow F(x))$ ,  $H(a)$  принадлежат K, существует статистический закон  $p(G;H) = r'$  в K такой, что  $r = r'$ . Идея требования максимальной специфичности состоит в том, что если F и H оба содержат объект a, и H является подмножеством F, то H обладает более специфичной информацией об объекте a, чем F и следовательно закон  $p(G;H)$  должен предпочитаться закону  $p(G;F)$ . Однако, закон  $p(G;H)$  должен иметь ту же вероятность, что и закон  $p(G;F)$ .

Несмотря на то, что Гемпель дал достаточно точное неформальное определение требования максимальной специфичности, ни им, ни его последователями не было доказано, что I-S вывод по статистическим законам, удовлетворяющим этому определению непротиворечив. Нами была решена эта проблема и определены максимально специфические статистические законы, для которых можно доказать (см. теорему 1), что индуктивно-статистический вывод по таким законам не приводит к противоречиям [6-7].

Как уже отмечалось, индуктивно-статистический вывод предсказаний формализует вероятностную причинность. Наша формализация вероятностной причинности основана на следующих двух требованиях:

1. на определении вероятностной причинной связи (определение 12) относительно некоторого бэкграунда Cartwright [20], состоящем в том, что «каждое условие посылки причинного отношения строго увеличивает условную вероятность заключения»;

2. на требовании максимальной специфичности для статистических законов (определение 16).

Поэтому наше определение вероятностной причинности будем называть вероятностной максимально специфичной причинной связью (определение 16).

## 2. Что такое «естественная» классификация

Высоко коррелированную структуру внешнего мира выявляют две теории – «естественной» классификации и «естественных» понятий. При этом, «естественная» классификация говорит о структуре объектов внешнего мира, а «естественные» понятия, исследуемые в когнитивных науках, о восприятии этих «естественных» объектов.

Первый достаточно подробный анализ «естественной» классификации принадлежит Дж. Ст. Миллю [9]. Приведем его точку зрения, чтобы стал понятен смысл «естественной» классификации. Сначала отделим «искусственные» классификации от «естественных». Это разделение сделал ещё Дж. Ст. Милль в следующем высказывании: *«Возьмем любой признак, и если одни вещи обладают им, а другие не обладают, то на нем можно основать деление всех вещей на два класса». «Но если мы обратимся к ... классу «животное» или «растение», ... и посмотрим, какими особенностями индивидуумы, обнимаемые данным классом, отличаются от индивидуумов, не входящих в него, то мы найдем, что в этом отношении одни классы сильно отличаются от других. ... обладают столь большим количеством признаков, что их нельзя ... перечислить»* [9].

«Естественную» классификацию Дж. Ст. Милль определяет следующим образом: *«Всего более соответствует целям научной (естественной) классификации, когда предметы соединяются в такие группы, относительно которых можно высказать наибольшее число общих предложений»* [9]. На основании понятия «естественной» классификации Дж. Ст. Миллем определяет понятие «образа» класса, которое является предтечей «естественных» понятий, исследуемых в когнитивной психологии: *«Естественные группы ... определяются признаками, ... при этом принимаются во внимание не только признаки, безусловно общие всем включаемым в группу предметам, но вся совокупность тех признаков, из которых все встречаются в большинстве этих предметов, а большинство – во всех. Вследствие этого наше понятие о классе – тот образ, которым этот класс представлен в нашем уме, – есть понятие о некотором образце, обладающем всеми признаками данного класса»*.

Проблема определения «естественных» классификаций до сих пор обсуждается в литературе [21]. Однако, с нашей точки зрения нет достаточно адекватной формализации «естественной» классификации.

### 3. Что такое «естественные» понятия

В работах Eleanor Rosch был сформулирован следующий принцип категоризации «естественных» категорий: «Perceived World Structure. *The second principle of categorization asserts that ... perceived world – is not an unstructured total set of equiprobable co-occurring attributes. Rather, the material objects of the world are perceived to possess ... high correlational structure ... combinations of what we perceive as the attributes of real objects do not occur uniformly. Some pairs, triples, etc., are quite probable, appearing in combination ... with one, sometimes another attribute; others are rare; others logically cannot or empirically do not occur*» [16].

Непосредственно воспринимаемые объекты (basic objects) – информационно богатые связки наблюдаемых свойств, создающие категоризацию (образ в определении Дж. Ст. Милля): «Categories can be viewed in terms of their clear cases if the perceiver places emphasis on the correlational structure of perceived attributes ... By prototypes of categories we have generally meant the clearest cases of category membership» [15-16]. В дальнейшем теория «естественных» понятий Eleanor Rosch получила название прототипической теории понятий (prototype theory).

В дальнейших исследованиях было обнаружено, что моделей, основанных на признаках, сходстве и прототипах, недостаточно для описания «естественных» классов. Необходимо учитывать теоретические, причинные и онтологические знания, относящиеся к объектам классов. Например, люди не только знают, что птицы имеют крылья, могут летать и вить гнезда на деревьях, но также и то, что птицы выют гнезда на деревьях, потому что могут летать, и летать, потому что они имеют крылья.

Учитывая эти исследования, Bob Rehder выдвинул теорию причинных моделей (causal-model theory), в соответствии с которой: «people's intuitive theories about categories of objects consist of a model of the category in which both a category's features and the causal mechanisms among those features are explicitly represented» [22]. В теории причинных моделей отношение объекта к категории основывается уже не на множестве признаков и близости по признакам, а на основании сходства порождающего причинного механизма: «Specifically, a to-be-classified object is considered a category member to the extent that its features were likely to have been generated by the category's causal laws, such that combinations of features that are likely to be produced by a category's causal mechanisms are viewed as good category members and those unlikely to be produced by those mechanisms are viewed as poor category members» [22].

Для представления причинного знания Bob Rehder использовал Байесовские сети [19]. Однако они не поддерживают циклов и поэтому не могут моделировать циклические причинные связи. Предлагаемая нами формализация прямо моделирует циклические причинные связи, представленные неподвижными точками предсказаний по причинным связям [6-7,13-14].

#### ***4. Теория интегрированной информации G.Tononi***

На высоко коррелированной структуре внешнего мира основана также теория интегрированной информации G.Tononi [17-18,23]. Интегрированная информация у G.Tononi рассматривается как свойство системы циклических причинных связей: «Indeed, a “snapshot” of the environment conveys little information unless it is interpreted in the context of a system whose complex causal structure, over a long history, has captured some of the causal structure of the world, i.e. long-range correlations in space and time» [18].

Взаимосвязь интегрированной информации с реальностью G.Tononi описывает следующим образом: «Cause-effect matching ... measures how well the integrated conceptual structure ... fits or ‘matches’ the cause-effect structure of its environment», «... matching should increase when a system adapts to an environment having a rich, integrated causal structure. Moreover, an increase in matching will tend to be associated with an increase in information integration and thus with an increase in consciousness» [18-19].

G.Tononi определяет сознание как первичное понятие, которое обладает следующими феноменологическими свойствами: composition, information, integration, exclusion [18-19]. Приведем формулировки этих свойств вместе с нашей интерпретацией этих свойств (приведенной в скобках) с точки зрения «естественной» классификации объектов внешнего мира.

1. composition – elementary mechanisms (causal interactions) can be combined into higher-order ones («естественные» классы объектов образуют иерархию);

2. information – only mechanisms that specify ‘differences that make a difference’ within a system count (только система «резонирующих» причинных связей, формирующая класс, является значимой);

3. integration – only information irreducible to non-interdependent components counts (значима только система «резонирующих» причинных связей, не сводимая к информации отдельных компонент, свидетельствующая об избытке информации и восприятию высоко коррелированной структуры «естественного» объекта);

4. exclusion – only maxima of integrated information count (только значения признаков, которые максимально взаимосвязаны причинными связями формируют «образ» или «прототип»).

В отличие от G.Tononi, мы рассматриваем эти свойства не как внутренние свойства системы, а как способность системы отражать «естественную»

классификацию объектов внешнего мира, а сознание – как способность комплексного иерархического отражения «естественной» классификации внешнего мира.

### 5. Вероятностные формальные понятия

Приведем нашу формализацию основных понятий: определения вероятностной причинности Cartwright, семантического вероятностного вывода, максимально специфической причинной связи и вероятностных формальных понятий. Этот раздел следует работам [6-7,11-12].

**Определение 1.** *Формальный контекст*  $K=(G,M,I)$  представляет собой тройку, где  $G$  и  $M$  – произвольные наборы объектов и атрибутов, и  $I \subseteq G \times M$  – бинарное отношение, выражающее принадлежность атрибута объекту.

В формальном контексте операторы производных играют ключевую роль - они связывают подмножества объектов и атрибутов контекста.

**Определение 2.**  $A \subseteq G, B \subseteq M$  тогда:

1.  $A^\uparrow = \{m \in M \mid \forall g \in A, (g, m) \in I\}$  ,
2.  $B^\downarrow = \{g \in G \mid \forall m \in B, (g, m) \in I\}$  .

**Определение 3.** Пара  $(A,B)$  – формальное понятие, если  $A^\uparrow = B$  и  $B^\downarrow = A$  .

Переопределим контекст в рамках логики, будем рассматривать только конечные контексты.

**Определение 4.** Для контекста  $K=(G,M,I)$  мы определяем сигнатуру контекста  $\Omega_K$  , которая содержит символы предикатов для каждого

$$m \in M, K \models m(x) \Leftrightarrow (x, m) \in I$$

**Определение 5.** Для сигнатуры  $\Omega_K$  определим следующий вариант логики первого порядка:

1.  $X_K$  – множество переменных;
2.  $At_K$  – множество атомарных формул (атомов)  $m(x), m \in \Omega_K, x \in X_K$  ;
3.  $L_K$  – набор литералов, включает все атомы  $m(t)$  и их отрицания  $\neg m(t)$  ;
4.  $\Phi_K$  – набор формул, определяемый индуктивно: литерал – формула, для любых  $\Phi, \Psi \in \Phi_K$  выражения  $\Phi \wedge \Psi, \Phi \vee \Psi, \Phi \rightarrow \Psi, \neg \Phi$  – также формулы.

Определим конъюнкцию  $\wedge L$  и отрицание  $\neg L = \{\neg P \mid P \in L\}$  набора литералов  $L \subseteq L_K$  .

**Определение 6.** Единичный элемент  $\{g\}$  сигнатуры  $\Omega_K$  образует модель  $K_g$  этого объекта. Истинность формулы  $\phi$  на модели  $K_g$  определяется как

$$g \models \phi \Leftrightarrow K_g \models \phi.$$

**Определение 7.** Определим *вероятностную меру*  $\mu$  на множестве  $G$  в смысле Колмогорова. Тогда мы можем определить вероятностную меру на множестве формул как:



$$v: \Phi_K \rightarrow [0,1], v(\phi) = \mu(\{g \mid g \models \phi\}).$$

Мы предполагаем, что в контексте нет несущественных объектов, таких как  $\mu(\{g\}) = 0, g \in G$ .

**Определение 8.** Пусть  $\{H_1, H_2, \dots, H_k, C\} \in L_K, C \notin \{H_1, H_2, \dots, H_k\}, k \geq 0$ , тогда

1. *отношение* есть  $R = (H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_k \rightarrow C)$ ;
2. *посылка*  $R^{\leftarrow}$  отношения  $R$  – набор литералов  $\{H_1, H_2, \dots, H_k\}$ ;
3. *заключение* отношения – это  $R^{\rightarrow} = C$ ;
4. *длина* отношения это  $|R^{\leftarrow}|$ .

**Определение 9.** *Вероятность*  $\eta$  отношения  $R$  – это величина

$$\eta(R) = v(R^{\leftarrow} | R^{\rightarrow}) = v(R^{\leftarrow} \wedge R^{\rightarrow}) / v(R^{\leftarrow}).$$

Если знаменатель  $v(R^{\leftarrow})$  отношения равен 0, то вероятность не определена.

**Определение 10.** Отношение  $R_1$  является *подотношением* отношения  $R_2$ , обозначается как  $(R_1 \sqsubset R_2)$ , если  $R_1^{\rightarrow} = R_2^{\rightarrow}, R_1^{\leftarrow} \subset R_2^{\leftarrow}$ .

**Определение 11.** Отношение  $R_1$  *уточняет* отношение  $R_2$ , что обозначим как  $R_2 > R_1$ , если  $R_2 \sqsubset R_1$  и  $\eta(R_1) > \eta(R_2)$ .

**Определение 12.** Отношение  $R$  является *вероятностной причинной связью*, если для каждого  $\tilde{R}$  выполнено  $(\tilde{R} \sqsubset R) \Rightarrow (\tilde{R} < R)$ .

Определение вероятностной причинности, данное Cartwright [20] относительно некоторого бэкграунда, может быть сформулировано в приведенных терминах следующим образом. Если посылкой  $R^{\leftarrow}$  отношения  $R$  является набор литералов  $\{H_1, H_2, \dots, H_k\}$  и мы рассматриваем этот набор как бэкграунд, то каждый литерал посылки является вероятностной причиной заключения  $R^{\rightarrow}$  отношения  $R$  относительно этого бэкграунда, то есть  $v(R^{\rightarrow} / R^{\leftarrow}) > v(R^{\rightarrow} / (R^{\leftarrow} \setminus H))$  для каждого  $H \in \{H_1, H_2, \dots, H_k\}$ .

Легко видеть, что это определение следует из определения 12.

**Определение 13.** *Сильнейшей вероятностной причинной связью* будет называться отношение  $R$ , для которого не существует такой вероятностной причинной связи  $\tilde{R}$ , что  $(\tilde{R} > R)$ .

**Определение 14.** *Семантический Вероятностный Вывод (СВВ)* предсказаний некоторого литерала  $C$  есть последовательность вероятностных причинных связей  $R_0 < R_1 < R_2 < \dots < R_m, R_0^{\leftarrow} = \emptyset, R_m$  – сильнейшая вероятностная причинная связь и  $R_0^{\rightarrow} = R_1^{\rightarrow} = R_2^{\rightarrow} = \dots = R_m^{\rightarrow} = C$ .

**Определение 15.** *Дерево семантического вероятностного вывода*  $\text{Tree}(C)$  некоторого литерала  $C$  – это совокупность всех СВВ, предсказаний литерала  $C$ .

**Определение 16.** *Максимально специфичное причинное отношение* для предсказания некоторого  $C$  – это сильнейшее вероятностное причинное отношение дерева  $\text{Tree}(C)$ , имеющее максимальную условную вероятность.

Обозначим через  $\text{MSCR}$  множество всех максимально специфичных причинных отношений для предсказания некоторого литерала  $C$ . Под *системой причинных отношений* будем понимать любое подмножество  $\mathcal{R} \subseteq \text{MSCR}$ .

**Определение 17.** Определим оператор предсказания для системы  $\mathcal{R}$  как:

$$\Pi_{\mathcal{R}}(L) = L \cup \{C \mid \exists R \in \mathcal{R} : R^{\leftarrow} \subseteq L, R^{\rightarrow} = C\}.$$

**Определение 18.** Замыканием набора литералов  $L$  назовем наименьшую неподвижную точку оператора предсказания, содержащую  $L$ :

$$\Pi_{\mathcal{R}}^{\infty}(L) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Pi_{\mathcal{R}}^k(L).$$

Набор литералов  $L$  *непротиворечив*, если он не содержит одновременно атом  $C$  и его отрицание  $\neg C$ . Набор литералов  $L$  *совместен*, если  $v(\wedge L) \neq 0$ .

**Теорема 1.** (Доказательство в приложении). Если  $L$  – совместно, то  $\Pi_{\mathcal{R}}(L)$  совместно и непротиворечиво для любой системы  $\mathcal{R}$ .

**Определение 19.** Вероятностное формальное понятие на контексте  $K$  – это пара  $(A, B)$ , удовлетворяющая следующим условиям:

$$\Pi_{\mathcal{R}}^{\infty}(B) = B, \quad A = \bigcup_{\Pi_{\mathcal{R}}^{\infty}(C) = B} C^{\downarrow}.$$

Определение множества  $A$  основано на следующей теореме, связывающей вероятностные и стандартные формальные понятия на контексте  $K$ .

**Теорема 2.** (Доказательство в приложении). Пусть  $K=(G,M,I)$  – формальный контекст, тогда:

1. Если  $(A,B)$  – формальное понятие на  $K$ , то существует вероятностное формальное понятие  $(S,T)$  на  $K$  такое, что  $A \subseteq S, B \subseteq T$ .

2. Если  $(S,T)$  – вероятностное формальное понятие на  $K$ , то существует семейство  $C$  формальных понятий на  $K$ , такое что

$$\forall (A, B) \in C (\Pi_{\mathcal{R}}^{\infty}(B) = T), S = \bigcup_{(A, B) \in C} A$$

### 6. Статистическая аппроксимация вероятностных формальных понятий

В практических задачах мы не можем предполагать, что вероятностная мера нам известна. Поэтому, нам необходимо использовать некоторый статистический критерий для определения вероятностных неравенств в СВВ. Для этого мы используем точный критерий независимости Фишера с уровнем доверия  $\alpha$ . Результирующий набор  $\mathcal{R}_{\alpha}$  вероятностных максимально специфических причинно-следственных связей, полученный с уровнем доверия  $\alpha$ , может вызывать противоречия в неподвижных точках вероятностных формальных понятий. Следовательно, для аппроксимации оператора  $\Pi_{\mathcal{R}}(L)$  необходимо ввести дополнительный критерий согласованности максимально специфических причинных связей  $\mathcal{R}_{\alpha}$  на множестве  $L$ .

**Определение 20.** Причинное отношение  $R \in \mathcal{R}_{\alpha}$  подтверждается на множестве литералов  $L$ , если  $R^{\leftarrow} \in L$  и  $R^{\rightarrow} \in L$ . Тогда  $R \in \text{Sat}(L) \subseteq \mathcal{R}_{\alpha}$ .

**Определение 21.** Причинное отношение  $R \in \mathcal{R}_\alpha$  опровергается на множестве литералов  $L$ , если  $R^- \in L$  и  $R^+ \in \neg L$ . Тогда  $R \in \text{Fall}(L) \subseteq \mathcal{R}_\alpha$ .

Теперь мы можем определить критерий максимальной согласованности предсказаний по максимально специфическим причинным связям  $\mathcal{R}_\alpha$  на некотором множестве литералов  $L$ .

**Определение 22.** Критерием максимальной согласованности предсказаний максимально специфическими причинными связями на множестве литералов  $L$  является значение:

$$\text{Int}(L) = \sum_{R \in \text{Sat}(L)} \gamma(R) - \sum_{R \in \text{Fal}(L)} \gamma(R) .$$

Выбор оценки причинной связи  $\gamma$  может зависеть от специфики задачи. В наших ниже следующих экспериментах мы руководствовались соображениями Шеннона:

$$\gamma(R) = -\log(1 + \epsilon - \eta(R)) .$$

Теперь мы можем аппроксимировать оператор  $\prod_{\mathcal{R}}(L)$ , используя этот критерий согласованности предсказаний.

**Определение 23.** Определим оператор максимальной согласованности предсказаний  $\Upsilon(L)$  для максимально специфических причинных связей  $\mathcal{R}_\alpha$ , который изменяет набор литералов  $L$  на один элемент таким образом, чтобы строго увеличить критерий согласованности предсказаний:

1. для всех  $G \in L_K \setminus L$  вычислить максимальное увеличение критерия от добавления  $G$  к  $L$ :  $\Delta^+ = \text{Int}(L \cup \{G\}) - \text{Int}(L)$ ;

2. для всех  $G \in L$  вычислить максимальное увеличение критерия от удаления  $G$  из  $L$ :  $\Delta^- = \text{Int}(L \setminus \{G\}) - \text{Int}(L)$ ;

3. оператор  $\Upsilon(L)$  добавляет литерал  $G$  к  $L$ , если  $\Delta^+ > 0$  и  $\Delta^+ > \Delta^-$ ; оператор  $\Upsilon(L)$  удаляет литерал  $G$  из  $L$ , если  $\Delta^- > 0$  и  $\Delta^- > \Delta^+$ , если  $\Delta^+ = \Delta^-$  и  $\Delta^- > 0$ , оператор  $\Upsilon(L)$  удаляет литерал  $G$ ;

4. если  $\Delta^- \leq 0$  и  $\Delta^+ \leq 0$ , оператор  $\Upsilon(L)$  возвращает  $L$  и, следовательно, мы получили неподвижную точку максимально согласованных прогнозов.

**Определение 24.** Под статистической аппроксимацией вероятностных формальных понятий контекста  $K$  для максимально специфических причинных связей  $\mathcal{R}_\alpha$  мы понимаем набор всех неподвижных точек, которые могут быть получены в результате применения оператора  $\Upsilon(L)$  к некоторому набору литералов  $L$ .

**Причинность и формальная модель нейрона.** Приведем формальную модель нейрона, обнаруживающую максимально специфические условные связи.

Под информацией поступающей на «вход» мозга будем понимать всю

воспринимаемую мозгом стимуляцию: мотивационную, обстановочную, пусковую, санкционирующую, обратную афферентацию о произведенных действиях, поступающую по коллатералям на «вход» и так далее. Из экологической теории восприятия Дж. Гибсона [24] следует, что под информацией можно понимать любую характеристику энергетического потока света, звука и т.д., поступающую на «вход» мозга.

Определим информацию, передаваемую возбуждением некоторого нервного волокна на синапсы нейрона, одноместными предикатами

$$P_j^i(a) \Leftrightarrow (x_i(a) = x_{ij}), i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n_j, ,$$

где  $x_i(a)$  – информация, а  $x_{ij}$  – её значение в текущей ситуации (на объекте)  $a$ . Если информация передается на возбуждающий синапс, то она воспринимается нейроном, как истинность предиката  $P_j^i(a)$ , если на тормозной синапс, то, как ложность  $\neg P_j^i(a)$  предиката. Возбуждение нейрона в ситуации  $a$  и передачу этого возбуждения на аксон нейрона определим предикатом  $P_0(a)$ . Если нейрон тормозится в ситуации  $a$ , то определим эту ситуацию как прогнозирование отрицания предиката  $\neg P_j^i(a)$ . Предикаты  $P_j^i(a)$ ,  $P_0(a)$  и их отрицания  $\neg P_j^i(a)$ ,  $\neg P_0(a)$  являются литералами (атомарными высказываниями или их отрицаниями), которые будем обозначать как  $a, b, c, \dots \in L$ , где  $L$  - множество всех литералов в словаре  $\{P_0\} \cup \{P_j^i\}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n_j$ .

Каждый нейрон имеет свое рецептивное поле, возбуждающее его безусловно. Первоначальной (до всякого обучения) семантикой предиката  $P_0$  является это рецептивное поле.

Мы предполагаем, что формирование условных связей на уровне нейрона происходит по правилу Хебба [2]. Мы формализуем правило Хебба с помощью семантического вероятностного вывода (определение 14), который принципиально отличается от других формализаций тем, что обнаруживает максимально специфические причинные связи.

Поэтому нейрон в процессе семантического вероятностного вывода (см. рис. 1) обнаруживает множество  $\{R\}$  максимально специфических причинных связей вида:

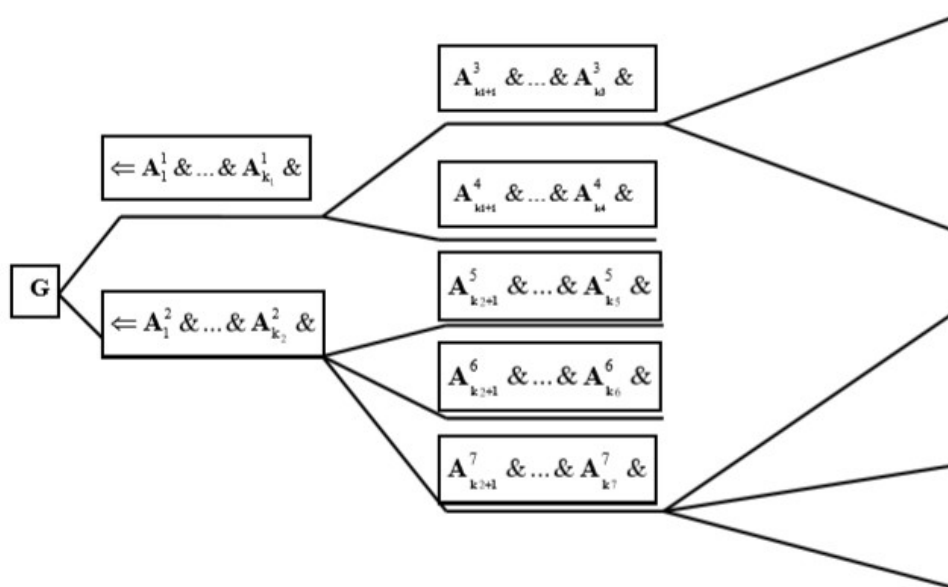
$$R = (a_1 \& \dots \& a_k \Rightarrow b), a_1, \dots, a_k, b \in L,$$

где  $a_1, \dots, a_k$  – предикаты, приходящие на синапсы дендритов нейрона, а  $b$  – предикат  $P_0(a)$  или  $\neg P_0(a)$  аксона нейрона. Дерево семантического вероятностного вывода на рис. 1 и строение нейрона, представленное на рис. 2 похожи, поэтому легко представить себе, что нейрон осуществляет такой вывод.

Правила характеризуются оценкой условной вероятности, которая вычисляется следующим образом. Подсчитаем число случаев  $n(a_1, \dots, a_k, b)$ ,

когда произошло событие  $\langle a_1, \dots, a_k, b \rangle$  – одновременное возбуждение или торможение входов нейрона и самого нейрона непосредственно перед действием подкрепления (которое может быть, как положительным, так и отрицательным).

Среди случаев  $n(a_1, \dots, a_k, b)$  подсчитаем случаи  $n^+(a_1, \dots, a_k, b)$  или  $n^-(a_1, \dots, a_k, b)$ , когда подкрепление было положительным или отрицательным. Тогда оценка условной вероятности правила равна:



*Рис. 1. Дерево семантического вероятностного вывода.*

$$\mu(b|a_1, \dots, a_k) = \frac{n^+(a_1, \dots, a_k, b) - n^-(a_1, \dots, a_k, b)}{n(a_1, \dots, a_k, b)}.$$

Если эта вероятность становится отрицательной, то это означает торможение нейрона.

Опишем свойства полученной формальной модели нейрона:

1. нейрон осуществляет «замыкание условных связей». При обнаружении условных стимулов, позволяющих предсказывать с некоторой вероятностью возбуждение/торможение нейрона, образуется условная связь, формирующая соответствующее правило. При обнаружении новых стимулов, позволяющих предсказывать возбуждение/торможение нейрона с ещё большей вероятностью, присоединяет их к данной условной связи. Так происходит дифференциация условной связи;

2. возбуждение или торможение нейрона осуществляется по максимально вероятным правилам. Это подтверждается тем, что в процессе выработки условных связей, а также при замыкании условных связей на уровне нейрона,

скорость ответа нейрона на условный сигнал, тем выше, чем выше вероятность условной связи. Поскольку максимально специфические правила, учитывающие всю имеющуюся информацию, одновременно являются максимально вероятными, то предсказание (возбуждение нейрона) осуществляется прежде всего по ним;

3. предсказание по максимально специфическим правилам, осуществляемое нейроном, непротиворечиво. Поэтому нейрон обучается предсказывать без противоречий – срабатывают либо его возбуждающие, либо тормозные максимально специфические правила, но не одновременно;

4. на рис. 2 показано несколько семантических вероятностных выводов, осуществляемых нейроном. Например, условная связь  $(b \leftarrow a_1^1 \& a_2^1)$  усиливается новыми стимулами  $a_3^1 \& a_4^1$  до связи  $(b \leftarrow a_1^1 \& a_2^1 \& a_3^1 \& a_4^1)$ , если стимулы  $a_3^1 \& a_4^1$  увеличивают условную вероятность предсказания возбуждения нейрона  $b$ .

а)  $(b \leftarrow a_1^1 \& a_2^1 \& a_3^1 \& a_4^1 \& a_5^1 \& \dots \& a_k^1)$  ;

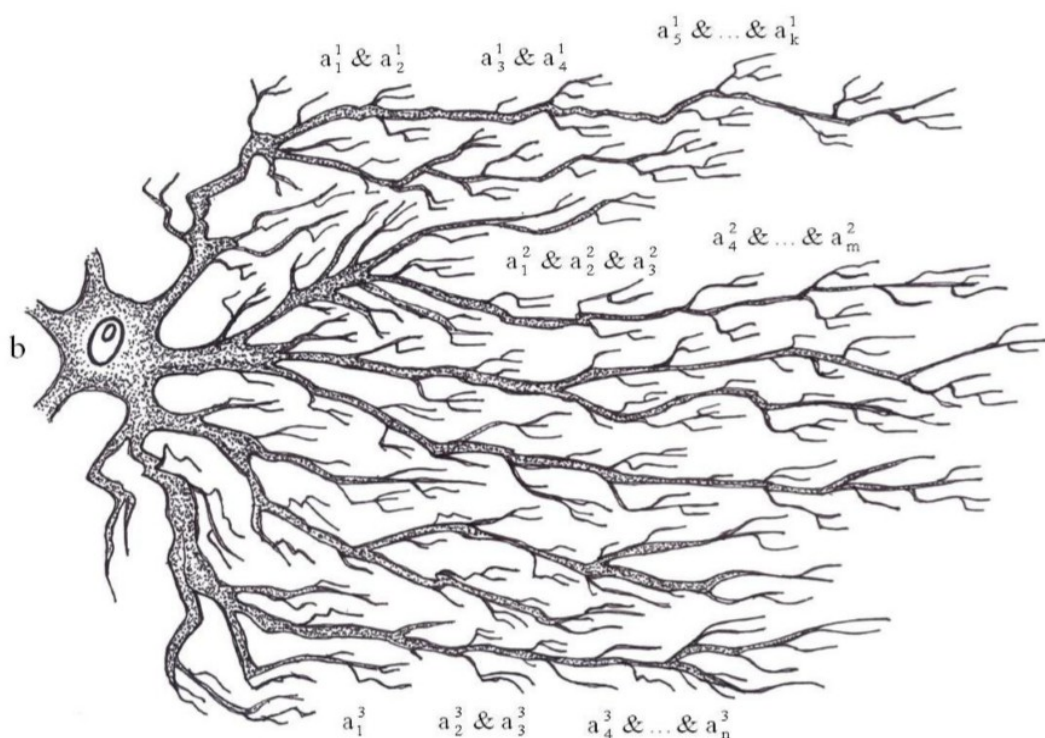


Рис. 2. Формальная модель нейрона.

б)  $(b \leftarrow a_1^2 \& a_2^2 \& a_3^2) \mid (b \leftarrow a_1^2 \& a_2^2 \& a_3^2 \& a_4^2 \& a_5^2 \& \dots \& a_m^2)$  ;

с)  $(b \leftarrow a_1^3) \mid (b \leftarrow a_1^3 \& a_2^3 \& a_3^3) \mid (b \leftarrow a_1^3 \& a_2^3 \& a_3^3 \& a_4^3 \& a_5^3 \& \dots \& a_n^3)$  ;

Семантический вероятностный вывод и реализующая его программная система Discovery, рассматриваемая как модель нейрона, успешно применялись для решения целого ряда прикладных задач [25-26].

### **7. Эксперимент по обнаружению вероятностных формальных понятий**

Проиллюстрируем обнаружение вероятностных формальных понятий методом статистической аппроксимации вероятностных формальных понятий на примере восстановления цифр. Закодируем цифры с помощью 24 признаков, расположенных, как показано на рис. 3 слева. Каждый признак имеет 7 значений (рис. 3 вверху). Для описания цифр мы определяем предикаты  $m_i^j(a)$ , которые истинны, если признак  $i$  на цифре  $a$  имеет значение  $j$ . Некоторые линии цифр кодируются дважды, например, вертикальная линия цифр 4 и 1 кодируется, как правой вертикальной линией (значение 3) признаков 3,7,11,15, 19,23, так и левой вертикальной – значением 5 признаков 4,8,12,16,20,24.

Эксперимент проводился на обучающей выборке, состоящей из 800 изображений: 400 изображений представляли собой 40 копий каждой цифры, из каждой из которых были удалены шесть случайных признаков (пустые значения) и 400 изображений были сгенерированы случайным образом (значения 1-7 всех 24 признаков были сгенерированы случайным образом). На этой обучающей выборке был найден набор  $\mathcal{R}_\alpha$  из 415695 причинных связей, записанных в терминах предикатов  $m_i^j(a)$  и их отрицаний со значением  $\alpha = 0.01$  для критерия Фишера.

В результате эксперимента, методом статистической аппроксимации вероятностных формальных понятий все 400 цифр, в которых шесть случайных признаков были пустыми, были полностью восстановлены.

Проиллюстрируем процесс восстановления цифр. На рис. 4 показан процесс восстановления цифр.

Каждая цифра на рис.4 представлена всеми 24 признаками и их значениями. Для каждой цифры серым цветом указаны значения, которых нет в цифре, а черным цветом значения, которые есть в цифре. Значение  $j$  признака  $i$ , которого нет в цифре, описывается отрицанием предиката  $\neg m_i^j(a)$ , а значение  $j$  признака  $i$ , которое есть в цифре, описывается предикатом  $m_i^j(a)$ .

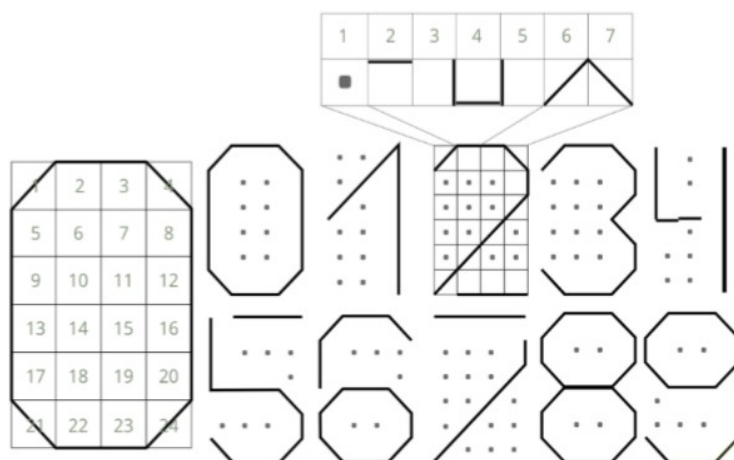


Рис. 3. Кодировка цифр

На первой и третьей строке рис. 4 показаны части процесса восстановления цифры 4. Всего процесс восстановления цифры 4 включает 32 перехода. Первая строка на рис. 4 показывает переходы, в которых оператор  $Y(L)$  добавляет отрицания значений признаков (их не должно быть в цифре). Первая цифра в первой строке – это исходное описание цифры 4 с 6 отсутствующими элементами, обозначенными крестиками.

Она переходит во вторую цифру, в которой оператор  $Y(L)$  добавляет отрицание  $\neg m_{22}^5(a)$  значения 5 признака 22, обозначенное жирной серой линией в ячейке признака 22, покрытой мелкой сеткой. В третью цифру оператор  $Y(L)$  добавляет отрицание  $\neg m_{22}^3(a)$  третьего значения. В четвертую цифру оператор добавляет отрицание  $\neg m_8^4(a)$  четвертого значения признака 8, а в пятую цифру оператор  $Y(L)$  добавляет отрицание  $\neg m_{16}^6(a)$  шестого значения признака 16.

Во второй строке рис.4 показаны 5 причинных связей, участвующих в принятии оператором решения о добавлении последнего отрицания  $\neg m_{16}^6(a)$ . Первая из представленных причинных связей означает, что «если шестой признак имеет значение 1 (белое поле), а 21-й признак не имеет значений 2 и 3, то шестнадцатый признак не имеет шестого значения», формально это записывается так:

$$(m_6^1(a) \& \neg m_{21}^2(a) \& \neg m_{21}^3(a) \Rightarrow \neg m_{16}^6(a)).$$

Следующие четыре причинных связи второй строки рис. 4 означают:

$$\begin{aligned} &(m_{18}^1(a) \& \neg m_{14}^4(a) \Rightarrow \neg m_{16}^6(a)); \\ &(m_{18}^1(a) \& \neg m_7^5(a) \Rightarrow \neg m_{16}^6(a)); \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &(m_6^1(a) \& \neg m_{10}^2(a) \& \neg m_7^7(a) \Rightarrow \neg m_{16}^6(a)); \\ &(m_6^1(a) \& \neg m_2^4(a) \& \neg m_{17}^2(a) \Rightarrow \neg m_{16}^6(a)). \end{aligned}$$

В третьей строке рис. 4 показаны еще 5 частей процесса восстановления цифры 4, заканчивающиеся добавлением положительного признака (без отрицания). В первой цифре третьей строки оператор  $Y(L)$  добавляет значение 5 признака 8, то есть  $m_8^5(a)$  во вторую  $\neg m_9^6(a)$ , третью  $\neg m_8^2(a)$ , четвертую  $\neg m_{10}^2(a)$  и пятую  $m_5^5(a)$ .

В четвертой строке рис. 4 показаны причинных связи, которые участвовали в решении оператора  $Y(L)$  добавить значение 5 к пятому признаку,  $m_5^5(a)$ . Это следующие причинные связи:

$$\begin{aligned} &(m_5^1(a) \& m_{13}^2(a) \Rightarrow m_5^5(a)); \\ &(\neg m_6^1(a) \& \neg m_9^1(a) \& \neg m_{13}^4(a) \& m_{10}^4(a) \& \neg m_{15}^7(a) \Rightarrow m_5^5(a)); \\ &(m_{10}^4(a) \& m_{14}^1(a) \& m_{24}^5(a) \Rightarrow m_5^5(a)); \\ &(m_{14}^1(a) \& m_{20}^5(a) \Rightarrow m_5^5(a)); \\ &(m_{14}^1(a) \& m_{10}^4(a) \& m_{20}^5(a) \Rightarrow m_5^5(a)). \end{aligned}$$

В пятой строке рис. 4 представлена часть процесса восстановления цифры 9. Цифры 4 и 9 различаются по форме. Большинство цифр имеют более округлую форму по сравнению с цифрами 1 и 4. Поэтому процесс восстановления этих цифр имеет более простые причинных связи, показанные в последней строке рис. 4. Это следующие:

$$\begin{aligned} &(m_{22}^4(a) \& m_{24}^6(a) \Rightarrow m_{21}^7(a)); \\ &(m_{22}^4(a) \& m_7^1(a) \& \neg m_{16}^1(a) \Rightarrow m_{21}^7(a)); \\ &(m_6^1(a) \& m_{18}^1(a) \& \neg m_{12}^5(a) \Rightarrow m_{21}^7(a)); \\ &(m_6^1(a) \& m_{18}^1(a) \& \neg m_{11}^3(a) \Rightarrow m_{21}^7(a)); \\ &(m_6^1(a) \& m_{20}^3(a) \Rightarrow m_{21}^7(a)). \end{aligned}$$

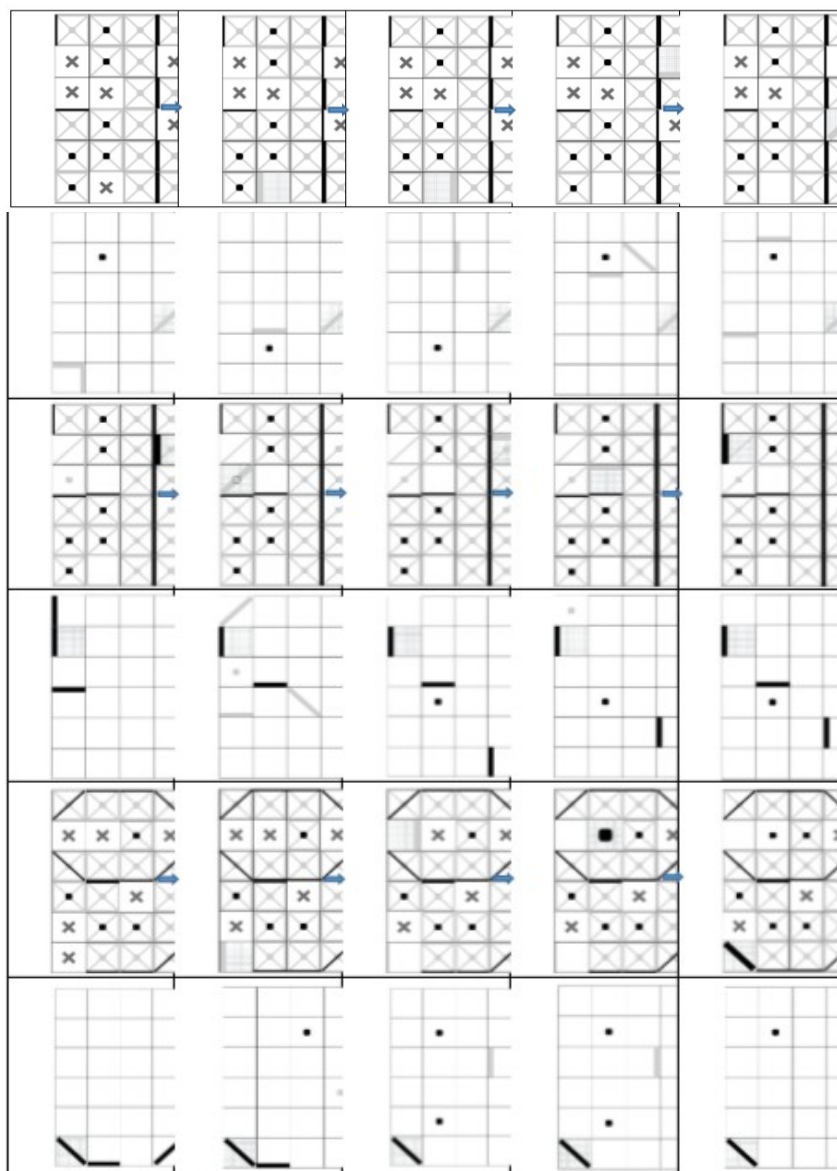


Рис 4. Процесс восстановления цифр.

## 8. Основания математики и теория функциональных систем

Приведем анализ понятия желания, приведенный в [27]. Несмотря на общность приводимых рассуждений, математический результат и пересмотр оснований математики, полученный на основании этого анализа в [27], является его непосредственным следствием.

"Я хочу пить" - что это значит? Нет, конечно, никакой ошибки полагать, что слова "я хочу пить" означают просто вот это, где это - определенное состояние сознания, которое я переживаю сейчас и которое я именую жаждой. Но тогда

возникает новый вопрос: как ощущение жажды (хотения) связано с фактическим питьем (удовлетворением хотения)? Откуда я знаю, что удовлетворить жажду можно питьем? Содержится ли в самом переживании жажды сознание того, чем эту жажду можно удовлетворить? ... Знать желание не означает знать желаемое, а означает знать способность узнать желаемое, как только этому представится случай. Иными словами, вы понимаете какое-либо свое желание ... только тогда, когда этому желанию вы сопоставили чувство уверенности в том, что любое будущее состояние сознания вы сумеете убедительным и безошибочным образом распознать как состояние удовлетворения желания или состояние неудовлетворения... Хотя ... при этом я не обязательно знаю, чем это утоление будет достигнуто. По прошлому опыту ожидаю, что водой, но, быть может, какая-нибудь таблетка тоже утолит мою жажду" [27, стр. 142, 143].

Данное рассуждение позволяет уточнить понятие задачи. «Мы понимаем задачу только тогда, когда ей сопоставили обоснованное чувство уверенности в том, что всякое состояние нашего сознания мы сумеем убедительным и безошибочным образом распознать как такое, когда решение найдено, или как такое, когда решение не найдено» [27, с.143]. Заметим, что если последнее условие не выполнено, то задача не требует решения, так как тогда любое состояние сознания можно считать решением.

Предположим, что у нас есть некоторый текст. Представляет ли он собой "убедительное и безошибочное" изложение решения Задачи? В математических теориях принято считать, что "обоснованное чувство уверенности" в том, что изложение решения задачи действительно является ее решением, возникает, когда это изложение является доказательством решения задачи. Доказательство дает формальный критерий наличия решения задачи для "распознавания, когда решение найдено или не найдено". Поэтому мы имеем математическую задачу только тогда, когда у нас есть обоснованное чувство уверенности в том, что всякое состояние нашего сознания мы сумеем убедительным и безошибочным образом распознать как такое, когда мы имеем доказательство решения задачи или у нас отсутствует доказательство решения задачи. Предположим, что наши состояния сознания вместе с доказательствами можно формализовать в рамках некоторой формальной системы  $S$ . Зададимся вопросом: позволяет ли эта формальная система для любого текста средствами самой формальной системы  $S$  определить, является ли он доказательством решения задачи или нет? Если такая формальная система существует, то это означает, что она может служить формальной моделью для постановок и решения математических задач. Этот вопрос был проанализирован в [27-28] и было доказано, что только в "слабых" формальных системах, в которых не проходит теорема Геделя о неполноте, мы в состоянии средствами самой формальной системы всегда определить является ли некоторый текст доказательством решения некоторой задачи или нет.

Этот результат позволил ее авторам сформулировать новый подход к основаниям математики, состоящий в радикальном изменении программы Гильберта обоснования математики. “Как известно, Гильберт считал, что, вообще говоря, не все высказывания какой-либо математической теории имеют смысл. При этом неявно он предполагал, что разбиение множества всех высказываний рассматриваемой теории на осмысленные (“реальные”) и бессмысленные (“идеальные”) вполне определяется видом самих высказываний и, следовательно, является фиксированным для всех теорий с одним и тем же синтаксисом и сигнатурой. Согласно новой парадигме это разбиение на осмысленные и бессмысленные высказывания зависит не только от синтаксиса и сигнатуры рассматриваемой теории, но и от класса задач, с которым предназначается иметь дело этой теории. С этой точки зрения, одна и та же теория как математическое исчисление содержательно будет иметь разные множества осмысленных высказываний, если она предназначена для обработки разных классов задач. Иными словами, математическая теория рассматривается просто как “резервуар” для более “бедных” формальных систем, по отдельности “извлекаемых” из всей теории в зависимости от той или иной имеющейся задачи. Сама по себе, безотносительно к возможным задачам ... теория не имеет практического значения, и поэтому не представляет самостоятельного интереса вопрос, противоречива она в целом или нет” [27, с.141].

Но нас интересуют не только математические задачи. Рассмотрим еще раз формулировку понятия задачи: “мы понимаем задачу только тогда, когда ей сопоставили обоснованное чувство уверенности в том, что всякое состояние нашего сознания мы сумеем убедительным и безошибочным образом распознать как такое, когда решение найдено, или как такое, когда решение не найдено” [27, с.143]. Переформулируем понятие задачи так, чтобы не апеллировать к состояниям сознания. Будем говорить, что задача осмысленна тогда и только тогда, когда мы имеем критерий решённости задачи, в том смысле, что для каждого предполагаемого решения мы в состоянии всегда определить является ли оно решением или нет. Задачи в этом смысле возникают не только в математике, но и во многих других областях и поэтому во всех этих случаях следует иметь в виду, что всегда необходим критерий решения задачи. Оказывается, что с понятием задача в этом смысле связана и целенаправленная деятельность.

**Цель и целенаправленная деятельность.** Желание не пассивно. Нет смысла желать что-то, если нет никакой возможности своей активностью или действиями приблизиться к удовлетворению желания? Есть организмы – кораллы, растения, которые не имеют возможности проявить свою активность и тем самым как-то приблизить момент удовлетворения желания. Есть ли у них осознание желания или какой-либо потребности, или они просто заняты переработкой того, что к ним поступает само собой?

Желание активно – оно заставляет организм проявить свою активность в деятельности с целью удовлетворения своего желания. Тогда возникает понятие цели. Цель нельзя достичь, не имея критерия её достижения, иначе всегда можно считать, что цель уже достигнута. Критерием достижения цели является удовлетворение желания. Понятие цели является более общим, чем понятие задачи – целью задачи является ее решение и критерием достижения этой цели является критерий решенности задачи.

Определим цель как активность/деятельность, направленную на удовлетворение некоторого критерия. Определение цели не имеет смысла без критерия ее достижения, так как мы должны убедиться, что критерий не удовлетворен уже сейчас и, значит, цель, как то, чего нет сейчас и чего мы хотим достичь, имеет смысл ставить. Такое определение цели позволяет определить результат достижения цели, как все то, что мы получаем при удовлетворении критерия и достижении цели (удовлетворения желания). Мы пьем воду, когда удовлетворяем жажду, едим пищу, удовлетворяя голод, дышим, когда не хватает воздуха и так далее. Между понятиями цели и результата имеется следующая связь: результат получен, когда цель достигнута и “срабатывает” критерий наличия. Но когда цель ставится, мы имеем цель, но не имеем результата.

Определение цели парадоксально, так как активность/деятельность по удовлетворению некоторого критерия принципиально не предполагает знание о том, как достичь цели, можно задать цель, не определяя, ни как ее достичь, ни чем, ни когда. Эту парадоксальность понятия цели назовем парадоксом цели. Как мы увидим из теории функциональных систем, деятельность мозга в целенаправленном поведении постоянно направлена на разрешение парадокса цели и определения, чем, как и когда можно достичь цели.

Действие всегда целенаправленно. Если нет цели действия, то непонятно, когда (и чем) оно должно завершиться. Смысл активности и деятельности – изменить текущее состояние и/или внешние воздействия с целью достижения чего-то. Целенаправленная деятельность имеет целью удовлетворение некоторой потребности (желания) организма. Перейдем к изложению теории функциональных систем, в которой понятия цели, результата и целенаправленной деятельности являются центральными и где анализируются физиологические механизмы цели, результата и целенаправленной деятельности.

### ***9. Теория функциональных систем работы мозга***

Теория Функциональных Систем (ТФС) – есть теория работы мозга, как системы для достижения целей и разрешения парадокса цели. Поэтому изложим теорию функциональных систем, как теорию разрешения мозгом

парадокса цели, которая описывает, как мозг определяет: чем, как и когда можно достичь цели.

П.К.Анохин также говорит о понятии задача: "Когда человек решил задачу, на каком основании он убежден, что решение правильно? Параметры правильности решения должны быть определены заранее, ведь неудачи коллег дали ему опыт "нерешенности" и позволили определить, что именно он будет считать решением. Следовательно, он не предвидел результата, но он предвидел, каким условиям должно удовлетворять решение" [29]. Это определение схоже с формулировкой понятия задачи, приведенного в [27]. Такое понимание задачи и результата является принципиальным достижением ТФС и выделяет ее среди остальных известных теорий. "Пожалуй, одним из самых драматических моментов в истории изучения мозга как интегративного образования является фиксация внимания на самом действии, а не на его результатах ... мы можем считать, что результатом "хватательного рефлекса" будет не само хватание как действие, а та совокупность афферентных раздражений, которая соответствует признакам "схваченного" предмета (результат действия)" [30, 31 с.27].

"Наиболее значительным, по нашему мнению, моментом (в истории развития понятия функциональной системы. - Е.Е.) является формирование понятия "результат действия" (в 1966 г.). П.К.Анохин теперь уже пишет о результатах действия как о самостоятельной физиологической категории" [30, 31 с.27].

Заметим, что именно так понимаемый результат действия является признаком достижения цели – схватить предмет, а критерием достижения цели является "совокупность афферентных раздражений, соответствующая признакам схваченного предмета" [30,31 с.28]. Понятие результата действия физиологически фиксирует критерий достижения цели. Драматическая ситуация в изучении мозга, о которой пишет П.К.Анохин, продолжается до сих пор, так как никакая другая теория не исследует механизмы достижения результата в этом смысле.

Кратко изложим теорию функциональных систем по монографии К.В.Судакова [31]. В этой работе подводится итог не только работ самого П.К.Анохина, но и всей его школы. Прежде всего, рассмотрим каковы физиологические механизмы постановок целей организмом. Здесь наблюдается любопытная аналогия между физиологическими механизмами и математическим результатом, полученным в [27]. Как отмечено в [27] "для решения любой осмысленной задачи мы не имеем права выделить из какой-нибудь теории столь большой фрагмент, чтобы он не был слабой системой". В теории функциональных систем такими "фрагментами" являются функциональные системы организма, формирующиеся для решения стоящей перед организмом задачи.

"Функциональной системой мы называем комплекс нервных образований с соответствующими им периферическими рабочими органами, объединенный на основе выполнения какой-либо вполне очерченной и специфической функции организма. К таким очерченным функциям можно отнести, например, локомоцию, дыхание, глотание, плавание и так далее" И далее: "Состав функциональной системы не может быть определен каким-либо анатомическим принципом. Наоборот, самые разнообразные "анатомические системы" могут принимать участие и объединяться на базе одновременного возбуждения при выполнении той или иной функции организма" [30,31 с.19].

Таким образом, единицами деятельности организма являются не отдельные органы, а функции организма. Выполнение какой-либо функции организма - это и есть задача деятельности организма.

Как мы знаем цель (задача) осмысленна, если есть критерий достижения цели. Функции организма так же должны приводить к достижению некоторых целей, которые фиксируются как некоторый результат. "Основным постулатом теории функциональных систем является положение о том, что ведущим системообразующим фактором, организующим функциональную систему любого уровня организма, служит полезный для организма и системы в целом приспособительный результат. Именно результат благодаря постоянной обратной афферентации о его состоянии производит своеобразную "мобилизацию" центральных и исполнительных образований в функциональную систему" [30,31 с.34-35].

Таким образом, единицы деятельности организма – функциональные системы – являются объединениями различных органов с целью достижения некоторых полезных для организма результатов и тем самым определяются этими результатами.

Достижение результата должно некоторым образом фиксироваться, так как результат есть срабатывание некоторого критерия. Чем физиологически является критерий, фиксирующий достижение результата? Физиологически он реализуется "специальным рецепторным аппаратом".

"Каждая потребность, даже при незначительном отклонении жизненно важной функции от оптимального для метаболизма уровня, немедленно воспринимается специальными рецепторными аппаратами" [30,31 с.43]. "Наличие рецепторов в каждой функциональной системе, "стоящих на страже" конечного приспособительного результата, является исходным пунктом в механизмах саморегуляции. Меньшее отклонение результата от оптимального для метаболизма уровня вызывает меньшее возбуждение рецепторов и, соответственно, меньшую сигнализацию в нервную систему" [30,31 с.44].

Таким образом, результатом является достижение оптимального уровня некоторой физиологической константы, который фиксируется специальным рецепторным аппаратом. Сигнализация этого рецепторного аппарата о получении результата (отсутствия отклонения от оптимального для

метаболизма уровня) и достижении цели, названа в ТФС обратной афферентацией.

"...Сигнализация о потребности несет двоякую функцию. С одной стороны, она играет пусковую роль, возбуждая специальные аппараты саморегуляции, а с другой, она постоянно информирует эти же центры о результатах действий, совершенных функциональной системой. Поскольку эта сигнализация заключает в себе информацию о конечном результате, о его отклонениях от оптимального для метаболизма уровня или восстановлении ... она была названа обратной афферентацией" [30,31 с.45].

Теперь мы можем объяснить в рамках ТФС, как физиологически осуществляется постановка задач и целей организмом. Целью в ТФС является потребность организма. "Двоякая функция потребности" означает, что, во-первых, перед организмом ставится цель по восстановлению нарушенного метаболизма и, во-вторых, энергетически обеспечить достижение цели. Критерием достижения цели является получение обратной афферентации о восстановлении нормального уровня некоторого физиологически важного показателя. Если же нормальный уровень нарушен и обратная афферентация, свидетельствует о неудовлетворении критерия в данный момент, то возникает потребность, которая ставит перед организмом цель - удовлетворить соответствующую потребность. В этом случае цель (и критерий ее достижения): во-первых, сигнализируют посредством обратной афферентации об отсутствии этого наличия в данный момент (об отсутствии нормального уровня некоторого показателя), что, собственно, и означает наличие потребности; во-вторых, ожидает (формирует критерий достижения цели) получение сигнализации о восстановлении нормального уровня некоторого показателя и достижения результата; и, в-третьих, энергетически обеспечивает и фактически вынуждает организм достичь цели. Таким образом, физиологическим механизмом целеполагания и является возникновение потребности. Таким образом, потребность и есть цель, ставящаяся перед организмом. В ТФС понятия потребности и результата являются связанными понятиями. В нашем определении понятие потребности и результата объединяются понятием цели, и результат есть лишь фиксация достижения цели и удовлетворения потребности.

Взаимодействие различных результатов и целей в ТФС осуществляется несколькими способами: по "принципу доминанты", "иерархией результатов" и "моделями результатов".

Рассмотрим "принцип доминанты". Этот принцип говорит о том, что две цели одновременно достигаться не могут. "Поскольку метаболизм организма всегда многосторонен, общая метаболическая потребность организма часто многопараметрична, отражая тем самым различные стороны процесса обмена веществ... Однако всегда имеется ведущий параметр общей метаболической потребности – доминирующая потребность, наиболее важная для выживания



особи, ее рода или вида. Она возбуждает доминирующую функциональную систему и строит поведенческий акт, направленный на ее удовлетворение. Удовлетворение ведущей потребности приводит к тому, что начинает доминировать другая важная для сохранения вида или рода потребность" [30,31 с.40].

Тем самым наиболее важные для организма цели – доминирующие потребности всегда линейно упорядочены во времени. Рассмотрим теперь, как функциональные системы взаимодействуют в некоторый момент времени. По отношению к доминирующей функциональной системе, остальные функциональные системы выстраиваются в иерархию по принципу “иерархии результатов”. “По отношению к каждой доминирующей функциональной системе все другие функциональные системы выстраиваются в определенном иерархическом порядке, начиная от молекулярного, вплоть до организменного и социально-общественного уровня. Иерархия функциональных систем ..., прежде всего, включает иерархическое взаимодействие результатов их действий, когда результат деятельности одной функциональной системы входит в качестве компонента в результат деятельности другой" [30,31 с.54]. “Так, у голодного кролика доминирует функциональная система, деятельность которой направлена на поиск пищи. В это время другие функциональные системы, определяющие, например, кровяное давление, дыхание, выделение, направлены на лучшее обеспечение доминирующей пищедобывательной функциональной системы" [30,31 с.54].

Рассмотрим подробнее, как формируется иерархия результатов. Если у кролика доминирует функциональная система добывания пищи, то в процессе деятельности этой функциональной системы усиленно расходуется кислород, уменьшается содержание питательных веществ в крови, увеличивается количество вредных веществ, получающихся в процессе обмена и требующих вывода из организма и т.д. Все это приводит к сдвигу от нормального уровня целого ряда физиологических констант организма, что фиксируется рецепторами целого ряда других функциональных систем. Это автоматически “включает” эти функциональные системы, целью которых является обеспечение нормального уровня этих физиологических констант и результатами которых является достижение соответствующего нормального уровня. Так доминирующая потребность активирует функциональные системы, целью которых является обеспечение нормального уровня физиологических показателей, участвующих в достижении доминирующей потребности.

**Центральные механизмы функциональных систем.** "Согласно П.К.Анохину, центральные механизмы функциональных систем, обеспечивающих целенаправленные поведенческие акты, имеют однотипную архитектуру" [30,31]. Рассмотрим подробно архитектуру целенаправленной деятельности и физиологические механизмы разрешения парадокса цели.

**Афферентный синтез.** Начальную стадию поведенческого акта любой степени сложности составляет афферентный синтез, включающий в себя синтез мотивационного возбуждения, памяти, обстановочной и пусковой афферентации.

**Мотивационное возбуждение.** Как мы знаем, постановка цели осуществляется возникшей потребностью. Но в случае целенаправленного поведения она трансформируется в мотивационное возбуждение. “Ведущим возбуждением ... определяющим целенаправленную деятельность даже животных, является мотивационное возбуждение, формирующееся на основе ведущей внутренней потребности” [30,31 с.73]. “Доминирующая потребность всегда воспринимается комплексом специфических рецепторов, расположенных как на периферии, так и непосредственно в центральной нервной системе. С их участием появляется ответственный момент формирования целенаправленного поведения – процесс трансформации внутренней потребности в соответствующее возбуждение мозга. Так возникает доминирующая мотивация. Последняя всегда сопровождается специфическим эмоциональным ощущением. Иными словами, в процессе формирования мотивационного возбуждения материальная метаболическая потребность трансформируется в процесс возбуждения мозговых структур” [30,31 с.113]. Но мотивационное возбуждение не есть возбуждение рецепторов, стоящих “на страже” некоторой физиологической константы – это возбуждение “центральных мозговых структур”, инициируемое возникшей потребностью. Мотивационное возбуждение и есть цель, ставящаяся перед организмом в случае целенаправленного поведения. Как и для потребностей, мотивационное возбуждение не только ставит цель, но энергетически обеспечивает достижение цели. “Отрицательная эмоция, сопровождающая мотивацию, имеет важное биологическое значение. Она мобилизует усилия животного на удовлетворение возникшей потребности. Сопровождающие мотивационное возбуждение отрицательные эмоциональные ощущения способствуют более быстрому нахождению животным подкрепляющего агента”. [7, 8, с.91]

При целенаправленной деятельности достижение результата и действие подкрепляющего стимула субъективно ощущается появлением положительной эмоции (ликвидацией отрицательной). Целенаправленному поведению надо обучаться, поэтому надо запоминать ту последовательность возбуждений, которая привела к достижению результата. Положительные эмоции (ликвидация отрицательных) имеют, поэтому, ещё и подкрепляющую (санкционирующую) роль, которая фиксирует в памяти всю последовательность действий, приведшей к достижению цели.

**Память.** Память – второй компонент афферентного синтеза. Как уже отмечалось, при действии подкрепляющего раздражителя, означающего факт достижения результата, закрепляется вся последовательность возбуждений, которая привела к достижению цели. “... Извлечение прошлого опыта из памяти

происходит по той же нейрохимической трассе, по которой он был зафиксирован в момент приобретения опыта” [30,31 с.91].

При подкреплении фиксируется вся последовательность возбуждений, которая привела к достижению цели, начиная с мотивационного возбуждения. Поэтому возникновение мотивационного возбуждения достаточно для “извлечения из памяти” всех предыдущих последовательностей действий, приведших к достижению результата и подкреплению. Мотивационное возбуждение обладает кроме того химической специфичностью, позволяющей “извлекать из памяти” все пути достижения именно этой цели, которая ставится данным мотивационным возбуждением. “Каждая мотивация строится специфическими по своему химическому метаболизму восходящими активирующими влияниями соответствующих подкорковых центров на кору головного мозга. А это в свою очередь приводит к тому, что с помощью мотивационных влияний животные производят активный отбор только специальных раздражителей внешнего мира для удовлетворения своих доминирующих потребностей” [30,31 с.79-80].

**Обстановочная афферентация.** При фиксации следа в памяти, фиксируется и та обстановка, в которой удалось получить результат. Эта обстановка фиксируется как необходимые условия, наряду с мотивацией, требуемые для достижения результата. Поэтому мотивационное возбуждение в данной обстановке “извлекает из памяти” только те способы достижения цели, которые возможны в данной обстановке. Таким образом, обстановочная афферентация, при взаимодействии с извлеченным из памяти опытом, определяет, что и как можно делать в данной обстановке для достижения цели.

**Пусковая афферентация.** Четвертым компонентом афферентного синтеза является пусковая афферентация. По смыслу она так же является обстановочной афферентацией, только связанной не со стимулами обстановки, а со временем и местом достижения результата. “... специальные раздражители вскрывают сформированную на основе взаимодействия мотивационного, обстановочного возбуждения и механизмов памяти так называемую предпусковую интеграцию. Эти пусковые раздражители приурочивают, таким образом, целенаправленную деятельность к определенному месту и времени” [30,31 с.75]. Поэтому пусковая афферентация отвечает на вопрос: когда и где можно достичь результат.

Таким образом, на стадии афферентного синтеза в значительной степени разрешается парадокс цели и определяется, что, как, где и когда можно делать для достижения цели. “Итак, на стадии афферентного синтеза решается несколько вопросов: что делать (на основе сопоставления внешних и внутренних раздражителей), как делать (на основе памяти) и когда делать (на основе действия пусковых раздражителей)” [30,31 с.80].

Таким образом, мотивационное возбуждение как цель, с учетом имеющегося опыта и обстановки, автоматически разрешает парадокс цели и

определяет, чем, как и когда ее можно достичь. “Вытягивая” из памяти весь накопленный опыт, мотивационное возбуждение как цель преобразуется в конкретную цель, определяющую способ своего достижения. Конкретная цель называется в ТФС “высшей мотивацией”.

**Принятие решений.** На стадии афферентного синтеза мотивационным возбуждением может быть извлечено из памяти несколько способов достижения цели. На стадии принятия решения выбирается только один способ – конкретный план действий. “В соответствии с исходной потребностью на стадии принятия решения избирается только одна конкретная линия поведения” [30,31 с.80].

Принятие решений – очень тонкий процесс и должен учитывать:

- вероятность достижения цели в данной ситуации [32-33];
- суммарные энергетические затраты того или иного способа достижения цели с учетом информационной определенности возможности достижения цели (переключающая функция эмоций) [32-33];
- объем извлеченного из памяти опыта, включая доминантные формы поведения в случае, когда имеющегося опыта недостаточно для принятия решения (компенсаторная функция эмоций) [32-33].

**Акцептор результатов действия.** Пусть выбран некоторый план действий. Он еще не гарантирует нам, что конечный результат обязательно будет достигнут. И даже не гарантирует, что любой промежуточный результат так же будет достигнут. Цель может быть достигнута, только если каждый из промежуточных результатов плана действий будет достигнут. Мотивационное возбуждение “извлекает из памяти” так же всю последовательность и иерархию результатов, которые должны быть получены при выполнении плана действий. Эта последовательность и иерархия результатов определяется в ТФС как акцептор результатов действия. “Именно доминирующая мотивация “вытягивает” в аппарате акцептора результатов действия весь накопленный опыт до конечного, удовлетворяющего лежащую в ее основе потребность результата, создавая определенную модель или программу поведения. С этих позиций модель акцептора результатов действия представляет собой доминирующую потребность организма, трансформированную в форме опережающего возбуждения мозга, как бы в своеобразный комплексный “рецептор” соответствующего подкрепления” [30,31 с.84]. “... следует отметить, что в акцепторе результатов действия программируется не только континуум результатов поведения, но и вся мозаика действий, направленная на достижение каждого результата” [30,31 с.84].

Таким образом, мотивационное возбуждение, преобразуясь в конкретную цель, извлекает из памяти также и конкретный результат этой конкретной цели, которым является вся последовательность и иерархия результатов, которые должны быть получены в процессе достижения конкретной цели и выполнения плана действий, т.е. акцептор результатов действия. Поэтому акцептор

результатов действия есть конкретный результат достижения конкретной цели. "Формирование "цели" в центральной архитектуре поведенческого акта связано с построением следующей стадии системной организации поведенческого акта аппарата предвидения будущего результата (всей последовательности и иерархии результатов), удовлетворяющего доминирующую потребность, – аппарата акцептора результатов действия" [30,31 с.81]. "Итак, формирование предвидения будущего результата в функциональных системах – акцептора результатов действия – представляет собой физиологический аппарат формирования цели" [30,31 с.87].

Преобразование мотивационного возбуждения, как цели, в конкретную цель, а плана действий в конкретный результат (акцептор результатов действия), преобразует первоначальную парадоксальную цель, для которой не определено чем, как и когда достигать цель, в не парадоксальную конкретную цель, в которой конечная цель (и результат) разбиты на подцели (и подрезультаты) так, что для каждой подцели уже известно, чем, как и когда ее можно достичь. Но парадоксальность определения цели этим полностью не снимается, т.к. даже если мы знаем по прошлому опыту, что цель (результат) достигается таким-то действием, то у нас нет, и в принципе не может быть, никакой гарантии, что и в этот раз данное действие приведет к этому же результату. Приведет ли некоторая последовательность действий к результату или не приведет, всё равно должно быть проверено некоторым критерием, который в данном случае является акцептором результатов действия.

**Причинность и нейрофизиологическое обеспечение акцептора результатов действий.** Нейрофизиологически предвосхищение реализуется специальными коллатеральными ответвлениями от произведенных действий, которые поступают на «вход» мозга, конвергируя с афферентацией от входных стимулов: *«Речь идет о коллатеральных ответвлениях пирамидного тракта, отводящих ко многим межзачечным нейронам "копии" тех эфферентных посылок, которые выходят на пирамидный тракт ... Таким образом, момент*

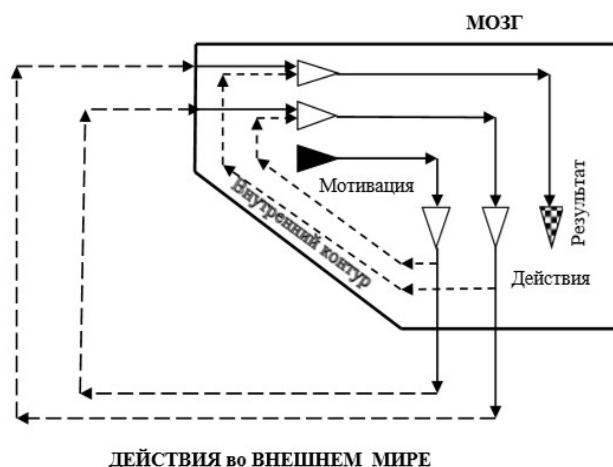


Рис. 5. Формирование акцептора результатов действия.

*принятия решений и начала выхода рабочих эфферентных возбуждений (начало действий – Е.Е.) из мозга сопровождается формированием обширного комплекса возбуждений, состоящего из афферентных признаков будущего результата и из коллатеральной “копии” эфферентных возбуждений, вышедших на периферию по пирамидному тракту к рабочим органам» [31, с. 97].*

Фактически это означает выработку условных (причинных) связей между осуществлением действий (эффекторным возбуждением) и последующим восприятием результатов действий, представленных их афферентными признаками (см. рис.5). Осуществляя действия, мы сразу же по коллатеральям посылаем условный сигнал о том, что сейчас получим афферентацию о результатах этих действий. Это приводит к выработке условных (причинных) связей между действиями и их результатами, отражающими связи действий и результатов, происходящих во внешнем мире. Эти условные связи, осуществляемые мозгом по внутреннему контуру (см. рис.5), позволяют прогнозировать результаты действий, происходящих во внешнем мире, ещё до появления самих результатов. Когда мотивационным возбуждением активируются различные последовательности действий, по достижению поставленной цели, то одновременно по «внутреннему контуру» прогнозируется вся последовательность и иерархия результатов, которые будут получены в процессе достижения цели. Когда принято решение об определенном плане действий, то одновременно по «внутреннему контуру» предвосхищается достижение всех промежуточных результатов, которые составляют акцептор результатов действия.

**Эффекторные механизмы функциональных систем.** Так как реальная ситуация всегда чем-то отличается от тех ситуаций, которые были извлечены из памяти и учтены в процессе принятия решений как наиболее адекватные данной ситуации, то неизбежно могут возникать «рассогласования» между ожидаемыми результатами в конкретном критерии достижения цели и реально поступающей обратной афферентацией о результатах совершенных действий. *«Оценка результата действия происходит с помощью активной ориентировочно-исследовательской деятельности .... Ориентировочно-исследовательская реакция возникает и усиливается во всех случаях, когда результат совершенного действия неожиданно не соответствует свойствам сформированного на основе афферентного синтеза акцептора результатов действия, то есть при возникновении «рассогласования» в поведенческой деятельности. Благодаря включению такой реакции немедленно перестраивается афферентный синтез, принимается новое решение, строится новая программа действия и поиск продолжается в новом направлении до тех пор, пока результаты совершенного действия не совпадут*

полностью или в значительной степени со свойствами акцептора результатов действия» [31; с. 90-91].

Таким образом, что при рассогласовании поступающей «обратной афферентации» с афферентацией, ожидаемой акцептором результатов действия, происходит перестройка афферентного синтеза и принимается новое решение, что означает формирование новой конкретной цели, хотя мотивационное возбуждение и соответствующая конечная цель остаются теми же самыми.

Если поведенческий акт приводит к достижению цели, то вся последовательность действий подкрепляется и «заносится» в память.

*«Целенаправленный поведенческий акт ... заканчивается последней санкционирующей стадией. На этой стадии при действии раздражителя, удовлетворяющего ведущую потребность, – подкрепления в общепринятом смысле – параметры достигнутого результата через раздражения соответствующих рецепторов... вызывают потоки обратной афферентации, которая по всем своим свойствам соответствует ранее запрограммированным свойствам подкрепляющего раздражителя в акцепторе результатов действия. При этом удовлетворяется ведущая потребность и поведенческий акт заканчивается»* [31; с. 89, 90].

### **10. Принятие решений. Переключающая функции эмоций**

Процесс принятия решений осуществляется с помощью переключающей функции эмоций, определённой в информационной теории эмоций П.В.Симонова [32-33], в которой анализируются все возможные способы достижения цели, вычисляются вероятности достижения цели для каждого из способов и определяется эмоциональная оценка этого способа. Эти способы (например, при движении по некоторой местности), имеют различную вероятность, различные энергетические затраты и различные возможные опасности, связанные с отрицательными эмоциями, и так далее. В этом случае задача принятия решений становится как минимум трёх параметрической – вероятность достижения цели, суммарное значение отрицательных эмоций (от энергетических затрат, опасностей, риска, трудностей и т.д.) и значение положительных эмоций (от достижения цели). Для эффективного принятия решений необходим синтез всех этих показателей в один параметр, что и осуществляется эмоциями. Они интегрируют как вероятность достижения цели, так и положительные и отрицательные эмоции, связанные с достижением цели. На основе эмоций и принимается решение: *«Зависимость эмоций не только от величины потребности, но и от вероятности её удовлетворения чрезвычайно усложняет конкуренцию сосуществующих мотивов, в результате чего поведение нередко оказывается переориентированным на менее важную, но легко достижимую Цель: “синица в руках” побеждает “журавля в небе” ...»* [32, разд. 2.2].

Переключающая функция эмоций реализуется тем, что:

- по всем извлеченным из памяти способам достижения цели получается прогноз достижения цели и передается в блок эмоций;
- принимается решение о выборе того или иного целенаправленного поведения, которое обладает максимальной эмоциональной оценкой;
- формирует план достижения цели и акцептор результатов действий.

Достижение цели сопровождается подкрепляющей функцией эмоций. П.В.Симонов отмечал, что необходимым условием подкрепления является не сам подкрепляющий раздражитель (санкционирующая афферентация), а действие положительных эмоций при наличии мотивации: *“Однако ни афферентация из полости рта (санкционирующая афферентация), ни голодовое возбуждение (мотивация) сами по себе не могут играть роль подкрепления ... Только интеграция голодового возбуждения от фактора, способного удовлетворить данную потребность, т.е. механизм, генерирующий положительную эмоцию, обеспечивает выработку условного рефлекса”* [32, с.34].

Участие оценки вероятности в формировании эмоций сразу же делает подкрепление более точным: любая последовательность действий, приближающая к цели и увеличивающая прогноз достижения цели, вызывает положительную эмоцию и подкрепляет те «мозговые структуры», которые осуществили эту последовательность действий. Следовательно, эмоции, основанные на вероятностном прогнозировании, осуществляют подкрепление каждой успешной последовательности действий, увеличивающей вероятность достижения конечной цели.

### ***11. Принцип сенсорных коррекций Н.А. Бернштейна***

В работе [34, с.25-26] Н.А.Бернштейн пишет о том, что при большом числе степеней свободы практически невозможно рассчитать движение сложной кинематической системы, например, руки: « ... при многих степенях свободы у системы суммируются ... погрешности, приносимые каждой из степеней свободы; при большом количестве последних суммарная ошибка сможет вырасти до такой величины, которая покроет все преимущества, в принципе создаваемые богатым разнообразием подвижности сложной цепи. Например, если каждая из степеней свободы руки и пальца пианиста, сидящего за инструментом, даст погрешность всего в  $1^\circ$ , то, суммируясь, эти погрешности смогут дать отклонение кончика пальца на 5-6 см (хотя по отдельным звеньям, например, пальцевых фаланг, составляющие погрешности не превысят при этом 0,05 см), т.е. вызовут промахивание на терцию или кварту .... Еще более существенное значение имеют осложнения динамические. В сложной кинематической цепи, каждое звено которой обладает известной тяжелой и инертной массой, всякая сила, возникающая в одном из звеньев, тотчас же



вызывает целую систему реактивных или отраженных сил, передающихся на все остальные звенья. Это взаимное влияние звеньев цепи друг на друга во всех мыслимых сочетаниях создает в общей совокупности огромное количество силовых взаимодействий, совершенно необозримое математически и представляющее непреодолимые трудности для аналитического решения. Эти реактивные силы наслаиваются на те силы, которые находятся в распоряжении организма для управления движениями системы, и на внешние силы, подвластные ему всегда лишь в большей или меньшей степени, и делают общую динамическую картину движения цепи чрезвычайно осложненной, а главное – практически непредсказуемой из-за их крайней механической запутанности».

Как мозг справляется с этой проблемой? «Решение вопроса о неоднозначности лежит в использовании для регулирования эффекторного процесса сенсорных сигналов о позе кинематической цепи и о мере растяжения каждой из влияющих на ее движения мышц. Далее уже легко представить себе, что при наличии такого непрерывно текущего потока сигналов с периферии центральной нервной системе в принципе нетрудно справиться с любой расточительностью по части степеней свободы подвижности. Действительно, как только орган, находящийся под действием внешних и реактивных сил, плюс еще какая-то добавка внутренних мышечных сил отклонится в своем результирующем движении от того, что входит в намерения центральной нервной системы, эта последняя получит исчерпывающую сигнализацию об этом отклонении, достаточную для того, чтобы внести в эффекторный процесс соответственные адекватные поправки. Весь изложенный принцип координирования заслуживает, поэтому названия *принципа сенсорных коррекции*» [34, с.34].

Из принципа сенсорных коррекции с необходимостью следует важный вывод [35]: планировать определенную последовательность действий заранее невозможно, планировать можно только последовательность достигаемых результатов, а выбор того или иного действия должен осуществляться в реальном режиме времени, в каждый текущий момент по принципу сенсорных коррекций, на основании поступающей обратной афферентации от уже осуществленных действий. Поэтому конкретный план действий должен фиксировать **только последовательность и иерархию результатов**, которые надо получить для достижения конечной цели.

## 12. Формальная модель

Данная формальная модель продолжает работы [36-39] по формализации информационных процессов работы мозга, основанные на теории функциональных систем.

Приведем формальную модель, суммирующую упомянутые принципы и законы. Эта модель следующим образом учитывает приведенные рассуждения:

1. использует формальную модель нейрона, обнаруживающую причинные связи и основанную на семантическом вероятностном выводе;
2. осуществляет постановку цели в целенаправленном поведении, формирует функциональную систему и акцептор результатов действия, которые непрерывно сверяют достигнутые результаты с ожидаемыми в акцепторе результатов действия;
3. автоматически формирует подцели и подкрепляет достижение подцелей, если их достижение увеличивает вероятность достижения конечной цели;
4. моделирует сенсорные коррекции;
5. выбирает действие в реальном режиме времени с учетом текущей ситуации и получаемой афферентации;
6. планирует достижение цели в соответствии с последовательностью и иерархией функциональных систем по достижению всех результатов, требуемых для достижения конечной цели;
7. принимает решение об определенном способе достижения цели.

Будем предполагать, что эта модель является системой управления некоторого анимата, функционирующей в дискретном времени  $t=0,1,\dots$  как это было сделано в работе [37].

Пусть анимат имеет некоторый набор сенсоров  $S_1, \dots, S_n$ , характеризующих состояние, как самого анимата, так и внешней среды. Каждый сенсор  $S_i$  имеет некоторое множество возможных показаний сенсора  $VS_i$ . Анимат также располагает множеством возможных действий в среде  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ . Любое действие анимата, совершаемое в момент времени  $t_i$ , может приводить, в следующий момент времени  $t_i+1$  к какому-то изменению среды, и как следствие, к изменению показаний его сенсоров.

Поскольку анимат «воспринимает» окружающий мир только через свои сенсоры, то, с точки зрения анимата, состояние системы в каждый конкретный момент времени может быть записано в виде вектора показаний всех сенсоров  $V(t) = (v_1, \dots, v_n)$ , где  $v_i \in VS_i$  – показание  $i$ -го сенсора в момент времени  $t$ , причем состояния с одинаковыми показаниями сенсоров для анимата неразличимы. Множество всех возможных состояний системы обозначим как  $S = (VS_1 \times VS_2 \times \dots \times VS_n)$ .

Поскольку, в общем случае, сенсоры анимата не могут учитывать всех физических законов среды и имеют собственные физические ограничения (например, по чувствительности, радиусу действия и т.п.), то при совершении аниматом некоторого действия в состоянии  $s \in S$ , система, с точки зрения анимата, может переходить в одно или несколько возможных состояний. Тогда, действие  $a_i$  анимата можно определить как функционал, переводящий

систему «анимат – внешняя среда» из одного состояние в другое с некоторой вероятностью:

$$a_i : (S_i) \rightarrow (S_i \times S \times P) ,$$

где  $S_i$  – подмножество  $S$  состояний системы, в которых действие  $a_i$  имеет смысл (осуществимо),  $S_i \times S \times P$  – множество троек  $(s_0, s, p)$ , где  $s \in S$  – полученное в результате действия состояние,  $p \in [0, 1]$  – вероятность его достижения из состояния  $s_0 \in S_i$  при совершении действия  $a_i$ , вычисляемая в соответствии с объективными факторами осуществления действия во внешнем мире.

Определим понятие события и истории событий. Под событием  $e = (s_0, s, p)$  будем понимать единичный факт перевода системы из состояния  $s_0 \in S_0$  в состояние  $s_e \in S$  в результате совершения действия  $a$ . Тогда историей  $H$  назовем множество пар  $(e, t)$ , где  $e$  – событие,  $t$  – момент времени, когда произошло данное событие.

Теперь от общей модели «анимат-внешняя среда» перейдем к более конкретной дискретной модели. На множестве состояний системы  $S = (VS_1 \cup VS_2 \cup \dots \cup VS_n)$  определим множество предикатов  $PS = \{P_1, \dots, P_k\}$ , каждый из которых вычисляется на основе показаний сенсоров. Каждое состояние системы, таким образом, может быть записано в виде вектора значений предикатов из  $PS, s = (p_1, \dots, p_k), p_i \in \{0, 1\}$ , где 1 означает истинность соответствующего предиката, а 0 – его ложность.

Задачей анимата является достижение некоторой цели. Определим цель  $Goal$  как состояние системы  $s_{Goal} = (p_{i_1}^{goal}, \dots, p_{i_{goal}}^{goal})$ , которое требуется достичь. Запись  $(p_{i_1}^{goal}, \dots, p_{i_{goal}}^{goal})$  означает, что предикаты  $p_{i_1}^{goal}, \dots, p_{i_{goal}}^{goal}$  при достижении цели должны быть истинны.

Уточним понятие события и истории. Под событием  $e = (s_0, s, p)$ , как и раньше, будем понимать единичный факт перевода системы из состояния  $s_0 = (p_1^0, \dots, p_k^0)$  в состояние  $s_e = (p_1^e, \dots, p_k^e)$  в результате совершения действия  $a$  под историей событий – множество пар  $(e_t, t)$ , где  $e_t = (s_t, s_{t+1}, a)$  – событие,  $t$  – момент времени, когда произошло данное событие.

Правила  $R$ , предсказывающие изменение состояния после осуществления действия  $a$  по внутреннему контуру работы мозга (см. рис. 5), определим как преобразование  $R = (s_0 \xrightarrow[p]{a} s_e)$ , где:

$s_0$  – начальное состояние системы  $(p_{i_1}^0, \dots, p_{i_0}^0)$  ;

$s_e$  – конечное состояние системы  $(p_{i_1}^e, \dots, p_{i_e}^e)$  ;

$a$  – действие, которое переводит начальное состояние в конечное;

$p$  – вероятность, с которой действие переводит начальное состояние в конечное.

Вероятность правила  $R$  рассчитывается следующим образом: если  $n$  – число случаев, когда начальным состоянием было  $s_0$  и выполнялось действие  $a$ , а  $m$  – число тех случаев из  $n$ , когда действие  $a$  переводило состояние  $s_0$  в состояние  $s_e$ , тогда  $p=m/n$ . Вероятности правил  $R$  (предсказывающие переход из состояния  $s_0$  в состояние  $s_e$  после осуществления действия  $a$  по внутреннему контуру мозга) и вероятности из множества  $P$  (предсказывающие переход из состояния  $s_0$  в состояние  $s_e$  при осуществлении действия  $a$ , вычисляемые в соответствии с объективными факторами осуществления действия во внешнем мире) – различные величины. Можно сказать, что задачей обучения является максимальное приближение «субъективных» вероятностей правил  $R$ , оцениваемых аниматом, к объективным вероятностям  $P$ , характеризующим взаимодействие анимата с внешней средой.

Обнаружение правил осуществляется нейронами, замыкающими условные связи по внутреннему контуру работы мозга, в соответствии с семантическим вероятностным выводом.

Определим функциональную систему  $FSC$ , реализующую сенсорные коррекции, как набор  $FSC = (s_{Goal}, R_1, \dots, R_n, p_{FSC})$ , который осуществляет преобразование  $s_0 \xrightarrow[p_{FSC}]{R_1, \dots, R_n} s_{Goal}$ , где  $s_{Goal} = (p_{i_1}^{goal}, \dots, p_{i_{goal}}^{goal})$  – целевое состояние функциональной системы,  $R_1, \dots, R_n$  – правила вида  $s_0 \xrightarrow[p]{a} s_e$ , с помощью которых из различных начальных состояний  $s_0$  с помощью некоторого действия  $a$  можно попасть в целевое состояние  $s_{Goal}$  (рис. 6). Цель  $s_{Goal}$  функциональной системы ставится соответствующим мотивационным возбуждением. Способ вычисления вероятности  $p_{FSC}$  приведен ниже.

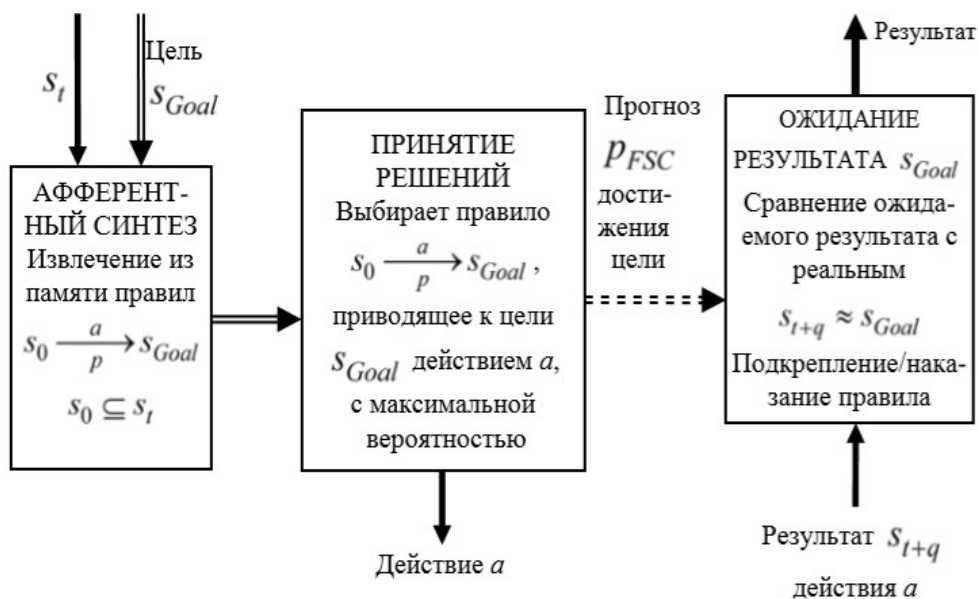


Рис. 6. Схема функциональной системы, реализующей сенсорные коррекции.

В соответствии с принципом сенсорных коррекций Н.А.Бернштейна, принципиально нельзя знать заранее точный результат предыдущего движения. Поэтому выбрать максимально вероятное правило  $s_0 \xrightarrow[p]{a} s_{Goal}$ , приводящее к достижению цели, в текущем состоянии  $s_t = (p_1^t, \dots, p_k^t)$  можно только после поступления афферентация о завершении предыдущего действия, чтобы выбрать правило с начальным состоянием  $s_0 = (p_{i_1}^0, \dots, p_{i_0}^0)$ , соответствующим текущему состоянию  $\{p_{i_1}^0, \dots, p_{i_0}^0\} \subset \{p_1^t, \dots, p_k^t\}$  (обозначим это как  $s_0 \subseteq s_t$ , на рис. 6).

Когда функциональной системой верхнего уровня, удовлетворяющей некоторую потребность, принимается решение и перебираются различные последовательности/иерархии действий по достижению цели, то мы также принципиально не можем знать тех состояний  $s_t$ , которые возникнут в результате реального осуществления этой последовательности/иерархии действий. Мы также не можем знать, какие будут выбраны правила для достижения цели каждого конкретного действия в этой последовательности/иерархии. Тем не менее, для принятия решения необходим прогноз вероятности достижения цели. Оценку вероятности достижения цели функциональной системой можно подсчитать, опираясь на статистику достижения цели следующим образом: если  $n$  – число случаев, когда поступил запрос на достижение цели  $s_{Goal}$ , а  $m$  – число случаев, когда выбранные правила и последовательности/иерархии действий привели к достижению цели  $s_{Goal}$ , то  $p_{FSC} = m/n$ . Поэтому на рис.6 прогноз достижения цели осуществляется с вероятностью  $p_{FSC}$  достижения цели функциональной системой.

Когда в момент времени  $t$  пришел запрос на достижение цели  $s_{Goal}$  функциональной системой  $FSC$  в текущем состоянии  $s_t = (p_1^t, \dots, p_k^t)$ , то она:

1. выбирает правило  $s_0 \xrightarrow[p]{a} s_{Goal}$  из набора  $R_1, \dots, R_n$  которое:
  - a. применимо в текущей ситуации  $s_0 \subseteq s_t$ ;
  - b. может достичь цели  $s_{Goal}$  с максимальной вероятностью  $p$ ;
2. ожидает в акцепторе результатов действия достижение цели  $s_{Goal}$  после осуществления действия  $a$ ;
3. сравнивает акцептором результатов действия достигнутое состояние  $s_{t+q} = (p_1^{t+q}, \dots, p_k^{t+q})$  в момент  $t+q$ , в результате осуществления действия  $a$ , с целью  $s_{Goal} \approx s_{t+q}$ , если  $s_{Goal} \subset s_{t+q}$ , то цель достигнута и правило  $s_0 \xrightarrow[p]{a} s_{Goal}$  подкрепляется (его статистика увеличивается);
4. если для текущего состояния нет подходящего правила, либо после применения выбранного правила и соответствующего ему действия целевое

состояние  $s_{Goal}$  не достигнуто, то функциональной системой  $FSC$  цель не достигнута и выбранное правило наказывается (его статистика уменьшается).

Функциональные системы в общем случае являются последовательностями и иерархией функциональных систем  $FSC$ .

Функциональной системой  $FS$ , объединяющей последовательность функциональных систем вида  $FSC$ , будет набор

$$FS = (s_{Goal}, FSC_1, \dots, FSC_n, p_{FS}) \text{ , реализующий преобразование}$$

$$FS = s_0 \xrightarrow{FSC_1, \dots, FSC_n} s_{Goal} \text{ ,}$$

$$\rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow s_{Goal} \quad p_{FS} = p_{FSC_1} \cdot \dots \cdot p_{FSC_n}$$

где

$$FSC_1 = (s_0 \xrightarrow{R_1^1, \dots, R_{v_1}^1} s_1) \text{ , } FSC_2 = (s_0 \xrightarrow{R_1^2, \dots, R_{v_2}^2} s_2) \text{ , } \dots \text{ , } FSC_n = (s_0 \xrightarrow{R_1^n, \dots, R_{v_n}^n} s_{Goal})$$

функциональные системы рефлекторных колец. Цель функциональной системы состоит в последовательном достижении целей  $s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow s_{Goal}$  функциональными системами  $FSC_1, \dots, FSC_n$  с суммарной вероятностью  $p_{FS} = p_{FSC_1} \cdot \dots \cdot p_{FSC_n}$ . Такие функциональные системы могут образовываться автоматически, как это описано ниже.

В общем случае, функциональные системы  $FS$  могут объединять, как последовательности и иерархии функциональных систем  $FSC$ , так и функциональных систем  $FS$ . Тогда функциональная система  $FS = (s_{Goal}, FS_1^1, \dots, FS_n^1, p_{FS})$  есть последовательность функциональных систем, реализующих преобразование

$$FS = s_0 \xrightarrow{FS_1^1, \dots, FS_n^1} s_{Goal} \text{ ,}$$

$$\rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow s_{Goal} \quad p_{FS} = p_{FS_1^1} \cdot \dots \cdot p_{FS_n^1}$$

где  $FS_i^1$  – либо  $FS$ , либо  $FSC$ . Например, если  $FS_i^1, FS_j^1 \in \{FS_1^1, \dots, FS_n^1\}$ ,  $i < j$  реализуют преобразования

$$FS_i^1 = \frac{FS(i)_1^2, \dots, FS(i)_{n_i}^2}{\rightarrow s_1^i \rightarrow s_2^i \rightarrow \dots \rightarrow s_i} \rightarrow s_i \text{ , } FS_j^1 = \frac{FS(j)_1^2, \dots, FS(j)_{n_j}^2}{\rightarrow s_1^j \rightarrow s_2^j \rightarrow \dots \rightarrow s_j} \rightarrow s_j \text{ ,}$$

то функциональные системы  $FS(i)_1^2, \dots, FS(i)_{n_i}^2, FS(j)_1^2, \dots, FS(j)_{n_j}^2$  находятся уже на уровне 2 и преобразование, реализуемое функциональной системой  $FS$ , имеет вид

$$FS = s_0 \xrightarrow{FS_1^1, \dots, FS_i^1[FS(i)_1^2, \dots, FS(i)_{n_i}^2], \dots, FS_j^1[FS(j)_1^2, \dots, FS(j)_{n_j}^2], \dots, FS_n^1} s_{Goal} \text{ .}$$

$$\rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow [\rightarrow s_1^i \rightarrow s_2^i \rightarrow \dots \rightarrow s_i] \dots \rightarrow [\rightarrow s_1^j \rightarrow s_2^j \rightarrow \dots \rightarrow s_j] \dots \rightarrow s_{Goal} \quad p_{FS}$$

Каждая функциональная система представляет собой тот или иной способ достижения цели  $s_{Goal}$ . В соответствии с теорией функциональных систем, ведущим уровнем организации движений является верхний (доминирующий) уровень  $FS = (s_{Goal}, FS_1^1, \dots, FS_n^1, p_{FS})$  ранга 1, соответствующий смыслу решаемой задачи. Функциональная система верхнего уровня может вызывать функциональные системы более низких уровней.

Когда приходит запрос на достижение цели  $s_{Goal}$  функциональной системой  $FS$ , то она:

1) выбирает правила, применимые в текущей ситуации, для первой из функциональных систем  $FSC$ , входящих в данную функциональную систему. Если для текущего начального состояния  $s_0$  первой  $FSC$  нет подходящего правила, то функциональная система  $FS$  не применима к данной ситуации;

2) формирует «конкретную цель» (высшую мотивацию) в виде последовательности и иерархии целей всех, входящих в нее, функциональных подсистем. Например, для приведенной выше функциональной системы это будет последовательность

$$s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow [\rightarrow s_1^i \rightarrow s_2^i \rightarrow \dots \rightarrow s_i] \dots \rightarrow [\rightarrow s_1^j \rightarrow s_2^j \rightarrow \dots \rightarrow s_j] \dots \rightarrow s_{Goal}$$

3) прогнозирует достижение цели  $s_{Goal}$  с вероятностью  $p_{FS}$ ;

4) ожидает (акцептором результатов действия) достижение всей последовательности и иерархии целей всех входящих в нее  $FSC$  после выполнения соответствующих действий;

5) запускает последовательное выполнение действий в функциональных подсистемах  $FSC$ ;

6) если в какой-либо функциональной подсистеме цель не достигнута, что фиксируется акцептором результатов действий этой функциональной системы, то возникает ориентировочно-исследовательская реакция, которая выбирает другую функциональную систему  $FS$  для достижения цели  $s_{Goal}$ . Правила этой функциональной подсистемы наказываются;

7) достижение результата каждой функциональной подсистемой фиксируется акцептором результатов действия и подкрепляется.

Опишем все элементы архитектуры функциональных систем, используя введенные определения.

**Афферентный синтез** включает в себя синтез мотивационного возбуждения, памяти, обстановочной и пусковой афферентации, а также обратную афферентацию об осуществленных действиях, приходящую по коллатералям пирамидного тракта. Вся эта афферентация может быть задана набором предикатов  $PS = \{P_1, \dots, P_k\}$ , включая предикаты *мотивационного возбуждения, обстановочной и пусковой афферентаций*.

Мотивационным возбуждением задает цель  $Goal = (p_{i_1}^{goal}, \dots, p_{i_{goal}}^{goal})$ .

**Память.** Каждая цель может достигаться различными последовательностями действий, реализуемыми различными функциональными системами. Поэтому мотивация извлекает из памяти все функциональные системы  $FS = (s_{Goal}, FS_1^1, \dots, FS_n^1, p_{FS})$ , приводящие к достижению этой цели.

**Обстановочная и пусковая афферентации** задают текущее состояние системы  $s_t = (p_1, \dots, p_k)$  в каждый момент времени  $t$ . Начальные состояния  $s_0 = (p_{i_1}^0, \dots, p_{i_0}^0)$  применяемых в этот момент правил  $s_0 \xrightarrow[p]{a} s_{Goal}$  должны соответствовать текущему состоянию системы  $s_0 \subseteq s_t$ .

«Вытягивая» из памяти весь накопленный опыт, мотивационное возбуждение как цель преобразуется в **конкретную цель** «высшую мотивацию», определяющую способ своего достижения.

Для каждой функциональной системы  $FS = (s_{Goal}, FS_1^1, \dots, FS_n^1, p_{FS})$  конкретной целью является вся последовательность и иерархия целей всех входящих в нее функциональных подсистем, например

$$s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow [\rightarrow s_1^i \rightarrow s_2^i \rightarrow \dots \rightarrow s_i] \dots \rightarrow [\rightarrow s_1^j \rightarrow s_2^j \rightarrow \dots \rightarrow s_j] \dots \rightarrow s_{Goal}.$$

**Принятие решения.** На стадии афферентного синтеза мотивационным возбуждением может быть извлечено из памяти множество функциональных систем  $FS = (s_{Goal}, FS_1^1, \dots, FS_n^1, p_{FS})$ , достигающих цель  $s_{Goal}$ . На стадии принятия решения выбирается одна из них и фиксируется **конкретный план действий**. Процесс принятия решений осуществляется переключающей функции эмоций.

**Акцептор результатов действия.** Мотивационное возбуждение, преобразуясь в конкретную цель, извлекает из памяти также и конкретный критерий достижения цели – **акцептор результатов действия**, который состоит из всей совокупности критериев по достижению всей последовательности и иерархии целей

$$s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow [\rightarrow s_1^i \rightarrow s_2^i \rightarrow \dots \rightarrow s_i] \dots \rightarrow [\rightarrow s_1^j \rightarrow s_2^j \rightarrow \dots \rightarrow s_j] \dots \rightarrow s_{Goal}.$$





Рис. 7. Схема функциональной системы.

### Автоматическое формирование новых функциональных систем.

Новые функциональные системы  $FS$  формируются автоматически путем объединения последовательностей функциональных систем, если они реализуют некоторую устоявшуюся последовательность действий.

Последовательность функциональных систем

$$\begin{aligned}
 FS_1 &= \frac{FS_1^1, \dots, FS_{n_1}^1}{\rightarrow s_1^1 \rightarrow s_2^1 \rightarrow \dots \rightarrow s_1} \xrightarrow{P_{FS_1}} s_1, & FS_2 &= \frac{FS_1^2, \dots, FS_{n_2}^2}{\rightarrow s_1^2 \rightarrow s_2^2 \rightarrow \dots \rightarrow s_2} \xrightarrow{P_{FS_2}} s_2, \dots, \\
 FS_n &= \frac{FS_1^n, \dots, FS_{n_n}^n}{\rightarrow s_1^n \rightarrow s_2^n \rightarrow \dots \rightarrow s_n} \xrightarrow{P_{FS_n}} s_n
 \end{aligned}$$

автоматически объединяется в функциональную систему

$$FS = \frac{FS_1, \dots, FS_n}{\rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow s_n} \xrightarrow{P_{FS} = P_{FS_1} \cdot \dots \cdot P_{FS_n}} s_n,$$

если последовательность действий не прерывается и не переключается в середине выполнения на другую последовательность действий, так как в этом случае вероятность достижения цели  $P_{FS}$  функциональной системой не будет равна произведению  $P_{FS_1} \cdot \dots \cdot P_{FS_n}$  вероятностей входящих в нее функциональных подсистем.

Автоматическое объединение функциональных систем происходит по той же причине, что и формирование правил – по внутреннему контуру мозга будет замыкаться условная связь между началом выполнения первой функциональной системы  $FS_1$  и результатом всей последовательности действий, если только она всегда последовательно получает все результаты  $s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow s_n$ , не переключаясь на другую последовательность действий.

### 13. Описание эксперимента

Для экспериментальной проверки описанной выше формализации был выполнен следующий эксперимент (более подробное описание эксперимента приведено в [37]).

При помощи компьютерной программы был смоделирован виртуальный мир и анимат (красный квадрат) рис. 8, основной целью которого является

обнаружение специальных объектов виртуального мира – «еды» (синие квадраты). Анимат должен научиться эффективно находить и собирать еду.

Мир анимата представляет собой прямоугольное поле, разбитое на клетки и содержащее три типа объектов: пустые клетки, препятствия, и еду. Объекты-препятствия располагаются только по периметру виртуального поля, образуя тем самым его естественные границы.

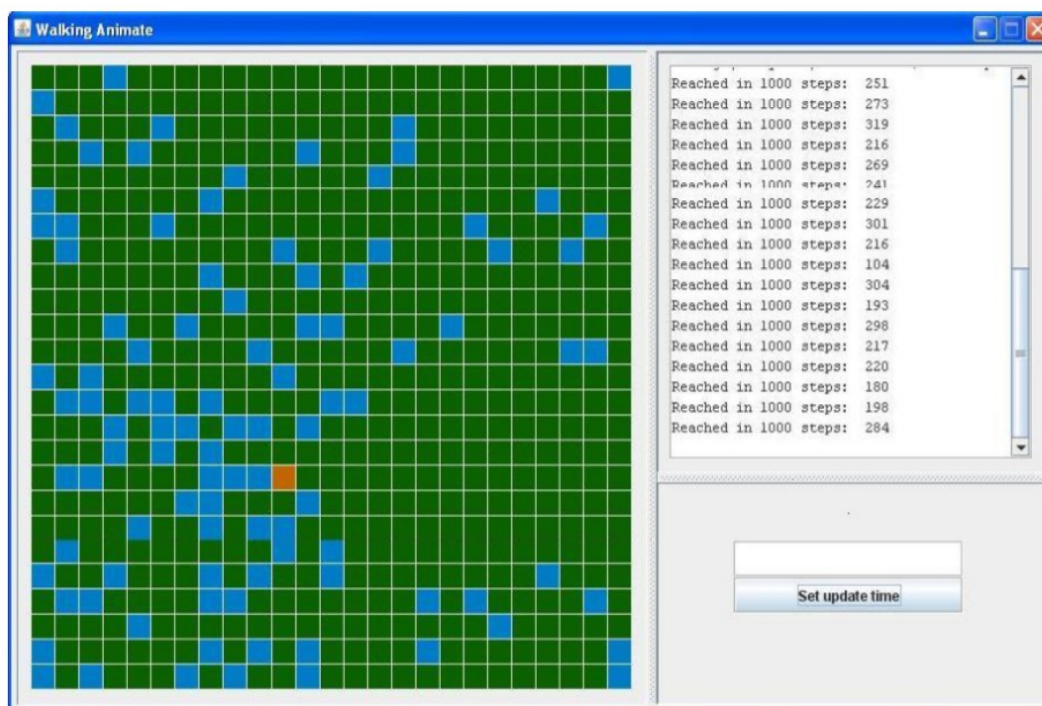


Рис. 8. Поле анимата.

Анимат может совершать три типа действий: шагнуть на клетку вперед, повернуть налево, повернуть направо. Когда анимат шагает на клетку, содержащую еду, считается, что он ее «поедает». Клетка, на которой находилась еда, очищается и новый объект «еда» случайным образом появляется в другом месте поля.

Таким образом, количество еды в виртуальном мире всегда остается постоянным.

```
Tакт: 109627
<Rule action="Step" condition="FoodEast AND OrientationEast"
  events="4539" probability="1.0">
  <Rule action="Turn Right" condition="FoodEast AND OrientationNorth"
    events="1470" probability="1.0">
    <Rule action="Step" condition="FoodNorthEast AND OrientationNorth"
      events="1640" probability="1.0">
```

Анимат обладает набором сенсоров (и отвечающих им предикатов), которые информируют его:

- о наличии еды на ближайших клетках и клетке, где находится анимат (например, [“еда на западе” = “истина”]);
- о наличии препятствий на ближайших клетках (например, [“препятствие на севере” = “истина”]);
- о направлении анимата относительно виртуального мира (например, [“направление на юг” = “истина”]).

В процессе обучения алгоритма постоянно происходит изменение наборов правил в функциональных системах, изменение наборов предикатов в самих правилах и изменение иерархии функциональных систем. Вначале программа создает одну функциональную систему, целью которой является попадание анимата в клетку с едой. Затем формируются функциональные подсистемы, включающие подчиненные правила.

Пример последовательного вызова правил в иерархии функциональных систем представлен на рис.9. Предположим, что анимат воспринял еду находящуюся в клетке на северо-востоке (FoodNorthEast) в ситуации, когда он обращен на север (OrientationNorth) (см. условие нижнего правила). Чтобы достичь цели он должен применить правила приводящие его к еде. В верхнем правиле на рис. 9 анимат находит правило, которое говорит, что он может достичь цели и съесть еду, если он шагнет на восток и еда будет на востоке (FoodEast and OrientationEast). Но еда находится на северо-востоке, поэтому, вслед за верхним правилом, он ищет правило, которое привело бы его к подцели FoodEast and OrientationEast первого правила. Он может достичь этой подцели,



Рис. 10. Схема упрощения правила ФС в течение работы алгоритма.

например, из ситуации «FoodEast and OrientationNorth», если повернет направо. Поэтому, в качестве следующего шага второе правило на рис. 9. Но теперь ему надо попасть в ситуацию «FoodEast and OrientationNorth» из его состояния (FoodNorthEast and OrientationNorth). Для этого он выбирает третье правило, которое говорит, что надо шагнуть на север.

Пример упрощения правила основной ФС в течение работы алгоритма представлен на рис. 10. Упрощение происходит за счет того, что из условия правила исключаются лишние предикаты, определяющие обстановку. Первоначально фиксируется вся обстановка в которой произошло достижение цели, затем, когда достижение цели осуществляется в немного отличной обстановке, несущественные предикаты обстановки удаляются.

Эффективность анимата по сбору еды представлены на рис. 11 сплошной линией. Для сравнения, приведен график производительности случайных блужданий (штриховой пунктир). В точках каждого графика выполнено усреднение по результатам 20 независимых испытаний.

Как видно из графика на рис. 11 алгоритм уже на первых 1000 тактов достигает производительности выше 50% от предельной. В дальнейшем алгоритм выходит на предельную (выше 160 единиц еды на тысячу тактов) производительность.

Результаты сравнительных испытаний позволяют сделать вывод, что модель практически не требует специального периода обучения.

Созданная в рамках работы библиотека функциональных систем (язык JAVA) опубликована и позволяет создавать аниматы путем определения всего нескольких классов, специфичных для решаемой задачи.

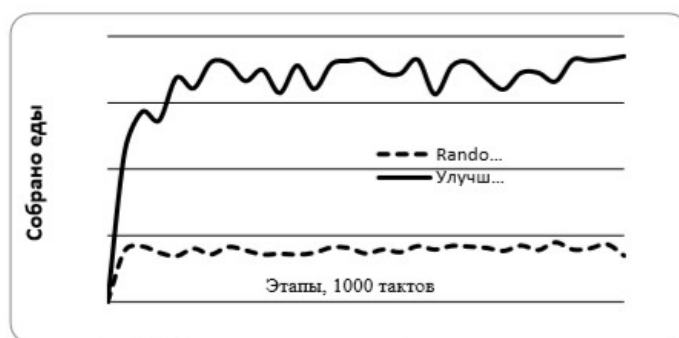


Рис. 11. Количество «еды», собранной аниматом.

#### 14. Заключение

Таким образом, нам удалось показать, что, взяв за основу принцип: **мозг обнаруживает все возможные причинные связи во внешнем мире и осуществляет выводы по ним** мы можем получить математические модели

нейрона, клеточных ансамблей в виде вероятностных формальных понятий и моделей функциональных систем.

Эти математические модели основываются на точном математическом анализе вероятностной причинности и её формализации в виде вероятностных максимально специфических причинных связей, а также на вероятностном обобщении формальных понятий, который представляет собой зацикливание выводом по максимально специфическим причинным связям. Эти математические модели позволяют моделировать следующие когнитивные процессы:

1. Выработку условных связей на уровне нейрона.
2. Целенаправленное поведение по удовлетворению потребностей.
3. Прогнозировать достижение целей и всех промежуточных подцелей, создавая прогноз потребного будущего и формируя, тем самым, акцептор результатов действий.
4. Автоматически формировать функциональные подсистемы по достижению подцелей.
5. Моделировать аппарат эмоций, используя формулу эмоций и ее аналог в виде функции полезности.
6. Автоматически формировать сенсорные коррекции.
7. Автоматически формировать «естественные» понятия и иерархию «естественных» понятий, отражающую «естественную» классификацию объектов внешнего мира.
8. Разрабатывать эффективно работающие аниматы и роботы достигающие целей во внешней среде.

В дальнейшем предполагается довести схему иерархии функциональных систем до активного восприятия и эффективно работающего «образа мира», определенного в работах Н.А.Леонтьева [40]. Эта формализация может быть получена на основе формализации «восприятия» как неподвижной точки предвосхищений, представленной в работе [41]. Континуум деятельности [31], разработанный в теории функциональных систем – также неподвижная точка предвосхищений, включающая деятельность, как активной способ достижения нужных стимулов. В дальнейшем предполагается объединить работы по моделированию восприятия и построению иерархии функциональных систем.

### *Литература*

1. Анохин К.В. Когнитом: в поисках общей теории когнитивной науки. Шестая международная конференция по когнитивной науке, Калининград, 2014, С. 26-28.
2. Hebb. D.O. The Organization of Behavior. Wiley: New York; 1949.
3. Рудольф Карнап. Философские основания физики. М., Прогресс, 1971, С. 388.

4. Hempel C.G. Aspects of Scientific Explanation. in C.G. Hempel. In: Aspects of Scientific Explanation and other Essays in the Philosophy of Science. The Free Press, New York, 1965.
5. Hempel C.G. Maximal Specificity and Lawlikeness in Probabilistic Explanation. *Philosophy of Science*. (1968) 35, pp. 116-33.
6. Vityaev E.E. The logic of prediction. In: Proceedings of the 9th Asian Logic Conference Mathematical Logic in Asia, Novosibirsk, Russia, August 16–19, World Scientific, Singapore. 2005, pp. 263–276.
7. Vityaev E.E., Martinovich V.V. Probabilistic Formal Concepts with Negation In: A. Voronkov, I. Virbitskaite (Eds.). PCI 2014, LNCS 8974, 2015, pp. 385-399.
8. Vityaev E.E. A formal model of neuron that provides consistent predictions. *Biologically Inspired Cognitive Architectures 2012*. In *Advances in Intelligent Systems and Computing*, v.196, Springer, 2013, pp. 339-344.
9. Mill J.S. *System of Logic. Ratiocinative and Inductive*. L., 1983.
10. Смирнов Е.С. Конструкция вида с таксономической точки зрения. *Зоол. Журн.* 1938, т.17, № 3, С. 387–418.
11. Ganter B. *Formal Concept Analysis: Methods, and Applications in Computer Science*. TU Dresden (2003).
12. B. Ganter, R. Wille. *Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations*. Springer Verlag. 1999.
13. Витяев Е.Е., Демин А.В., Пономарёв Д.К. Вероятностное обобщение формальных понятий, *Программирование*. Т.38, №5, 2012, С. 219-230.
14. Витяев Е.Е., Мартынович В.В. Формализация «естественной» классификации и систематики через неподвижные точки предсказаний. *Сибирские электронные математические известия*. Том 12, ИМ СО РАН, 2015, С. 1006-1031.
15. Rosch E.H. Natural categories. *Cognitive Psychology* 4. 1975, P. 328-350.
16. Rosch E. Principles of Categorization, Rosch E.&Lloyd B.B. (eds), *Cognition and Categorization*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1978. pp. 27–48.
17. Tononi G. Information integration: its relevance to brain function and consciousness. *Arch. Ital. Biol.*, 148: 299-322, 2010.
18. Tononi G. Integrated information theory of consciousness: an updated account. *Arch Ital Biol* 150, 2012, 56–90.
19. Bob Rehder, Jay B. Martin. Towards A Generative Model of Causal Cycles // 33rd Annual Meeting of the Cognitive Science Society 2011, (CogSci 2011), Boston, Massachusetts, USA, 20-23 July 2011, V.1 pp. 2944-2949.
20. Cartwright, N. Causal Laws and Effective Strategies. *Noûs*. (1979) 13(4): 419-437.
21. *The Nature of Classification. Relationships and Kinds in the Natural Sciences*. Palgrave Macmillan. 2013. 208.
22. Rehder B. Categorization as causal reasoning, *Cognitive Science*, 27. 2003,

pp. 709–748.

23. Masafumi Oizumi, Larissa Albantakis, Giulio Tononi. From the Phenomenology to the Mechanisms of Consciousness: Integrated Information Theory 3.0 // PLOS Computational Biology. May 2014, V.10. Issue 5.

24. Гибсон Дж. Экологический подход к зрительному восприятию. М.: Прогресс, 1988. С. 462.

25. Boris Kovalerchuk and Evgenii Vityaev. Data Mining in Finance: Advances in Relational and Hybrid Methods, Kluwer Acad. Pub., 2000.

26. Витяев Е.Е. Извлечение знаний из данных. Компьютерное познание. Моделирование когнитивных процессов., Новосибирск, НГУ, 2006. 293 с.

27. Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф. О новом подходе к философии математики, в кн. Структурный анализ символьных последовательностей. Новосибирск, 1984. Вып. 101. Вычислительные системы. С. 141–148.

28. Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф. Современная философия математики: недомогания и лечение. Институт математики СО РАН. Новосибирск, «Параллель», 2007. 142 с.

29. Анохин П.К. Проблема принятия решения в психологии и физиологии. в кн. Проблемы принятия решения. М., Наука, 1976. С. 7–16.

30. Anokhin P.K. Biology and neurophysiology of the conditioned reflex and its role in adaptive behavior. Oxford., Pergamon press, 1974. 574 p.

31. Судаков К.В. Общая теория функциональных систем М., Медицина, 1984. С. 222.

32. Симонов П.В. Высшая нервная деятельность человека (мотивационно-эмоциональные аспекты). М.: Наука, 1975. 173 с.

33. Симонов П.В. Эмоциональный мозг. М., Наука, 1981. 140 с.

34. Бернштейн Н.А. Биомеханика и физиология движений. Избранные психологические труды, Москва-Воронеж, 1997, 605 с.

35. Витяев Е.Е. Объяснение Теории Движений Н.А. Бернштейна. VII Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика-2005», Сборник научных трудов, часть 1, Москва, 2005, С. 234-240.

36. Витяев Е.Е. Логика работы мозга. в кн. Подходы к моделированию мышления. ред. В.Г. Редько. УРСС Эдиториал, Москва, 2014, С. 120-153.

37. Мухортов В.В., Хлебников С.В., Витяев Е.Е. Улучшенный алгоритм семантического вероятностного вывода в задаче 2-мерного анимата, *Нейроинформатика*. 2012. Т.6, № 1, С. 50-62.

38. Demin A.V., Vityaev E.E. Learning in a virtual model of the *C. elegans* nematode for locomotion and chemotaxis, *Biologically Inspired Cognitive Architectures*. 2014, v.7, pp.9–14.

39. Vityaev E. Purposefulness as a Principle of Brain Activity In: *Anticipation: Learning from the Past. Cognitive Systems Monographs*, V.25, Springer, 2015, pp. 231-254.

40. Леонтьев А.Н. Образ мира. в кн. Избранные психологические

произведения. М., Педагогика, 1983, С. 251-261, 29.

41. Витяев Е.Е., Неупокоев Н.В. Формальная модель восприятия и образа как неподвижной точки предвосхищений. *Нейроинформатика* (электронный журнал), 2012, том 6, № 1, с. 28-41.

### Приложение

**Доказательство теоремы 1.** Ниже приведены три леммы, необходимые для доказательства теоремы 1 и далее идет само доказательство теоремы.

**Лемма 1.** Любая вероятностная причинная связь  $C=(A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0)$  принадлежит некоторому семантическому вероятностному выводу литеры  $A_0$ , и, следовательно, дереву семантического вероятностного вывода литеры  $A_0$ .

**Доказательство.** Для вероятностной причинной связи  $C=(A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0), k \geq 1$ , найдем подотношение, являющееся вероятностной причинной связью. Такое всегда существует, так как правило  $C=(\Rightarrow A_0)$  является вероятностной причинной связью. Условная вероятность этого подотношения будет строго меньше условной вероятности самой причинной связи. Добавим его в качестве предшествующего правила семантического вероятностного вывода и продолжим процедуру. ■

**Лемма 2.** Для любого правила  $C=(A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0), k \geq 0$ ,  $A_0 \notin (A_1 \& \dots \& A_k)$ ,  $\eta(A_1 \& \dots \& A_k) > 0$  найдется вероятностная причинная связь  $C'=(B_1 \& \dots \& B_{k'} \Rightarrow A_0), B_1 \& \dots \& B_{k'} \subseteq A_1 \& \dots \& A_k, k' < k$ , для которой  $\mu(C') \geq \mu(C)$ .

**Доказательство.** Правило  $C=(A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0)$ , либо является вероятностной причинной связью и тогда она искомая, либо, в силу определения вероятностной причинной связи, существует подправило

$$(\tilde{R} \sqsubset R), \text{ для которого } \mu(\tilde{R}) \geq \mu(A), \quad \tilde{R}=(P_1 \& \dots \& P_{k'} \Rightarrow A_0), \quad k' \geq 0, \\ \{P_1, \dots, P_{k'}\} \subset \{A_1, \dots, A_k\}, k' < k.$$

Аналогично для правила  $R'$ , либо оно является вероятностной причинной связью, либо для него существует подправило с аналогичными свойствами и так далее. Поскольку правило  $C=(\Rightarrow A_0)$  является вероятностной причинной связью, то процесс остановится. ■

**Лемма 3.** Если для правил  $A=(\bar{A} \Rightarrow G), B=(\bar{B} \Rightarrow \neg G), \bar{A}=A_1 \& \dots \& A_k, \bar{B}=B_1 \& \dots \& B_m, \eta(\bar{A} \& \neg \bar{B}) > 0, k \geq 0, m > 0$ , верно неравенство  $\eta(G/\bar{A} \& \neg \bar{B}) > \eta(G/\bar{A})$ , то существует правило, имеющее строго большую условную вероятность, чем правило А.

**Доказательство.** Распишем условную вероятность  $\eta(G/\bar{A} \& \neg \bar{B}) = \eta(G/\bar{A} \& (\neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m))$ .



Представим дизъюнкцию  $\neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m$  как дизъюнкцию конъюнкций  $\bigvee_{i=(1,\dots,1,0)}^{i=(0,\dots,0)} (B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m})$ , где  $i=(i_1, \dots, i_m), i_1, \dots, i_m \in \{0,1\}$ , ноль означает наличие отрицания у соответствующего атома, а единица – отсутствие отрицания. Дизъюнкция не включает набор  $(1, \dots, 1)$ , соответствующий конъюнкции  $B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m}$ .

Тогда условная вероятность  $\eta(G/\bar{A} \& (\neg B_1 \vee \dots \vee \neg B_m))$  переписывается как  $\eta(G/\bigvee_{i=(0,\dots,0)}^{i=(1,\dots,1,0)} (\bar{A} \& B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m}))$ .

Докажем, что если  $\eta(G/\bar{A} \& \neg \bar{B}) > \eta(G/\bar{A})$ , то также будет выполнено одно из неравенств  $\eta(G/\bar{A} \& B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m}) > \eta(G/\bar{A}), (i_1, \dots, i_m) \neq (1, \dots, 1)$ .

Предположим противное, что одновременно выполнены все неравенства

$$\eta(G/\bar{A} \& B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m}) \leq \eta(G/\bar{A}), (i_1, \dots, i_m) \neq (1, \dots, 1),$$

в тех случаях, когда  $\eta(\bar{A} \& B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m}) > 0$ . Поскольку  $\eta(\bar{A} \& \neg \bar{B}) > 0$ , то есть случаи, когда  $\eta(\bar{A} \& B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m}) > 0$ .

Тогда

$$\eta(G \& \bar{A} \& B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m}) \leq \eta(G/\bar{A}) \eta(\bar{A} \& B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m}), (i_1, \dots, i_m) \neq (1, \dots, 1),$$

$$\eta(G/\bigvee_{i=(0,\dots,0)}^{i=(1,\dots,1,0)} (\bar{A} \& B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m})) = \frac{\eta(\bigvee_{i=(0,\dots,0)}^{i=(1,\dots,1,0)} (G \& \bar{A} \& B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m}))}{\eta(\bigvee_{i=(0,\dots,0)}^{i=(1,\dots,1,0)} (\bar{A} \& B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m}))} =$$

$$\frac{\bigvee_{i=(0,\dots,0)}^{i=(1,\dots,1,0)} \eta(G \& \bar{A} \& B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m})}{\bigvee_{i=(0,\dots,0)}^{i=(1,\dots,1,0)} \eta(\bar{A} \& B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m})} \leq \frac{\eta(G/\bar{A}) \bigvee_{i=(0,\dots,0)}^{i=(1,\dots,1,0)} \eta(\bar{A} \& B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m})}{\bigvee_{i=(0,\dots,0)}^{i=(1,\dots,1,0)} \eta(\bar{A} \& B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m})} = \eta(G/\bar{A}),$$

что противоречит неравенству  $\eta(G/\bar{A} \& \neg \bar{B}) > \eta(G/\bar{A})$ . Поэтому наше предположение не верно и существует правило вида

$$\bar{A} \& B_1^{i_1} \& \dots \& B_m^{i_m} \Rightarrow G, (i_1, \dots, i_m) \neq (1, \dots, 1),$$

имеющее строго большую оценку условной вероятности, чем  $A$ . ■

**Теорема 1.** Если  $L$  – совместно, то  $\Pi_R(L)$  – совместно и непротиворечиво,  $P \subset MSCR$ .

Сначала докажем, что при каждом применении какого-либо правила из  $P \subset MSCR$  мы снова получаем совместный набор литер. Предположим противное, что применение некоторого правила  $A = (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow G)$ ,

$\{A_1, \dots, A_k\} \subset L, k > 1$ , к набору литер  $L = \{L_1, \dots, L_k\}$  выводит литеру  $G$ , для которой  $v(L_1 \& \dots \& L_n \& G) = 0$ .

Поскольку для MSCR правил выполнены неравенства  $\eta(G/A_1 \& \dots \& A_k) > v(G)$ ,  $\eta(A_1 \& \dots \& A_k) > 0, v(G) > 0$ , то  $v(G/A_1 \& \dots \& A_k) > v(G) v(A_1 \& \dots \& A_k) > 0$ .

Добавим отрицания литер  $\{B_1, \dots, B_t\} = L_1 \& \dots \& L_n \setminus \{A_1, \dots, A_k\}$  в правило  $A$ , получим правило  $(A_1 \& \dots \& A_k \& \neg(B_1 \& \dots \& B_t) \Rightarrow G)$ . Обозначим  $\bar{A} = A_1 \& \dots \& A_k, \bar{B} = B_1 \& \dots \& B_t, \bar{L} = L_1 \& \dots \& L_n$ .

По предположению  $v(L_1 \& \dots \& L_n \& G) = 0$  и  $v(\bar{A} \& \bar{B}) = v(\bar{L}) > 0$ . Докажем, что в этом случае  $v(\bar{A} \& \neg \bar{B}) > 0$ . Предположим противное, что  $v(\bar{A} \& \neg \bar{B}) = 0$ , тогда  $v(G \& \bar{A} \& \neg \bar{B}) \leq v(\bar{A} \& \neg \bar{B}) = 0$ . Откуда следует, что  $0 = v(\bar{L} \& G) = v(G \& \bar{A} \& \bar{B}) = v(G \& \bar{A}) - v(G \& \bar{A} \& \neg \bar{B}) = v(G \& \bar{A}) > 0$ .

Получили противоречие. Тогда

$$v(G/\bar{A} \& \neg \bar{B}) = \frac{v(G \& \bar{A} \& \neg \bar{B})}{v(\bar{A} \& \neg \bar{B})} = \frac{v(G \& \bar{A}) - v(G \& \bar{A} \& \bar{B})}{v(\bar{A}) - v(\bar{A} \& \bar{B})} =$$

$$\frac{v(G \& \bar{A}) - v(G \& \bar{L})}{v(\bar{A}) - v(\bar{A} \& \bar{B})} = \frac{v(G \& \bar{A})}{v(\bar{A}) - v(\bar{A} \& \bar{B})} > \frac{v(G \& \bar{A})}{v(\bar{A})} = v(G/A_1 \& \dots \& A_k).$$

Тогда в силу лемм 2, 4, 5 мы получим, что существует вероятностная причинная связь с большей условной вероятностью, чем правило  $A$ , что противоречит максимальной специфичности правила  $A$ .

Поскольку набор литер  $L_1, \dots, L_k, G$  совместен и  $v(L_1 \& \dots \& L_n \& G) > 0$ , то он непротиворечив, поскольку, если бы он содержал одновременно литеры  $G$  и  $\neg G$ , то его вероятность была бы нулевой. ■

**Доказательство теоремы 2.**

1. Положим  $T = \Pi_R^\infty(B)$  и  $S = \bigcup_{\Pi_R^\infty(C)=B} C^\downarrow$ . Тогда, очевидно, что  $B \subseteq T$  и  $A \subseteq S$ .

2. Определим  $P = \{Q \mid \Pi_R^\infty(Q) = T, Q \subseteq M\}$ . По  $P$  построим множество строгих понятий  $C = \{(Q^\downarrow, Q^{\uparrow}) \mid Q \in P\}$ . Тогда, если определить  $S$  как  $S = \bigcup_{(A,B) \in C} A$ , то условия теоремы будут выполнены. ■

### *Mathematical probabilistic model of cognitome and functional systems*

Vityaev E.E.

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Institute of Mathematics. S.L. Sobolev SB RAS,*

Novosibirsk State University, Russia  
e-mail: vityaev@math.nsc.ru

**Abstract.** The work provides a formalization of the cognitome and cogs of phenomenological experience and functional systems, based on a fairly general principle of the brain: the brain detects all possible causal relationships in the external world and draws conclusions on them.

For this, the concept of a causal relationship and the problem of statistical ambiguity associated with the inconsistency of conclusions on probabilistic causal relationships are analyzed. The problem of statistical ambiguity is solved and the most specific probabilistic causal relationships are determined, giving predictions without contradictions.

A formal model of a neuron is determined that reveals such causal relationships. It is shown that the cellular ensembles of such neurons give a "natural" classification of objects in the external world in the form of fixed points of cyclically mutually predicted properties of objects. It is shown that these cyclical maximally specific causal relationships form probabilistic formal concepts that formalize "natural" classification and "natural" concepts that arise in cognitive sciences. In addition, they have the property of highly integrated information in the sense of G. Tononi.

Formalization of cogs of functional systems is based on the consideration of purposeful behavior and the development of conditional (causal) links between action and its results. In the work, a formal model of cogs of functional systems is presented and it is shown that it can be effectively used for modeling animats.

**Keywords:** cognitive, formal concept, categorization, theory of functional systems, purposeful behavior.

### References

1. Anokhin K.V. Kognitom: v poiskakh obshey teorii kognitivnoy nauki [Cognitom: In Search of a General Theory of Cognitive Science]. Sixth International Conference on Cognitive Science, Kaliningrad, 2014, pp. 26-28.
2. Hebb. D.O. The Organization of Behavior. Wiley: New York; 1949.
3. Rudolph Carnap. Filosofskie osnovaniya fiziki [Philosophical foundations of physics]. M., "Progress", 1971, C. 388.
4. Hempel C.G. Aspects of Scientific Explanation. in C.G. Hempel. In: Aspects of Scientific Explanation and other Essays in the Philosophy of Science. The Free Press, New York, 1965.
5. Hempel C.G. Maximal Specificity and Lawlikeness in Probabilistic Explanation. Philosophy of Science. (1968) 35, pp. 116-33.
6. Vityaev E.E. The logic of prediction. In: Proceedings of the 9th Asian Logic Conference Mathematical Logic in Asia, Novosibirsk, Russia, August 16–19, World Scientific, Singapore. 2005, pp. 263–276.
7. Vityaev E.E., Martinovich V.V. Probabilistic Formal Concepts with Negation In: A. Voronkov, I. Virbitskaite (Eds.). PCI 2014, LNCS 8974, 2015, pp. 385-399.
8. Vityaev E.E. A formal model of neuron that provides consistent predictions // Biologically Inspired Cognitive Architectures 2012. In Advances in Intelligent Systems and Computing, v.196, Springer, 2013, pp. 339-344.
9. Mill J.S. System of Logic. Ratiocinative and Inductive. L., 1983.
10. Smirnov E.S. Konstruktsiya vida s tksonometricheskoy tochki zreniya [Species construction from a taxonomic point of view]. Zool. Journal. (1938). 17: 3, pp. 387-418.
11. Ganter B. Formal Concept Analysis: Methods, and Applications in Computer Science. TU Dresden (2003).
12. B. Ganter, R. Wille. Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations. Springer

Verlag. 1999.

13. Vityaev E.E., Demin A.V., Ponomarev D.K. Veroyatnostnoe obobsheniye formalnikh ponyatiy [Probabilistic generalization of formal concepts], *Programming*. T. 38, No. 5, 2012, P. 219-230.

14. Vityaev E.E., Martynovich V.V. Formalizatsiya estestvennykh klassifikatsii i sistematiki cherez nepodvizhniye tochki predskazaniy [Formalization of "natural" classification and systematics through fixed points of predictions]. *Siberian Electronic Mathematical News*. Volume 12, IM SO RAN, 2015, pp. 1006-103113.

15. Rosch E.H. Natural categories. *Cognitive Psychology* 4. 1975, P. 328-350.

16. Rosch E. Principles of Categorization, Rosch E.&Lloyd B.B. (eds), *Cognition and Categorization*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1978. pp. 27-48.

17. Tononi G. Information integration: its relevance to brain function and consciousness. *Arch. Ital. Biol.*, 148: 299-322, 2010.

18. Tononi G. Integrated information theory of consciousness: an updated account. *Arch Ital Biol* 150, 2012, 56-90.

19. Bob Rehder, Jay B. Martin. Towards A Generative Model of Causal Cycles // 33rd Annual Meeting of the Cognitive Science Society 2011, (CogSci 2011), Boston, Massachusetts, USA, 20-23 July 2011, V.1 pp. 2944-2949.

20. Cartwright, N. Causal Laws and Effective Strategies. *Noûs*. (1979) 13(4): 419-437.

21. The Nature of Classification. Relationships and Kinds in the Natural Sciences. Palgrave Macmillan. 2013. 208.

22. Rehder B. Categorization as causal reasoning // *Cognitive Science*, 27. 2003, pp. 709-748.

23. Masafumi Oizumi, Larissa Albantakis, Giulio Tononi. From the Phenomenology to the Mechanisms of Consciousness: Integrated Information Theory 3.0 // *PLOS Computational Biology*. May 2014, V.10. Issue 5.

24. Gibson J. *Ekologicheskiy podkhod k zritelnomu vospriyatiyu* [An ecological approach to visual perception]. M., Progress, 1988, 462 p.

25. Boris Kovalerchuk and Evgenii Vityaev. *Data Mining in Finance: Advances in Relational and Hybrid Methods*, Kluwer Acad. Pub., 2000.

26. Vityaev E.E. *Iz vlecheniye znaniy iz dannikh. Kompyutornoye poznanie* [Extracting knowledge from data. Computer cognition]. Modeling of cognitive processes., Novosibirsk, NSU, 2006, 293 p.

27. Ershov Yu.L., Samokhvalov K.F. O novom podkhode k filosofii matematiki [On a new approach to the philosophy of mathematics], in the book. *Structural analysis of character sequences*. Novosibirsk, 1984. Issue. 101. Computing systems. pp. 141-148.

28. Ershov Yu.L., Samokhvalov K.F. *Sovremennaya filosofiya matematiki: nedomoganiya i lecheniye* [Modern philosophy of mathematics: ailments and treatment]. Institute of Mathematics SB RAS. Novosibirsk, "Parallel", 2007. 142 p.

29. Anokhin P.K. Problema prinyatiya resheniya v psikhologii i fiziologii [The problem of decision making in psychology and physiology]. in the book. *Decision-making problems*. Moscow, Nauka, 1976. P. 7-16.

30. Anokhin P.K. *Biology and neurophysiology of the conditioned reflex and its role in adaptive behavior*. Oxford., Pergamon press, 1974. 574 p.

31. Sudakov K.V. *Obshchaya teoriya funktsionalnikh sistem* [General theory of functional systems] M., Medicine, 1984. P. 222.

32. Simonov P.V. *Vishaya nervnaya deyatel'nost' cheloveka* [Higher nervous activity of a person] (motivational and emotional aspects). Moscow, Nauka, 1975, 173 p.

33. Simonov P.V. *Emotsionalniy mozg* [The emotional brain]. M., Nauka, 1981. 140 p.

34. Bernstein N.A. *Biomekhanika i fiziologiya dvizheniy* [Biomechanics and physiology of

movements]. Selected psychological works, Moscow-Voronezh, 1997, 605 p.

35. Vityaev E.E. Obyasneniye teorii dvizhenii Bernshteina [Explanation of the Theory of Motion by N.A. Bernstein]. VII All-Russian scientific and technical conference "Neuroinformatics-2005", Collection of scientific papers, part 1, Moscow, 2005, pp. 234-240.

36. Vityaev E.E. Logika raboti mozga [The logic of the brain]. in the book. Approaches to modeling thinking. ed. V.G. Redko. URSS Editorial, Moscow, 2014, pp. 120-153.

37. Mukhortov V.V., Khlebnikov S.V., Vityaev E.E. Uluchshenniy algoritm semanticheskogo veroyatnostnogo vivoda v zadache 2-mernogo animata [Improved semantic probabilistic inference algorithm in 2-dimensional animat problem], Neuroinformatics. 2012. Vol. 6, No. 1, pp. 50-62.

38. Demin A.V., Vityaev E.E. Learning in a virtual model of the *C. elegans* nematode for locomotion and chemotaxis // Biologically Inspired Cognitive Architectures. 2014, v.7, pp.9–14.

39. Vityaev E. Purposefulness as a Principle of Brain Activity In: Anticipation: Learning from the Past. Cognitive Systems Monographs, V.25, Springer, 2015, pp. 231-254.

40. Leontiev A.N. Obraz mira [The image of the world]. in the book. Selected psychological works. M., Pedagogy, 1983, pp. 251-261.

41. Vityaev E.E., Neupokoev N.V. Formalnaya model vospriyatiya I obraza kak nepodvizhnoy tochki predvoshisheniy [Formal model of perception and image as a fixed point of anticipation]. Neuroinformatics (electronic journal), 2012, volume 6, no. 1, p. 28-41.

## ***Является ли мозг компьютером, работающим в алгебре Клиффорда?***

**Лабунец В.Г., Часовских В.П.**

*д.т.н., Уральский государственный экономический университет,  
Екатеринбург, Россия*

*e-mail: vlabunets05@yahoo.com, u2007u@ya.ru*

***Аннотация.** Мы предлагаем новый подход для обработки многомерных и многокомпонентных изображений, основанный на теории гиперкомплексных алгебр, обобщающих алгебру комплексных чисел. Они содержат гиперкомплексные числа, представляющие собой линейную комбинацию нескольких мнимых единиц. Главная цель работы – показать, что гиперкомплексные числа могут быть использованы при обработке многоканальных изображений в естественной и эффективной манере. В этой работе мы предполагаем, что мозг животных оперирует гиперкомплексными числами, когда обрабатывает многоканальные изображения, которые возникают на сетине глаза. В нашем подходе каждый многоканальный пиксель рассматривается не как  $K$ -мерный ( $K$ -D) вектор, а как  $K$ -D гиперкомплексное число, где  $K$  – число различных оптических каналов. Это создает эффективную математическую основу для различных функционально-числовых преобразований многоканальных изображений и инвариантного распознавания образов. Предлагаемую работу следует рассматривать как приглашение читателям отойти от своих обычных “твердых векторно-матричных” убеждений и тем самым приобщиться к алгебраическому гиперкомплексному пониманию того, что значит зрение и распознавание.*

***Ключевые слова:** многоканальные изображения, гиперкомплексные алгебры, обработка изображений, распознавание образов, квантовые вычисления.*

*Посвящается выдающемуся советскому и российскому ученому,  
создателю алгебраической школы распознавания образов,  
замечательному человеку, талантливому педагогу  
**Юрию Ивановичу Журавлеву** в знак благодарности  
за многолетнее сотрудничество и постоянную  
научную поддержку на всех этапах нашей  
совсем не простой научной деятельности*

### ***Введение***

Одной из главных и интригующих проблем биологии и информатики является выяснение того факта, каким образом головной мозг животных обрабатывает цветные и многоспектральные изображения, а также распознает объекты внешнего мира. Мы знаем, что животные с различными эволюционными историями имеют цветные визуальные системы различной размерности [1-4]. Приматы имеют бихроматические и трихроматические

визуальные системы. Рептилии имеют многомерные (многоканальные) визуальные системы. Например, визуальная система черепах имеет пять типов цветных фоторецепторов (R,G,B, DC,UV). Практика показывает, что мозг животных успешно обрабатывает цветные и многоспектральные изображения и распознает объекты в различной позиции, при различных ракурсах, при различной иллюминации и при различной цветовой насыщенности. Но как это делает мозг? Как мы видим? Как мы распознаем постоянно движущиеся и изменяющиеся в пространстве и во времени объекты внешнего мира? Движущийся объект фиксируется на сетине как последовательность различных двумерных изображений. Ни одно из этих изображений не дает истинного представления о форме и цвете объекте.

Но поскольку животные и человек весьма успешно распознают объекты внешнего мира, то это означает, что последовательность двумерных изображений, возникающих на сетине, все-таки содержит «НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ», характерные и уникальные для наблюдаемого изображения, которые не меняются при различных преобразованиях объекта. Благодаря именно таким признакам наблюдаемый объект распознается как единое целое. Эти уникальные признаки называются ИНВАРИАНТАМИ.

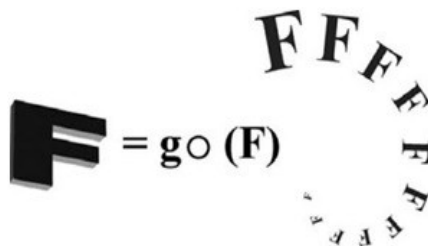
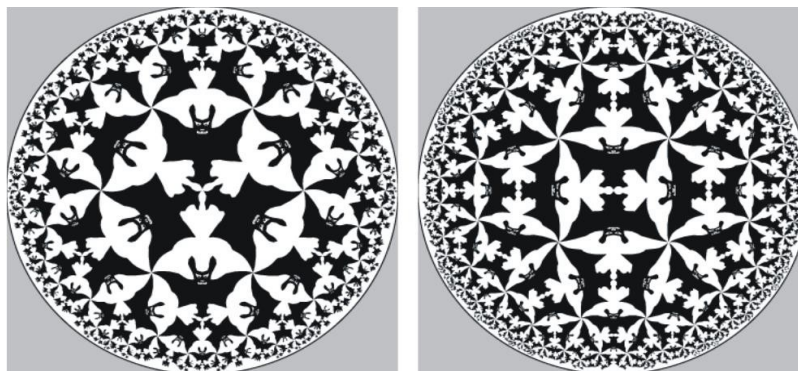


Рис 1. Геометрически искаженные версии буквы «F»

Например, все буквы «F» на рис 1 мозг распознает как одну и ту же букву несмотря на различные позиции их на плоскости и несмотря на различный их размер (т.е. несмотря на то, что они были подвергнуты различным геометрическим преобразованиям). Это свидетельствует о том, что, во-первых, геометрически преобразованные буквы «F» содержат инвариантные признаки, не меняющиеся при геометрических преобразованиях и, во-вторых, наш мозг способен вычислять эти инварианты и использовать их для распознавания.



*Рис. 2. Геометрические преобразования в неевклидовом пространстве*

На рис. 2 мы видим сдвинутые и повернутые изображения летучей мыши по законам гиперболической (неевклидовой геометрии). Все геометрически преобразованные мыши распознаются и интерпретируются как одна и та же мышь. Этот факт означает, что, несмотря на то, что мы живем в трехмерном евклидовом пространстве, наш мозг способен распознавать объекты, подвергнутые неевклидовым преобразованиям, вычисляя признаки распознаваемых объектов, инвариантные относительно этих преобразований.



*Рис. 3. Изображения на сферической плоскости Римана*

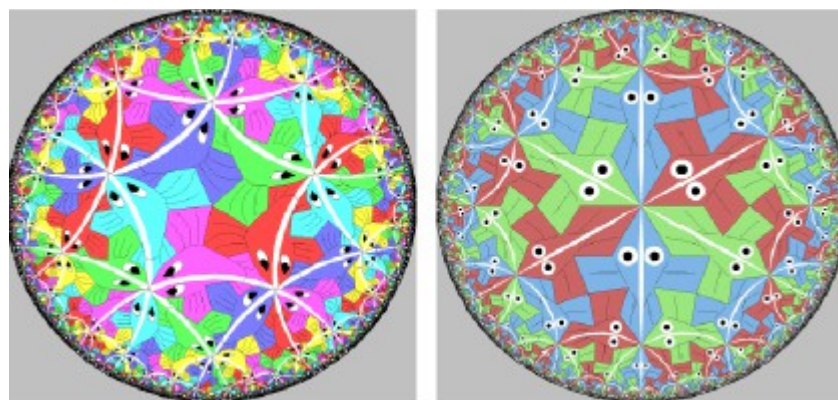
На рис. 3 мы видим сферическую плоскость Римана. Объекты, представленные на этой геометрии, также легко распознаются нашим мозгом. Этот факт означает, что наш мозг способен распознавать объект, живущие в мире Римана с положительной кривизной, и наш мозг способен выделять инварианты по отношению к группе движений плоскости Римана.





*Рис. 4. Инвариантность (константность) восприятия по отношению к цветовым преобразованиям объекта*

На рис. 4 представлен один и тот же букет цветов, освещенный источниками света с различными спектральными составами, которые меняют цветовой тон, насыщенность и яркость букета. Несмотря на это, наш мозг распознает эти букет как один и тот же букет. Это означает, что наш мозг способен выделять инвариантные признаки из картинок, которые не меняются при цветовых преобразованиях.



*Рис. 5. Инвариантность (константность) восприятия по отношению к цветовым и геометрическим преобразованиям объекта*

И, наконец, на рис. 5. мы видим разноцветные фигуры летающих рыб. Каждая из них сдвинута и повернута друг по отношению к другу по законам гиперболической геометрии. Все фигуры, принадлежащие одному и тому же рисунку, воспринимаются мозгом как один и тот же объект, несмотря на различную их раскраску и их различные геометрические преобразования. Этот факт означает, что все фигуры содержат одинаковые признаки, инвариантные по отношению к их световым и геометрическим преобразованиям. Очевидно, что

системы технического зрения, точно также как глаза и мозг, должны быть способны вычислять инварианты изображений по отношению к широкому кругу цветовых и геометрических евклидовых и неевклидовых преобразований.

На основании этих наблюдений можно сделать несколько выводов и сформулировать ряд гипотез относительно того, что представляет собой жизнь и «видение» (ощущение) внешнего Мира с алгебраической точки зрения.

### ***Что такое ЖИЗНЬ с алгебраической точки зрения?***

#### ***Выводы и вопросы***

1. Наша способность видеть МИР и даже само существование ЖИЗНИ возможны по одной единственной причине: МИР в некоторых своих аспектах изменяем (вариабелен), а в каких-то аспектах неизменен (инвариантен).

2. Если бы МИР был абсолютно неизменен (“заморожен”) и в нем бы ничто не менялось, то в таком МИРЕ не смогла бы зародиться жизнь с ее “глазами”, способными наблюдать за этим МИРОМ.

3. Если бы МИР непрерывно менялся, то и в таком МИРЕ не могла бы существовать ЖИЗНЬ: раз возникнув, она должна бы была мгновенно погибнуть и перед ее “глазами”, промелькнул бы только один миг, за который она не смогла бы разглядеть всей красоты вечно меняющегося МИРА.

4. Первое отличительное свойство живой материи – это ее умение вычислять инвариантные свойства объектов и процессов, протекающих в МИРЕ и выявлять в нем инвариантные причинно-следственные связи. Вся совокупность инвариантных свойств и инвариантных причинно-следственных связей, выявленных живым организмом, формирует его “БАЗУ ЗНАНИЙ”, которая составляет одну из важнейших частей ИНТЕЛЛЕКТА живого организма. “БАЗА ЗНАНИЙ” живого организма, а значит, и уровень его ИНТЕЛЛЕКТА, зависит от совокупности накопленных инвариантных причинно-следственных связей, от сложности той ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ НИШИ, в которой он обитает и от сложности той группы преобразований, которая действует в пределах этой ниши.

5. Второе отличительное свойство: способность запоминать “БАЗУ ЗНАНИЙ”, а также передавать ее по наследству с целью опережающего отражения окружающего МИРА и успешной адаптации к изменениям в нем (согласно принципу Анохина).

6. Третье отличительное свойство: эволюционное накопление все новых и новых инвариантных причинно-следственных связей, то есть совершенствование “БАЗЫ ЗНАНИЙ”. Согласно принципу Джеймса Дана, эволюция живой материи идет по пути совершенствования центральной нервной системы (ЦНС) и мозга, который назван Даном процессом цефализации живой материи. Раз достигнутый эволюцией уровень ЦНС и мозга не идет уже вспять, а может идти только вперед. Эволюция живой материи связана либо с ее переходом из одной экологической ниши в другую, либо с началом действия в исходной нише новой

более сложной группы преобразований. В обоих случаях живой материи приходится вычислять новые инвариантные свойства новой ниши, либо выделять новые причинно-следственные связи, появившиеся в связи с действием **НОВОЙ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ** в пределах старой ниши.

***В связи с изложенным интересно получить  
ответы на следующие вопросы:***

1. Как возникает сознание в процессе антропогенеза (в процессе эволюции)? Известный философ Гильберт Райл назвал проблему сознания и мозга “догмой призрака в машине”. Пользуясь этой метафорой можно задаться вопросом: почему и когда человек в процессе эволюционного развития подхватил “заразу” в виде этого “призрака”? Почему этот ”призрак” не встретился другим живым существам на их эволюционных дорожках? Обладает ли сознанием только человек или же им наделены и другие живые существа? Почему и для чего “призрак” поджидал человека? Почему именно человек получил приоритетное право быть носителем сознания?

2. Подкараулив человека, как сознание (призрак) возникает в онтогенезе (т.е. в процессе индивидуального развития)? Оно уже в скрытой форме существует в человеке сразу при его рождении или возникает в процессе его становления? При каких условиях и вследствие чего возникает сознание у человека? Что послужило доминирующей причиной возникновения сознательной формы жизни? Какая группа преобразований, действующая в экологической нише человекоподобной обезьяны, заставила последнюю превратиться в человека разумного (*Homo Sapiens*)? Что представлял собой этот драматический момент в эволюции живой материи на Земле с алгебраической точки зрения? Наиболее популярны среди психологов и философов объяснение возникновения сознания на основе биологической целесообразности, которая диктуется требованиями приспособления к изменению условий внешней среды. Вроде как сознание – это высшая форма адаптации и приспособления в эволюционном развитии. Такое алгебраическое объяснение ни чем не лучше божественного происхождения жизни вообще и сознательной, в частности. Действительно, не имея сознания и руководствуясь наследственно заложенными в “**БАЗЕ ЗНАНИЙ**” программами поведения, современные животные, некоторые из которых, зародились задолго до появления человека, прекрасно пережили все изменения, происходившие в истории Земли. Они успешно адаптировались к современным условиям, выявляя вновь появляющиеся инвариантные причинно-следственные связи и совершенствуя свою “**БАЗУ ЗНАНИЙ**”, но у них почему-то не появилось **СОЗНАНИЯ**.

3. По мнению палеонтологов, подготовительный период, в течение которого формировались предпосылки возникновения сознания, длился 1,5 млн. лет. Люди со всей полнотой человеческой специфики появились всего 40—35 тысяч

лет тому назад. Окончательное оформление Человека Разумного произошло примерно 25-20 тысяч лет тому назад. Именно в этом период человек “подхватил” заразу в виде “призрака”-сознания. Но палеонтологи не заметили никаких катастрофических изменений в составе живого мира Земли, в тот момент, когда у человека появилось сознание. Не отмечены слишком уж существенные изменения условий внешней среды на Земле, которые поставили бы существующий в то время живой мир на грань выживания и в категорической форме потребовали у единственного рода человекообразных обезьян возникновения сознания как высшей формы адаптации, без наличия которой эти обезьяны прекратили бы свое существование. Апелляция к тому, что, мол, сознание позволяет выжить человеческой особи, не может быть признана научным обоснованием. Достаточно сходить в зоопарк и посмотреть на мартишек, горилл и орангутангов. Почему же и как возникло сознание, в частности, с алгебраической точки зрения? Для чего это стало необходимым, ведь все, что обнаруживает себя в потоке жизни, является необходимым? Разве это не так? Или, может быть, это просто случайность? Но тогда это счастливая и очень интересная случайность, достойная самого пристального изучения.

4. Вся деятельность человека направлена на стабилизацию своей экологической ниши (попыткой сделать ее максимально комфортной), что препятствует возникновению в ней новых более сложных преобразований, являющихся причиной биоэволюции (но, похоже, не сознания). Интересно знать, спровоцирует ли устранение алгебраических причин биоэволюции возникновение биоэволюционного тупика в развитии человека? Что будет означать этот тупик?

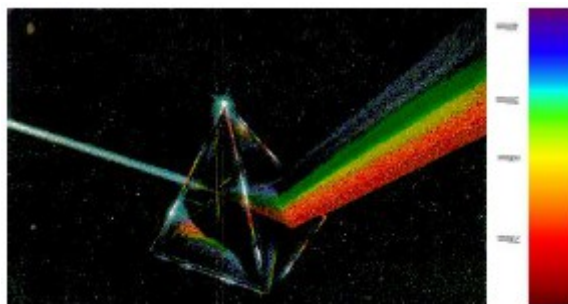
5. С появлением человека разумного, освоением им всех экологических ниш Земли и прекращением “борьбы за существования” БИОСФЕРА (места существования живой материи) трансформировалась в соответствии с представлениями Вернадского в НООСФЕРУ, состоящую из биосферы, мира вещей (созданных человеком), а также из “МИРА ИДЕЙ” (мира Платона). В МИРЕ ИДЕЙ стала накапливаться БАЗА ЗНАНИЙ человеческой цивилизации. Таким образом, процесс цефализации, по-видимому, перешел в эволюцию ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА. Означает ли это, что эволюционного тупика не будет, а начнется эволюция ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА?

Надо признать, что по сей день, нет удовлетворительных ответов на эти вопросы. Но тем не менее интересен вопрос о формировании инвариантных причинно-следственных связей. В настоящей работе разрабатывается новая теория гиперкомплексно-значных инвариантов, остающихся неизменными при различных геометрических (Евклидовых и не-Евклидовых) искажениях. С этой точки зрения визуальные системы животных, состоящие из глаз и отдела “VisualCortex” головного мозга, могут рассматриваться как компьютеры, работающие в алгебрах Клиффорда.

## 1. Цветные и гиперспектральные изображения

### 1.1. Что есть цвет?

Цвет является важнейшим атрибутом визуальной информации. Цвет – это субъективное качество, которое приписывается нашим мозгом всем объектам внешнего мира. Восприятие цвета зависит от многих факторов окружающего мира. Прежде всего, он зависит от того, электромагнитное излучение какой совокупности длин волн поглощается объектом и какой совокупности отражается и попадает в глаз [5-7].



*Рис 6. Ньютон пропустил белый свет через первую призму и на ее выходе получил семь цветовых полос. Ньютон рассматривал этот факт как свидетельство того, что белый свет имеет сложную структуру и состоит из семи составных частей*

Существенный вклад в физиологическую оптику внес И.Ньютон. В 1666 году он [8], пропуская белый свет через призму, впервые установил, что белый свет носит сложный характер и его можно разделить на семь ярко выраженных составных частей (красную, оранжевую, желтую, зеленую, голубую, синюю и фиолетовую, см. рис. 6). Позднее Ньютон, пропустив спектр, состоящий из различных цветовых частей, через вторую призму и на ее выходе получил белый свет. Так впервые в мире был проведен анализ и синтез света.

Таким образом, Ньютон первым насчитал в радуге семь цветов. Также он отметил тот факт, что переходы между цветами размыты. Ньютон был первым, кто заметил, что красный и фиолетовый "концы" радуги, будучи максимально удаленными с физической точки зрения, приближаются друг к другу по производимому субъективному впечатлению. И предложил замкнуть радугу в круг. Цветовой круг Ньютона насчитывает восемь цветов. Красный и фиолетовый замыкаются через пурпурный цвет. Его нет в радуге. Эта модель позволяла на качественном уровне предсказывать результаты смешения цветов. После Ньютона, заложившего основы теории цвета в его работе "Optics" [8], цвет оказался вовлеченным во многие науки от психологии до физики.

Эмоциональное и психологическое воздействие цвета на человека было изучено Гете в его знаменитой работе "Farbenlehre" [9]. Гете впервые предложил модель синтеза цвета из трех базовых цветов – красного, желтого и голубо-

го. Для этого он предложил использовать треугольник (см. рис. 7), в вершины которого были помещены три базовых (примитивных) цвета.



Рис. 7. Треугольник Гете

Работы Ньютона и Гете положили начало многочисленным исследованиям, посвященным изучению природы света и цвета. Следующее значительное открытие было сделано английским физиком Томасом Юнгом, который опубликовал в 1801 знаменитую работу “The Trichromatic Theory of Color Vision” [10]. Данная работа была значительно доработана и развита немецкими физиками Германом фон Гельмгольцем и Максвеллом [11-12]. Труды этих ученых в настоящее время составляют суть теории цвета Юнга-Гельмгольца-Максвелла [10-12]. Согласно их теории, любой цвет может быть представлен в виде линейной выпуклой комбинации трех основных цветов [13-14].

Эта теория получила убедительное подтверждение с биологической точки зрения, когда Юнг выяснил, что сетчатка человеческого глаза состоит из четырех типов фоторецепторов, представленных на рис. 8, где можно увидеть распределение серых и цветных фоторецепторов по сетчатке.

Первый тип рецепторов формирует серое изображение. Три остальных типа формируют красное, зеленое и голубое изображения, линейная комбинация которых и дает нам ощущение цвета. Цветные фоторецепторы воспринимают свет в различных частях электромагнитного диапазона.

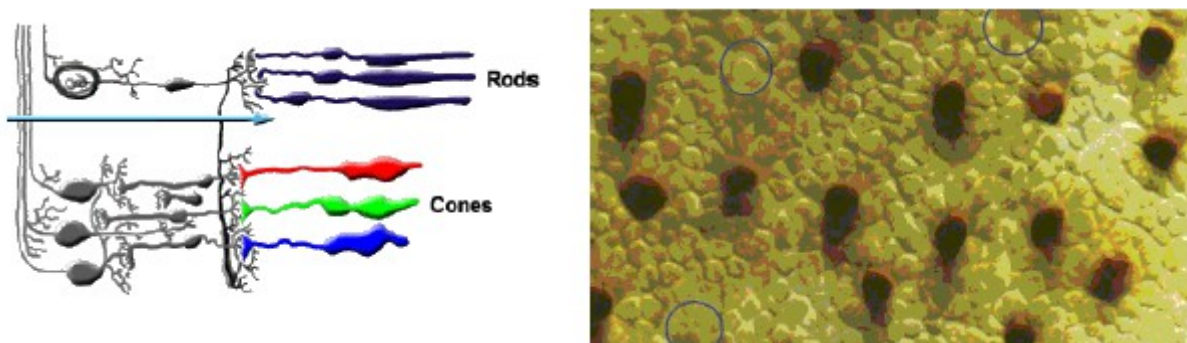


Рис. 8. (Y, R, G, B)-рецепторы

Каждый из фоторецепторов имеет свою амплитудно-частотную характеристику (АЧХ), показывающую какую часть белого света пропускает фоторецептор. Эти характеристики (кривые прозрачности фоторецептора) представлены на рис. 9.

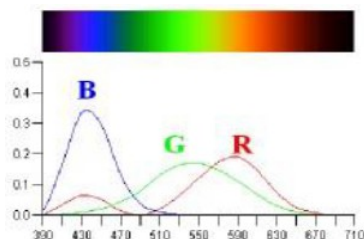


Рис. 9. Амплитудно-частотные характеристики трех типов (R, G, B)-фоторецепторов

Впервые основные идеи трехкомпонентной теории цветов были высказаны М.В.Ломоносовым в его знаменитом сочинении "Слово о происхождении света" (1756). К трехкомпонентной теории цветов опытным путем пришел и Томас Юнг, который обнаружил, что любой видимый в спектре цвет может быть получен смешением не менее трех световых лучей.

### 1.2. Векторное представление цвета

В настоящее время представление цвета основывается на трех-компонентной теории Ломоносова-Юнга [5-6,15], в основе которой лежит предположение о том, что цвет является аддитивной комбинацией трех базовых цветов. Более точно, электромагнитное излучение со спектром  $V(\lambda)$ , сосредоточенным в спектральном диапазоне  $\lambda \in [380 \text{ nm}, 780 \text{ nm}]$  воспринимается человеческим глазом как видимый цветной свет. Колбочки каждого типа (красные, зеленые, голубые) имеют специфические амплитудно-частотные характеристики (см. рис. 9), максимумы которых сосредоточены на  $\lambda_R = 700 \text{ nm}$ ,  $\lambda_G = 546.1 \text{ nm}$  и  $\lambda_B = 435.8 \text{ nm}$ . Видимый свет некоторого цвета  $V(\lambda)$  представляется линейной комбинацией АЧХ  $R(\lambda)$ ,  $G(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$  следующим образом.

Если АЧХ нормализовать до белого цвета  $W(\lambda)$  так, что бы  $W(\lambda) = R(\lambda) + G(\lambda) + B(\lambda)$ , то можно написать  $V(\lambda) = r \cdot R(\lambda) + g \cdot G(\lambda) + b \cdot B(\lambda)$ , где  $r, g, b$  - реакции соответствующих колбочек на видимый цвет  $V(\lambda)$ . Поэтому каждый цвет ассоциируется с точкой  $(r, g, b) \in R_{col}^3$  трехмерного пространства  $R_{col}^3$  (см. рис. 10), натянутого на "red", "green" и "blue" единичные векторы  $\vec{e}_R, \vec{e}_G, \vec{e}_B$ .

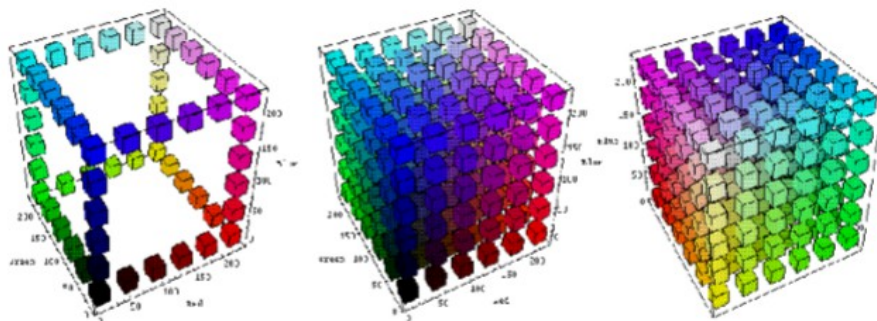


Рис. 10. 3-D перцептуальное цветовое RGB-пространство  $R_{col}^3$

Это пространство называется перцептуальным RGB-пространством. Оно полно в том смысле, что каждый цвет однозначно представляется в нем в виде трехмерного вектора.

В геометрическом представлении (см. рис.11) вектору  $(r, g, b) \in R_{col}^3$  соответствует точка  $C(r, g, b)$  с координатами  $(r, g, b)$ . Пусть  $O$  - начало координат, а  $\vec{T}_{Ach}$  - линия, на которой лежат точки с одинаковыми координатами  $r=g=b$  (она называется ахроматической диагональю). Пусть далее  $\Delta_M(a_{lu})$  плоскость  $r+g+b=a_{lu}$  перпендикулярная ахроматической оси  $\vec{T}_{Ach}$  и пересекающая ее на удалении  $a_{lu}$  от начала координат.

Эта плоскость содержит в себе линию  $QC$  также перпендикулярную  $\vec{T}_{Ach}$  и называется хроматической плоскостью. Тогда вектор  $(r, g, b)$  может быть описан: 1) проекцией  $a_{lu}$  отрезка  $OC$  на линию  $\vec{T}_{Ach}$ , 2) расстоянием  $R_{ch}$  от  $C(r, g, b)$  до этой линии, 3) азимутальным (хроматическим) углом  $\theta_{ch}$ .

Полярный угол  $\varphi$  между  $OC$  и ахроматической линией  $\vec{T}_{Ach}$  определяется выражением  $tg \varphi = R_{ch}/a_{lu}$ , а расстояние от начала координат до точки  $C(r, g, b)$  есть  $d^2 = r^2 + g^2 + b^2$ . Проекция  $a_{lu} = OQ$  вектора  $OC$  на ахроматическую линию  $\vec{T}_{Ach}$  с направляющим вектором  $e^1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$  есть  $a_{lu} = (r+g+b)/\sqrt{3}$ . Это число называется яркостью точки  $C(r, g, b)$ .



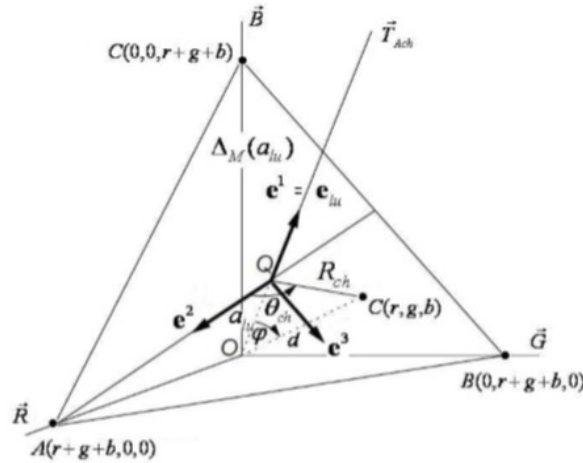


Рис 11. Цветовые переменные  $a_{lu} = (r+g+b)/\sqrt{3}$ ,  $d = \sqrt{r^2+g^2+b^2}$ ,  $R_{ch} = \sqrt{d^2 - a_{lu}^2}$ ,  $\theta_{ch}$ ,  $\varphi$  вектора  $(r, g, b)$ , представленного точкой  $C(r, g, b)$

Расстояние  $R_{ch} = CQ$  от точки  $C(r, g, b)$  до ахроматической линии  $\vec{T}_{Ach}$  называется хроматическим радиусом или насыщенностью точки  $C(r, g, b)$ . Оно вычисляется как расстояние от точки  $C(r, g, b)$  до точки  $Q$  с координатами  $((r+g+b)/3, (r+g+b)/3, (r+g+b)/3)$  :

$$R_{ch}^2 = d^2 - a_{lu}^2 = (r^2 + g^2 + b^2) - \frac{(r+g+b)^2}{3} = \frac{2}{3}(r^2 + g^2 + b^2 - rg - rb - gb) = \frac{1}{3}[(r-g)^2 + (r-b)^2 + (g-b)^2]. \quad (1)$$

Величины  $a_{lu}$  и  $R_{ch} = CQ$  показаны на рис.11. Хроматический угол (цветовой тон)  $0 \leq \theta_{ch} < 2\pi$  определяется как угол в плоскости  $\Delta_M(a_{lu})$ . Выражение для  $\theta_{ch}$  в терминах  $r, g, b$  может быть получено в системе координат, связанной со следующими векторами

$$\langle e^1 | = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \langle e_{lu} |, \quad \langle e^2 | = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1), \quad \langle e^3 | = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1).$$

Первый вектор  $\langle e^1 | = (1, 1, 1)/\sqrt{3} = \langle e_{lu} |$  лежит на ахроматической линии  $\vec{T}_{Ach}$ , векторы  $\langle e^2 | = (-2, 1, 1)/\sqrt{6}$  и  $\langle e^3 | = (0, 1, -1)/\sqrt{2}$  лежат в хроматической плоскости  $\Delta_M(0) \equiv E_{ch}$  (на рис. 11 все три вектора перенесены с плоскости  $\Delta_M(0) \equiv E_{ch}$  в плоскость  $\Delta_M(a_{lu})$ ). Теперь можно вычислить три ортогональные проекции вектора  $\vec{OC}(r, g, b)$  на три введенных ортогональных вектора

$$\begin{bmatrix} a_{lu} \\ x_{ch} \\ y_{ch} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3}(r+g+b) \\ 1/\sqrt{6}(2r-g-b) \\ 1/\sqrt{2}(g-b) \end{bmatrix},$$

где

$$a_{lu} = \langle \mathbf{e}_{lu} | C \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(r+g+b),$$

$$x_{ch} = \langle \mathbf{e}^2 | C \rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left( r - \frac{g-b}{2} \right), \quad y_{ch} = \langle \mathbf{e}^3 | C \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(g-b).$$

Выражение для хроматического угла  $\theta_{ch}$  как функции  $r, g, b$  есть

$$\theta_{ch} = \arctg \frac{y_{ch}}{x_{ch}} = \operatorname{arcth} \left( \frac{\sqrt{3}(g-b)}{2r-g-b} \right) \quad (2)$$

Итак, яркостное число  $a_{lu} = \langle \mathbf{e}_{lu} | C \rangle = (r+g+b)/\sqrt{3}$  лежит на ахроматической оси  $\vec{T}_{Ach}$  RGB-пространства. Из двух чисел  $x_{ch}, y_{ch}$ , можно построить комплексное число  $z_{ch} = (2/3)^{1/2} [(r-(g-b)/2) + i\sqrt{3}/2(g-b)]$ , лежащее в комплексной плоскости  $\Delta_M(0) \equiv E_{ch}$ , имеющее модуль

$$|z_{ch}| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\left( r - \frac{g-b}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}(g-b)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(r^2 + g^2 + b^2 - rg - rb - gb)} = R_{ch}.$$

### 1.3. Векторные модели цветных и ретинальных изображений

Цветное изображение может быть представлено как векторнозначная  $(R, G, B)$ -функция от двух переменных (см. Рис. 12).

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{col}(x, y) &= \begin{bmatrix} f_R(x, y) \\ f_G(x, y) \\ f_B(x, y) \end{bmatrix} = f_R(x, y) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + f_G(x, y) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + f_B(x, y) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= f_R(x, y)\mathbf{e}_R + f_G(x, y)\mathbf{e}_G + f_B(x, y)\mathbf{e}_B. \end{aligned}$$

Итак, цветное изображение – есть векторное или трехканальное изображение  $f^{col} = (f_R, f_G, f_B)$ .

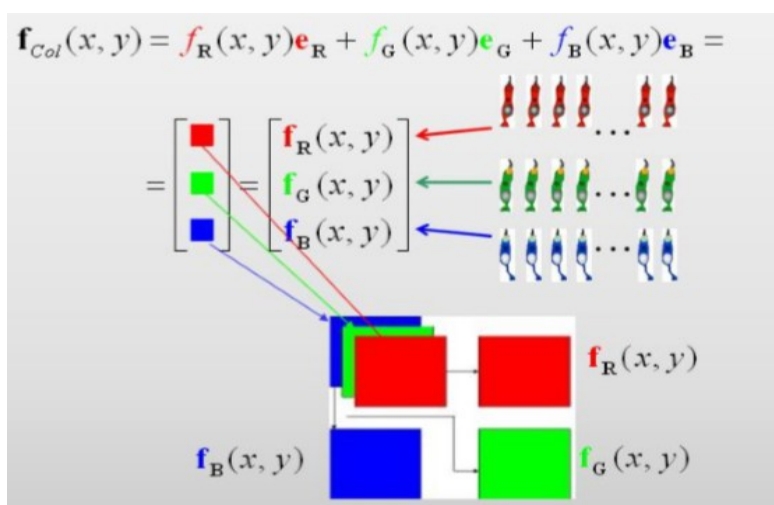


Рис. 12. Векторное представление цветного изображения, формирующегося всеми колбочками сетчатки.

Аналогично, изображение, генерирующиеся палочками и колбочками, является четырех компонентным (см. рис. 13).

$$\mathbf{f}_{Ret}(x, y) = f_Y(x, y)\mathbf{e}_Y + f_R(x, y)\mathbf{e}_R + f_G(x, y)\mathbf{e}_G + f_B(x, y)\mathbf{e}_B =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{grey} \\ \text{red} \\ \text{green} \\ \text{blue} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_Y(x, y) \\ f_R(x, y) \\ f_G(x, y) \\ f_B(x, y) \end{bmatrix}.$$

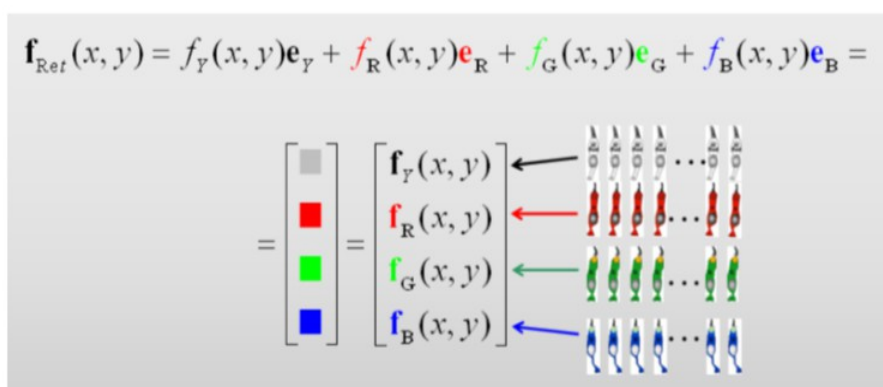


Рис. 13. Векторное представление цветного изображения, формирующегося всеми колбочками и палочками сетчатки.

#### 1.4. Гиперспектральные изображения

В настоящей работе термины «мультиспектральные и гиперспектральные изображения» используются для изображений с более, чем одной компонентой. Они представляют собой пакет (серию) изображений, полученных оптическими

датчиками в различных частотных диапазонах с длинами волн  $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ , называемыми спектральными каналами, где  $K$  - число различных оптических каналов [16-18]. Мультицветная техника использует малое число спектральных компонент (меньше, чем  $K=10$ ). Гиперспектральные системы используют несколько десятков и даже сотен спектральных каналов. Гиперспектральная камера формирует пакет из  $K$  одноканальных изображений, каждое из которых получено в одном спектральном диапазоне. В этом случае формируется, так называемый, —3-мерный куб (рис.14) с тремя координатными направлениями ( $x, y, \lambda$ ) (две пространственные координаты ( $x, y$ ), а третья  $\lambda$  – спектральная).

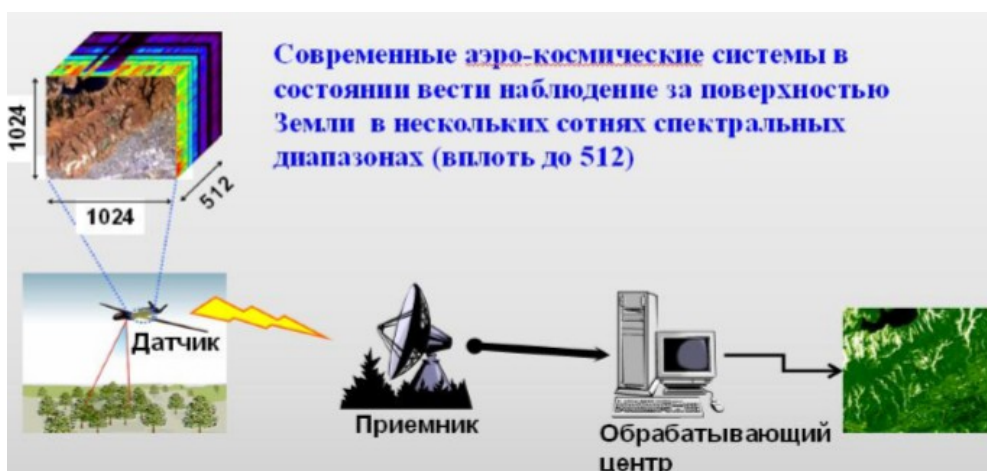


Рис 14. Гиперспектральная камера формирует пакет из  $k$  одноканальных изображений в виде “3-мерного куб” ( $1024 \times 1024 \times 512$ ) с тремя координатными направлениями (две пространственные координаты ( $x, y$ ), а третья  $\lambda$  – спектральная)

Каждый пиксель в  $(x, y, \lambda)$ -кубе, представляет собой дискретный спектр, измеренный на длинах волн  $\lambda_1, \dots, \lambda_K$  и наблюдаемый в точке  $(x, y)$  двумерной сцены. Подобные изображения могут быть охарактеризованы как изображения, состоящие из  $K$ -мерных ( $K$ -D) векторно-значных пикселей:

$$\vec{f}_{HS}(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_{\lambda_1}(x, y) \\ f_{\lambda_2}(x, y) \\ \dots \\ f_{\lambda_k}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ \dots \\ f_k(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\lambda} S^{obj}(\lambda, x, y, z) H_1(\lambda) d\lambda \\ \int_{\lambda} S^{obj}(\lambda, x, y, z) H_2(\lambda) d\lambda \\ \dots \\ \int_{\lambda} S^{obj}(\lambda, x, y, z) H_k(\lambda) d\lambda \end{bmatrix}.$$

Цветное RGB изображение (3-канальное или 3-компонентное изображение) является примером такого изображения.

## 2. Главные объекты теории

### 2.1. Типы изображений

Многоканальные изображения нашли широкое применение в системах дистанционного зондирования Земли при решении различных научных и прикладных задач [16-18]. В этой работе мы предлагаем новые модели многоканальных изображений с использованием коммутативных гиперкомплексных алгебр. Термин —многоканальные изображения используется для обозначения изображений с более чем одной компонентой. Они формируются из ряда изображений  $f_{\lambda_0}(\mathbf{x}), f_{\lambda_1}(\mathbf{x}), \dots, f_{\lambda_{K-1}}(\mathbf{x})$ , полученных в различных оптических диапазонах с длинами волн  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{K-1}$ , называемых спектральными каналами, где  $K$  – число различных оптических каналов. Простым примером является цветное изображение  $f^{col}(x, y) = (f_R(x, y), f_G(x, y), f_B(x, y))$  с красной  $f_R(x, y)$ , зеленой  $f_G(x, y)$  и голубой  $f_B(x, y)$  компонентами. Если изображение собрано из нескольких единиц каналов (меньше, чем 10), то оно называется мультиспектральным, в то время как изображение, состоящее из нескольких десятков или сотен каналов, называется гиперспектральным (конечно, это деление носит условный характер). Многоканальные изображения рассматриваются как  $n$ -DK-компонентные (векторно-значные) сигналы:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{K-1}(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{V}^K$$

со значениями, лежащими в  $K$ -D перцептуальном векторном пространстве  $V^K$ , где  $x \in \mathbf{R}^n, n = 2, 3, \dots$ . Следующие случаи наиболее интересны.

- 2-D и 3-D бихроматические изображения  
 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2), f_1(x_1, x_2)) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}^2, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2, x_3), f_1(x_1, x_2, x_3)) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}^2$ .
- 2-D и 3-D трихроматические (цветные) изображения  
 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2), f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}_{rgb}^3,$   
 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2, x_3), f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3)) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_{rgb}^3.$
- 2-D и 3-DK-канальные изображения  
 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2), f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}_{rgb}^3,$   
 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2, x_3), f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3)) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_{rgb}^3.$
- 2-D и 3-D бихроматические бинокулярные (двухкамерные) изображения  
 $\mathbf{f}^{Bin}(x_1, x_2) = (\mathbf{f}^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^2 \rightarrow {}^L\mathbf{V}^2 \oplus {}^R\mathbf{V}^2,$   
 $\mathbf{f}^{Bin}(x_1, x_2, x_3) = (\mathbf{f}^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^3 \rightarrow {}^L\mathbf{V}^2 \oplus {}^R\mathbf{V}^2.$
- 2-D и 3-D трихроматические (цветные) бинокулярные изображения  
 $\mathbf{f}^{Bin}(x_1, x_2) = (\mathbf{f}^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^2 \rightarrow {}^L\mathbf{V}_{rgb}^3 \oplus {}^R\mathbf{V}_{rgb}^3,$   
 $\mathbf{f}^{Bin}(x_1, x_2, x_3) = (\mathbf{f}^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^3 \rightarrow {}^L\mathbf{V}_{rgb}^3 \oplus {}^R\mathbf{V}_{rgb}^3.$
- 2-D и 3-DK-канальные бинокулярные изображения  
 $\mathbf{f}^{Bin}(x_1, x_2) = (\mathbf{f}^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^2 \rightarrow {}^L\mathbf{V}^K \oplus {}^R\mathbf{V}^K,$   
 $\mathbf{f}^{Bin}(x_1, x_2, x_3) = (\mathbf{f}^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^3 \rightarrow {}^L\mathbf{V}^K \oplus {}^R\mathbf{V}^K,$

где  $f^L(x), f^R(x)$  – изображения, возникающие на ретине левого и правого глаз, соответственно [19].

### 2.2. Алгебраические модели изображений

Для обработки и распознавания изображений мы превращаем (см. рис. 15) физическое  $R^n$  и перцептуальное пространства  $V^K$  в гиперкомплексные алгебры (и называем их физической и перцептуальной алгебрами), оснащая каждую координатную ось в  $R^n$  и  $V^K$  соответствующей гипермнимой единицей.

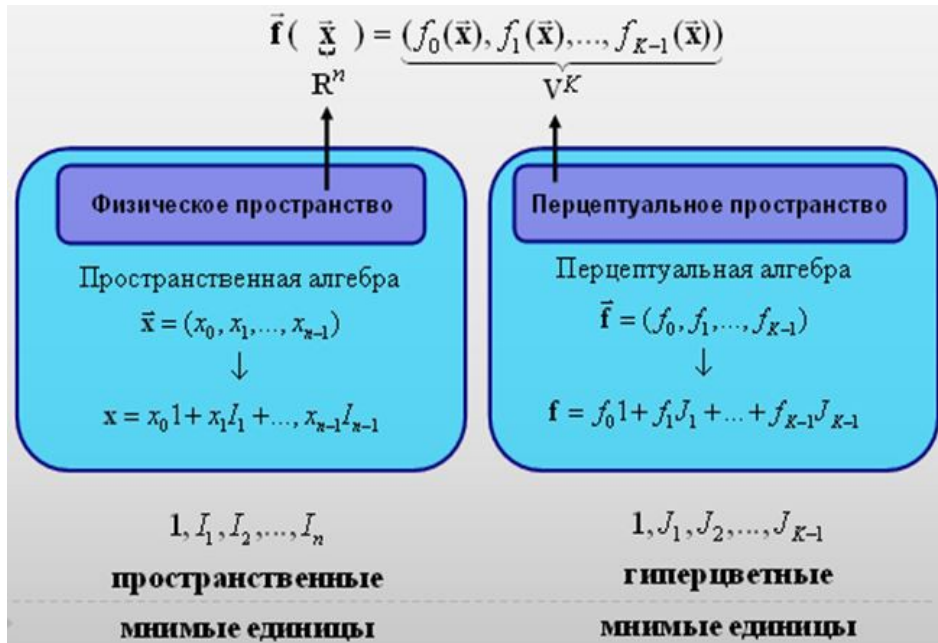


Рис. 15. Алгебраизация физического и перцептуального пространств

Это оснащение представлено ниже:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (f_0(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{K-1}(\mathbf{x})) \rightarrow \underbrace{f(x_0 I_0 + x_1 I_1 + \dots + x_{n-1} I_{n-1})}_{\substack{n\text{-мерное} \\ \text{гиперкомплексное пространственное} \\ \text{число}}} = \\ &= \underbrace{J_0 \cdot f_0(x_0 I_0 + x_1 I_1 + \dots + x_{n-1} I_{n-1}) + \dots + J_{K-1} \cdot f_{K-1}(x_0 I_0 + x_1 I_1 + \dots + x_{n-1} I_{n-1})}_{\substack{K\text{-мерное} \\ \text{гиперкомплексное число}}} = \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^{K-1} J_i \cdot f_i(x_0 I_0 + x_1 I_1 + \dots + x_{n-1} I_{n-1})}_{\substack{K\text{-мерное} \\ \text{гиперкомплексное гиперцветное число}}} \end{aligned}$$

Гиперкомплексные алгебры являются обобщениями комплексных, кватернионных и октавных алгебр. Их алгебраическая природа должна соответствовать свойствам физического и перцептуального пространств. Для распознавания 2-D, 3-D и n-D изображений мы превращаем физические пространства  $R^2$ ,  $R^3$  и  $R^n$  в соответствующие им алгебры Клиффорда гиперкомплексных чисел (и называем их пространственными алгебрами). При этом изменения в окружающем нас мире (такие как геометрические преобразования в виде трансляций, вращений и масштабных искажений) могут быть описаны на языке пространственных алгебр как действия на физических пространствах  $R^2$ ,  $R^3$  и  $R^n$  некоторой совокупности гиперкомплексных чисел, образующих пространственные спинорные группы Клиффорда. Мы предполагаем, что мозг человека может использовать спинорные группы для реализации ментальных движения образов, возникающих на экране сознания, когда, например, человек спит или когда он в состоянии измененного сознания видит галлюцинации.

### 2.3. Признаки и инварианты

Пусть

$$\mathbb{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^K) := \left\{ \vec{f}(\vec{x}, t) \mid \vec{f}(\vec{x}, t) : \mathbf{R}_{Sp}^n \times \mathbf{R}_t^1 \rightarrow \mathbf{R}^K \right\}$$

пространство функций заданных на  $n$ -мерном физическом пространстве со значениями в  $K$ -мерном перцептуальном пространстве.

**Определение 1.** Интегральная оценка  $\Phi$  некоторого свойства функции  $\vec{f}(\vec{x}, t)$ , выраженная вещественным числом  $p$ , называется признаком изображения:

$$p_1 = \Phi_1[\vec{f}(\vec{x}, t)], p_2 = \Phi_2[\vec{f}(\vec{x}, t)], \dots, p_s = \Phi_s[\vec{f}(\vec{x}, t)].$$

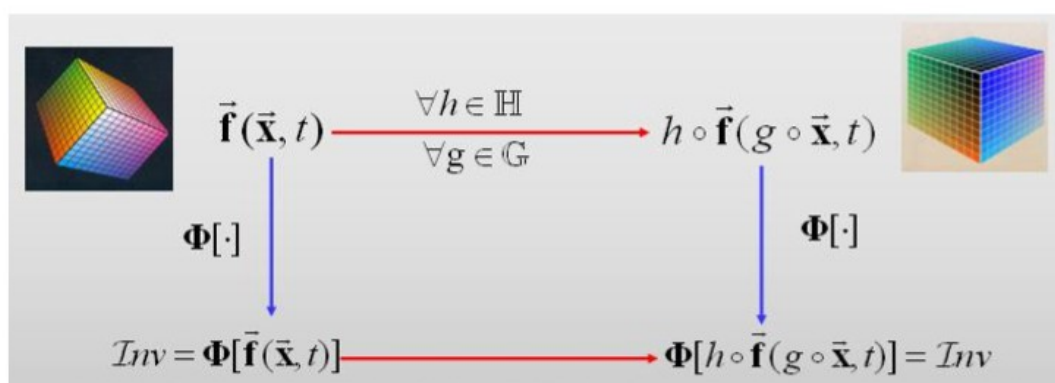


Рис. 16. Диаграмма, иллюстрирующая абсолютную независимость абсолютного инвариантного признака по отношению к действию пространственно-временных и перцептуальных преобразований изображения.

**Определение 2.** Признак  $Inv = \Phi[\vec{f}(\vec{x}, t)]$  не изменяющийся при всех преобразованиях изображения под действием  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$ , называется абсолютным инвариантом, то есть

$$Inv_g^h = \Phi[h \circ \vec{f}(g \circ \vec{x}, t)] = \Phi[\vec{f}(\vec{x}, t)] = Inv, \quad \forall g \in \mathbf{G}, \forall h \in \mathbf{H},$$

что иллюстрируется диаграммой, представленной на рис. 16.

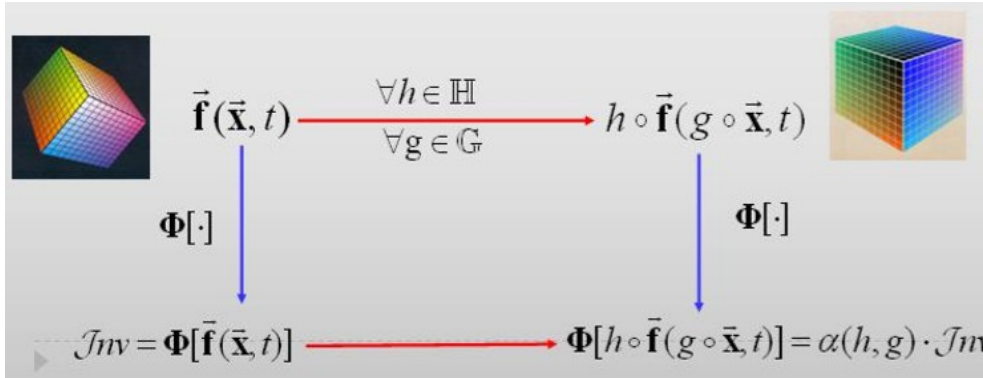


Рис. 17. Диаграмма, иллюстрирующая относительную независимость относительного инвариантного признака по отношению ко всем пространственно-временным и перцептуальным преобразованиям изображения.

**Определение 3.** Признак  $Inv = \Phi[\vec{f}(\vec{x}, t)]$  изменяющийся с точностью до константы  $\alpha(g, h)$  (возможно зависящей от  $g \in \mathbf{G}$  и  $h \in \mathbf{H}$ ) при всех преобразованиях из  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$ , называется относительным инвариантом, то есть

$$Inv_g^h = \Phi[h \circ \vec{f}(g \circ \vec{x}, t)] = \alpha(g, h)\Phi[\vec{f}(\vec{x}, t)] = \alpha(g, h)Inv, \quad \forall g \in \mathbf{G}, \forall h \in \mathbf{H}.$$

что иллюстрируется диаграммой на рис 17.

**Определение 4.** Два изображения  $\vec{f}_1(\vec{x}, t)$  и  $\vec{f}_2(\vec{x}, t)$  называются  $(H \times G)$ -эквивалентными, если найдутся два таких элемента  $h \in \mathbf{H}$  и  $g \in \mathbf{G}$  что

$$\vec{f}_2(\vec{x}, t) = h \circ \vec{f}_1(g \circ \vec{x}, t).$$

Пространство изображений

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^K) := \{ \vec{f}(\vec{x}, t) \mid \vec{f}(\vec{x}, t) : \mathbb{R}_{sp}^n \times \mathbb{R}_t^1 \rightarrow \mathbb{R}^K \}$$

под действием групп  $\mathbf{G}$  и  $\mathbf{H}$  разбивается на классы  $(H \times G)$ -эквивалентных изображений (непересекающиеся  $(H \times G)$ -орбиты). Множество всех орбит обычно обозначают следующим символом  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^K) / H \times G$ . Очевидно, что абсолютный инвариант принимает одинаковые значения на всех изображениях, принадлежащих  $(H \times G)$ -орбите. Этот факт иллюстрируется рис.18, где представлены  $\mathbf{G}$ -орбиты изображения буква “F”.



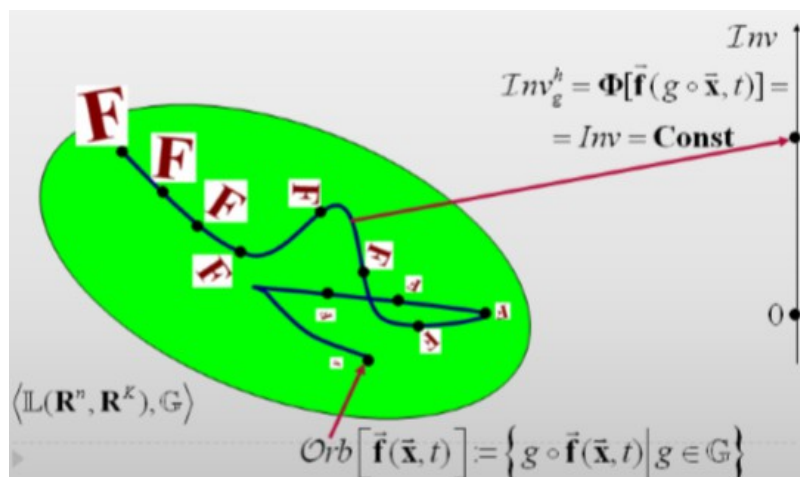


Рис. 18. Разбиение пространства изображений  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^K) := \{ \vec{f}(\vec{x}, t) \mid \vec{f}(\vec{x}, t) : \mathbb{R}_{sp}^n \times \mathbb{R}_t^1 \rightarrow \mathbb{R}^K \}$  на  $G$ -траектории (непересекающиеся  $G$ -орбиты) под действием пространственно-временной группы  $G$ .

#### 2.4. Постановка проблемы и пути ее решения

Мы полагаем, что в физическом  $R^n$  и перцептуальном  $V^K$  пространствах действуют возрастающие по сложности последовательности полугрупп преобразований  $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_p \subseteq \dots$  и  $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_p \subseteq \dots$ , соответственно (см. рис. 19). Главная задача данной работы – разработать теорию инвариантных признаков изображений по отношению к действию этих полугрупп.



Рис. 19. Основные атрибуты изображения: физическое пространство-время  $R^n$  (область определения изображения), перцептуальное пространство  $V^K$  (область значений изображения), возрастающая по сложности последовательность полугрупп  $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_p \subseteq \dots$  преобразований физического пространства-времени  $R^n$ , возрастающая по сложности последовательность  $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_p \subseteq \dots$  групп преобразований перцептуального пространства  $V^K$ .

Для решения этой проблемы мы оснащаем область определения  $R^n$  и область значений  $V^K$  структурами гиперкомплексных алгебр. Для этого мы во-первых, превращаем физические пространства  $R^2$ ,  $R^3$  и  $R^n$  в соответствующие им алгебры Клиффорда гиперкомплексных чисел (и называем их *пространственными алгебрами*). При этом изменения в окружающем нас мире (такие, как геометрические преобразования в виде трансляций, вращений и масштабных искажений) могут быть описаны на языке пространственных алгебр как действия на физических пространствах  $R^2$ ,  $R^3$  и  $R^n$  некоторой совокупности гиперкомплексных чисел, образующих пространственные *спинорные группы Клиффорда* (см. рис. 20). Аналогично, каждый многоканальный пиксель рассматривается не как  $K$ -D вектор, а как  $K$ -D гиперкомплексное число (заметим, что числовая природа не отменяет векторной природы гиперкомплексного числа: просто векторное пространство оснащается операцией векторного умножения векторов, которые интерпретируются как числа). Следовательно, перцептуальные пространства  $V^2$ ,  $V^3_{\text{rgb}}$  и  $V^K$  превращаются в соответствующие им *перцептуальные алгебры Клиффорда гиперкомплексных чисел*. При этом изменения в перцептуальном мире (такие как изменения яркости, насыщенности, цветового тона) могут быть описаны на языке пространственных алгебр как действия в этом мире как некоторой совокупности гиперкомплексных чисел, образующих *перцептуальные спинорные группы Клиффорда* (см. рис. 20).

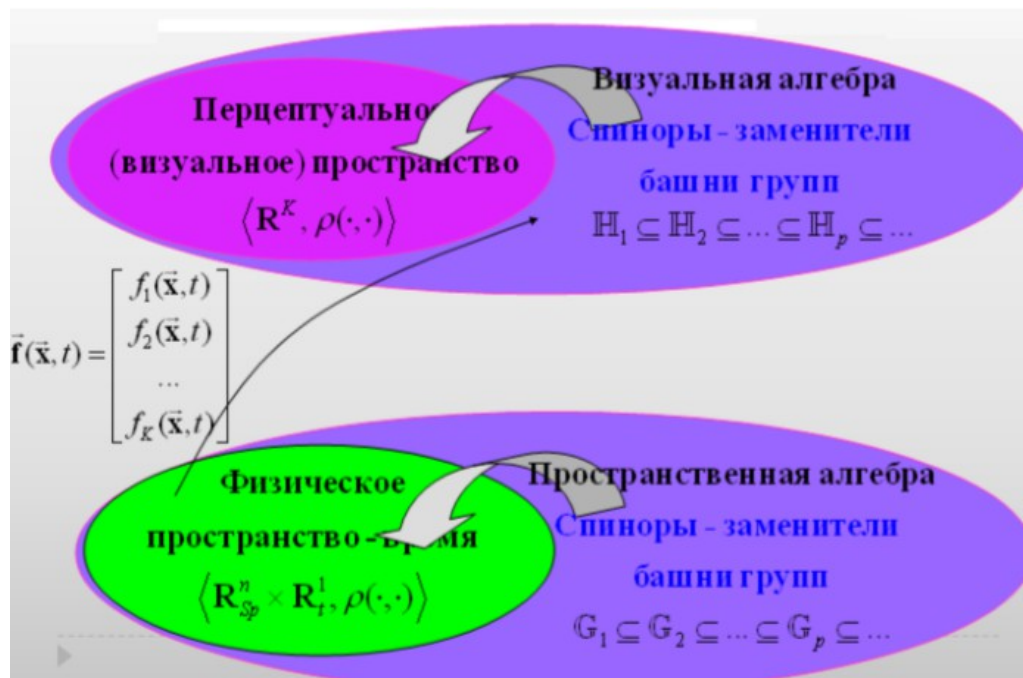


Рис. 20. Основные атрибуты изображения: физическое пространство-время  $R^n$ , погруженное в пространственно-временную алгебру, перцептуальное (визуальное) пространство  $V^K$ , погруженное в визуальную алгебру.

Для алгебраизации перцептуального пространства мы используем два типа гиперкомплексных алгебр. Когда речь идет об изображениях, возникающих на ретине глаза, мы используем, так называемые, коммутативные мультиплетные алгебры и трактуем изображения как мультиплетно-значную функции

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{K-1}(\mathbf{x})) &\rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{s=0}^{K-1} f_s(\mathbf{x})\varepsilon^s = \\ &= f_0(\mathbf{x})\varepsilon^0 + f_1(\mathbf{x})\varepsilon^1 + \dots + f_{K-1}(\mathbf{x})\varepsilon^{K-1}, \end{aligned}$$

которая принимает значения в одной из следующих трех коммутативных алгебр  $Alg_K(R|\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{K-1}) = Alg_K$ , где  $\varepsilon^K = -1, \varepsilon^K = 0$  или  $\varepsilon^K = +1$ . Здесь  $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{K-1}$  – гипермнимые единицы (гиперспектральные единицы) с коммутативным законом умножения

$$\varepsilon^r \cdot \varepsilon^s = \begin{cases} \varepsilon^{r \oplus s \pmod{K}}, & \text{if } \varepsilon^K = +1, \\ \text{Hev}(l-m)\varepsilon^{r \oplus s \pmod{K}}, & \text{if } \varepsilon^K = 0, \\ \text{Sign}(l-m)\varepsilon^{r \oplus s \pmod{K}}, & \text{if } \varepsilon^K = -1, \end{cases} \quad \text{Sign}(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad \text{Hev}(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

где  $l \oplus m$  – суть сложение по модулю  $K$ , и  $\text{Sign}$  и  $\text{Hev}$  - функции. Когда же речь идет об изображениях, возникающих в отделе VisualCortex (VC) головного мозга, то мы используем так называемые некоммутативные алгебры Клиффорда и трактуем изображения как мультиплетно-значную функции, принимающие значения в некоторой алгебре Клиффорда

$$Alg_{2^k}^{Vis}(R|1, J_1, J_2, \dots, J_{K-1}) = Alg_{2^k}^{Vis(u,v,w)} :$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_K(\mathbf{x})) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})J_1 + f_2(\mathbf{x})J_2 + \dots + f_K(\mathbf{x})J_K,$$

где  $J_1, J_2, \dots, J_K$  – гипермнимые единицы Клиффорда. Одно из наших главных предположений состоит в том, что мозг животных должен иметь врожденные знания о подобных числах и уметь ими оперировать в режиме распознавания образов. В данной работе мы опираемся на следующие ранее высказанные гипотезы [19-22]:

1. Мозг интерпретирует каждый пиксель изображения не как многомерный вектор, а как многомерное гиперкомплексное число. Если мы допускаем существование векторной природы пикселей, то можно пойти и дальше: допустить возможность умножения этих векторов. Тем самым мы не опровергаем векторную природу пикселя, а обогащаем ее дополнительными математическими возможностями. Речь идет о расширении возможностей математического языка

описания реальной действительности за счет введения операции умножения пикселей.

2. Визуальные системы животных с различной эволюционной историей используют различные гиперкомплексные алгебры для обработки цветных и многоканальных изображений. По-видимому, отдел VisualCortex обладает способностью оперировать пикселями изображения как с гиперкомплексными числами.

3. Головной мозг использует различные алгебры на двух уровнях: коммутативные алгебры на уровне ретины при их обработке и некоммутативные алгебры на уровне VC при распознавании изображений.

Мы знаем, что животные способны почти мгновенно и эффективно распознавать окружающие объекты. Для инженера важно описать это явление на таком математическом языке, который позволил бы ему построить техническую систему способную работать не менее эффективно, чем исходная биологическая система, а вопрос об адекватности используемой математической модели для инженера (в отличие от биолога и физика) стоит на втором плане.

Мы не согласны с Л. Кронекером, утверждавшим, что «Бог создал целые числа, а все остальное – дело рук человеческих». Мы предполагаем, что Бог был первым инженером, который знал высшую алгебру и использовал теорию гиперкомплексных чисел для проектирования визуальных систем живых существ.

### 3. Алгебраические модели двумерных изображений

2-D изображения

$$f(x_1, x_2) = (f_0(x_1, x_2), f_1(x_1, x_2), \dots, f_{K-1}(x_1, x_2)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow V^K$$

обладают двумя атрибутами:  $\mathbb{R}^2, V^K$  – физическим и визуальным пространствами, соответственно. Мы оснащаем эти пространства структурами гиперкомплексных алгебр:

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow Alg_2^{Sp}(\mathbb{R} | 1, I) := \mathbb{R} + \mathbb{R}I = \{z = x_1 + Ix_2 | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\},$$

$$\begin{aligned} V^K \rightarrow Alg_2^{Vis}(\mathbb{R} | 1, J_1, J_2, \dots, J_{K-1}) &:= \mathbb{R} + \mathbb{R}J_1 + \dots + \mathbb{R}J_{K-1} = \\ &= \{f_0 + f_1J_1 + \dots + f_{K-1}J_{K-1} | f_0, f_1, \dots, f_{K-1} \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

где  $I$  – пространственная и  $J_1, J_2, \dots, J_{K-1}$  - гиперцветные мнимые единицы. Эти алгебры мы называем пространственной и перцептуальной алгебрами физического  $\mathbb{R}^2$  и визуального  $V^K$  пространств, соответственно. Мы начнем с алгебраизации 2-D физического пространства, а затем перейдем к алгебраизации перцептуального пространства  $V^K$  для различных  $K = 1, 2, 3, \dots$ .

### 3.1. Алгебраизация двумерного физического пространства

Серые 2-D изображения  $f(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  обладают двумя атрибутами:  $\mathbb{R}^2, V^1 = \mathbb{R}$  – физическим  $\mathbb{R}^2$  и визуальным  $\mathbb{R}$  пространствами, где  $\mathbb{R}$  – алгебра вещественных чисел. Мы оснащаем пространство  $2\mathbb{R}$  структурой 2-D алгебры, так называемых, обобщенных комплексных чисел  $Alg_2^{Sp}(R|1, I)$  [23-31]:

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow Alg_2^{Sp}(R|1, I) := \mathbf{R} + \mathbf{R}I = \{z = x + Iy | x, y \in \mathbf{R}\},$$

где  $I$  – пространственная мнимая единица со свойством  $I^2 = \delta \in \{-1, 0, +1\}$ .

В зависимости от свойств мнимой единицы существует три различных алгебры:

- Если  $I^2 \equiv I_-^2 = -1$ , то алгебра

$Alg_2^{Sp}(R|1, I_-) = \{z = x + I_- y | x, y \in \mathbb{R}; I_-^2 = -1\}$  является полем комплексных пространственных чисел, где  $I_- = i$  – обычная классическая (эллиптическая) мнимая единица.

- Если  $I^2 \equiv I_+^2 = +1$ , то алгебра

$Alg_2^{Sp}(R|1, I_+) = \{z = x + I_+ y | x, y \in \mathbb{R}; I_+^2 = +1\}$  является кольцом двоичных пространственных комплексных чисел, где  $I_+ = e$  – классическая двойная (гиперболическая) мнимая единица.

- Если  $I^2 \equiv I_0^2 = 0$ , то алгебра

$Alg_2^{Sp}(R|1, I_0) = \{z = x + I_0 y | x, y \in \mathbb{R}; I_0^2 = 0\}$  является кольцом дуальных пространственных комплексных чисел, где  $I_0 = \varepsilon$  – классическая дуальная (параболическая) мнимая единица.

Сложение и произведение двух обобщенных комплексных чисел  $z_1 = x_1 + I y_1$  и  $z_2 = x_2 + I y_2$  даются следующими выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 &= (x_1 + I y_1) + (x_2 + I y_2) = (x_1 + x_2) + I(y_1 + y_2), \\ \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 &= (x_1 + I y_1) \cdot (x_2 + I y_2) = (x_1 x_2 + I^2 y_1 y_2) + I(x_1 y_2 + y_1 x_2) = \\ &= (x_1 x_2 + \delta y_1 y_2) + I(x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

В  $Alg_2^{Sp}(R|1, I)$  можно определить операцию сопряжения, которая отображает каждое число  $z = x + I y$  в новое число вида  $\bar{z} = \overline{x + I y} = x - I y$ . Используя эту операцию можно легко превратить обобщенную комплексную плоскость в псевдонормированное пространство, если определить на ней псевдонорму  $N(z)$ .

**Определение 5.** Квадратичная форма числа  $z = x + I y$

$$N_{\mathcal{A}_2^{Sp}}(\mathbf{z}) := \|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}_2^{Sp}} = \mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} = x^2 - I^2 y^2 = \begin{cases} x^2 + y^2, & \mathbf{z} \in \mathcal{A}_2^{Sp}(\mathbf{R}|I_-), \\ x^2 - y^2, & \mathbf{z} \in \mathcal{A}_2^{Sp}(\mathbf{R}|I_+), \\ x^2, & \mathbf{z} \in \mathcal{A}_2^{Sp}(\mathbf{R}|I_0). \end{cases}$$

называется его псевдонормой Она может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Легко проверить, что  $N(z_1 z_2) = N(z_1) N(z_2)$ .

**Определение 6.** Арифметическое значение корня квадратного из произведения  $z \bar{z} = N(z)$  называется модулем обобщенного комплексного числа  $z$  и обозначается как

$$|z|_{\mathcal{A}_2^{Sp(p,q,r)}(I,\mathbf{R})} = \sqrt{N_{\mathcal{A}_2^{Sp(p,q,r)}(I,\mathbf{R})}(\mathbf{z})} := \sqrt{\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{A}_2^{Sp(p,q,r)}(I,\mathbf{R})}} = \sqrt{\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}}} =$$

$$= \sqrt{x^2 - I^2 y^2} = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & z \in \mathcal{A}_2^{Sp(0,0,1)}(\mathbf{R}|i^-), \\ \sqrt{x^2 - y^2}, & z \in \mathcal{A}_2^{Sp(1,0,0)}(\mathbf{R}|i^+), \\ |x|, & z \in \mathcal{A}_2^{Sp(0,1,0)}(\mathbf{R}|i^0), \end{cases}$$

или, коротко  $|z|$ , если это не вызывает недоразумений. Модуль можно интерпретировать как расстояние (эллиптическое, гиперболическое или параболическое) от начала координат до точки  $z$ . В первом случае модуль называется эллиптическим, во втором – гиперболическим и в третьем – параболическим. Эти нормы порождают различные метрики в 2-D физическом пространстве (Евклидову, Минковского и метрику Галилея), что позволяет на алгебраическом языке просто описывать геометрические преобразования изображений различной геометрической природы. Действительно, обобщенную комплексную плоскость можно превратить в двумерное псевдометрическое пространство (пространственную геометрию)  $Alg_2^{Sp}(R|1,I) \rightarrow Geo_2^{Sp(\delta)}$ , если определить на ней псевдометрику.

$$\rho_{\delta}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) := \sqrt{(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1)(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - I^2(y_2 - y_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \delta(y_2 - y_1)^2} = \begin{cases} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, & z \in \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|I_-), \\ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}, & z \in \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|I_+), \\ |x_2 - x_1|, & z \in \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|I_0), \end{cases}$$

где  $\mathbf{z}_1 = x_1 + I y_1, \mathbf{z}_2 = x_2 + I y_2$ , а  $\delta$  обозначают сигнатуру псевдометрики, причем  $\delta = -I^2$ . Поэтому алгебры  $\text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|I)$  обобщенных комплексных чисел трансформируется в двумерные псевдометрические пространства  $\text{Geo}_2^{\text{Sp}(\delta)}$ :

- Плоскость классических комплексных чисел превращается в двумерную Евклидову геометрию

$$\text{Geo}_2^{\text{Sp}(-)} = \langle\langle \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|I_-); \rho_-(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \rangle\rangle.$$

- Плоскость двойных чисел трансформируется в двумерное пространство Минковского

$$\text{Geo}_2^{\text{Sp}(+)} = \langle\langle \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|I_+); \rho_+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \rangle\rangle.$$

- Плоскость дуальных чисел трансформируется в двумерное пространство Галилея

$$\text{Geo}_2^{\text{Sp}(0)} = \langle\langle \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|I_0); \rho_0(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \rangle\rangle.$$

Если говорят о всех трех алгебрах (или геометриях) одновременно, то они обозначаются одним символом  $\text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|I)$  (или  $\text{Geo}_2^{\text{Sp}(\delta)}$ , соответственно). Как мы увидим в дальнейшем, алгебры обобщенных чисел позволяют конструировать простые алгоритмы вычисления инвариантов изображений по отношению к широкому классу движений и преобразований двумерных геометрий Евклида, Минковского и Галилея.

**Определение 7.** Множество всех точек обобщенной комплексной плоскости  $\text{Geo}_2^{\text{Sp}(\delta)}$ , удовлетворяющее уравнению

$$|\mathbf{z}|_{\text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|I)}^2 = x^2 - I^2 y^2 = x^2 - \delta y^2 = r^2,$$

называется  $\text{Geo}_2^{\text{Sp}(\delta)}$ -окружностью радиуса  $r$ , центрированной относительно начала координат. Существует три типа окружностей:  $\text{Geo}_2^{\text{Sp}(-)}$ -окружность – классическая *Евклидова окружность* (рис. 21-а),  $\text{Geo}_2^{\text{Sp}(+)}$ -окружность – *гиперболическая окружность Минковского* (рис. 21-б) и  $\text{Geo}_2^{\text{Sp}(0)}$ -окружность –

параболическая окружность Галилея в виде двух параллельных линий (рис. 21-с).

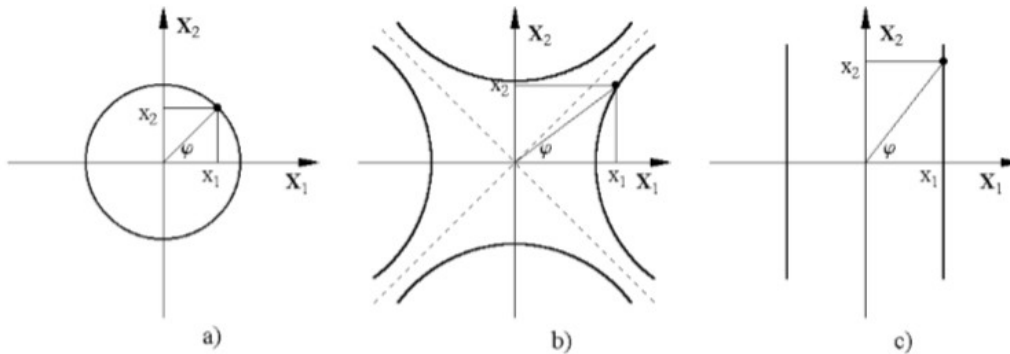


Рис. 21. Окружности а) в 2-D Евклидовом пространстве  $Geo_2^{Sp(-)}$ , б) в 2-D пространстве Минковского  $Geo_2^{Sp(+)}$ , в) в 2-D пространстве Галилея  $Geo_2^{Sp(0)}$ .

Если  $z=x +Iy$ , то обобщенное комплексное число  $z_0= z/|z|$  имеет единичный модуль в том случае, когда  $z \neq 0$ . Нетрудно видеть, что

$$z = |z| \left( \frac{x}{|z|} + I \frac{y}{|z|} \right) = |z| (\cos \varphi + I \sin \varphi), \quad (3)$$

где

$$\cos \varphi := \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - I^2 y^2}} = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi, & \text{если } I = i^-, \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \text{ch} \varphi, & \text{если } I = i^+, \\ \frac{x}{|x|} = \pm 1 = \text{cg} \varphi, & \text{если } I = i^0 \end{cases}$$

$$\sin \varphi := \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 - I^2 y^2}} = \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi, & \text{если } I = i^-, \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \text{sh} \varphi, & \text{если } I = i^+, \\ \frac{y}{|x|} = \text{sg} \varphi, & \text{если } I = i^0. \end{cases}$$



Здесь  $\mathbf{cos}\varphi$ ,  $\mathbf{sin}\varphi$  - обобщенные тригонометрические функции. В первом случае (  $I=I_-$  ) обобщенные тригонометрические функции совпадают с классическими (эллиптическими) функциями:  $\mathbf{cos}\varphi=\cos\varphi$ ,  $\mathbf{sin}\varphi=\sin\varphi$ . Во втором случае (когда  $I=I_+$  ) они совпадают с гиперболическими функциями  $\mathbf{cos}\varphi=\text{ch}\varphi$ ,  $\mathbf{sin}\varphi=\text{sh}\varphi$ . Третий случай дает (когда  $I=I_0$  ) дает новые тригонометрические функции:  $\mathbf{cos}\varphi=\text{cg}\varphi$ ,  $\mathbf{sin}\varphi=\text{sg}\varphi$  которые будем называть параболическими (или Галилеевскими) функциями. Согласно (3) произвольное обобщенное комплексное число единичного модуля имеет следующую форму

$$\mathbf{z}_0 = e^{I\varphi} = (\mathbf{cos}\varphi + I \cdot \mathbf{sin}\varphi) = \begin{cases} \cos\varphi + I_- \cdot \sin\varphi, & \text{если } I = I_-, \\ \text{ch}\varphi + I_+ \cdot \text{sh}\varphi, & \text{если } I = I_+, \\ \pm 1 + I_0 \cdot \varphi, & \text{если } I = I_0^0. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим два обобщенных комплексных числа  $\mathbf{z}_1 = |\mathbf{z}_1| \exp(I\varphi_1) = |\mathbf{z}_1| (\mathbf{cos}\varphi_1 + I \mathbf{sin}\varphi_1)$  и  $\mathbf{z}_2 = |\mathbf{z}_2| \exp(I\varphi_2) = |\mathbf{z}_2| (\mathbf{cos}\varphi_2 + I \mathbf{sin}\varphi_2)$ . Их произведение может быть записано в двух формах

$$\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 = |\mathbf{z}_1| e^{I\varphi_1} |\mathbf{z}_2| e^{I\varphi_2} = |\mathbf{z}_1| |\mathbf{z}_2| e^{I(\varphi_1 + \varphi_2)} = |\mathbf{z}_1| |\mathbf{z}_2| [\mathbf{cos}(\varphi_1 + \varphi_2) + I \mathbf{sin}(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 &= |\mathbf{z}_1| |\mathbf{z}_2| (\mathbf{cos}\varphi_1 + I \mathbf{sin}\varphi_1)(\mathbf{cos}\varphi_2 + I \mathbf{sin}\varphi_2) = \\ &= |\mathbf{z}_1| |\mathbf{z}_2| \left[ (\mathbf{cos}\varphi_1 \mathbf{cos}\varphi_2 + I^2 \mathbf{sin}\varphi_1 \mathbf{sin}\varphi_2) + I (\mathbf{sin}\varphi_1 \mathbf{cos}\varphi_2 + \mathbf{cos}\varphi_1 \mathbf{sin}\varphi_2) \right]. \end{aligned}$$

Сравнивая последние два выражения, получаем теорему для косинуса и синуса суммы двух углов:

$$\mathbf{cos}(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbf{cos}\varphi_1 \cdot \mathbf{cos}\varphi_2 + I^2 \cdot \mathbf{sin}\varphi_1 \cdot \mathbf{sin}\varphi_2 =$$

$$= \begin{cases} \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2, & I = I_-, \\ \text{ch}\varphi_1 \cdot \text{ch}\varphi_2 + \text{sh}\varphi_1 \cdot \text{sh}\varphi_2, & I = I_+, \\ (\pm 1) \cdot (\pm 1), & I = I_0, \end{cases}$$

и

$$\mathbf{sin}(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbf{sin}\varphi_1 \cdot \mathbf{cos}\varphi_2 + \mathbf{cos}\varphi_1 \cdot \mathbf{sin}\varphi_2 =$$

$$= \begin{cases} \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2, & I = I_-, \\ \text{sh}\varphi_1 \cdot \text{ch}\varphi_2 + \text{ch}\varphi_1 \cdot \text{sh}\varphi_2, & I = I_+, \\ \varphi_1 \cdot (\pm 1) + (\pm 1)\varphi_2, & I = I_0. \end{cases}$$

Из выражения (3) мы выводим, что степень обобщенного комплексного числа  $\mathbf{z} = r (\mathbf{cos}\varphi + I \mathbf{sin}\varphi)$  можно записать так

$$\mathbf{z}^n = r^n (\cos n\varphi + I \cdot \sin n\varphi)$$

Эта формула тривиальна для случая  $n=0$ , и так как

$$\mathbf{z}^{-1} = r^{-1} (\cos(-\varphi) + I \cdot \sin(-\varphi)),$$

то она верна и для отрицательных  $n$ . Для  $r=1$  мы получаем формулу Муавра

$$(\cos \varphi + I \cdot \sin \varphi)^n = (\cos n\varphi + I \cdot \sin n\varphi),$$

которая позволяет просто выразить значения  $\cos n\varphi$  и  $\sin n\varphi$  через  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ .

### 3.2. Алгебраические модели серых и бихроматических изображений

#### 3.2.1. Алгебраические модели серых изображений

Используя алгебры  $Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I)$ , можно ввести алгебраические модели серых изображений в виде функции одной обобщенной комплексной переменной  $f(x + I y): Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I) \rightarrow \mathbf{R}$ . Существует три типа таких изображений:

$$\begin{aligned} {}^-f(\mathbf{z}): Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_-) &\rightarrow \mathbf{R}, & {}^0f(\mathbf{z}): Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_-) &\rightarrow \mathbf{R}, \\ {}^+f(\mathbf{z}): Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_-) &\rightarrow \mathbf{R} \end{aligned}$$

Первые изображения определены на евклидовой (эллиптической) плоскости, вторые - на плоскости Минковского (гиперболической плоскости), третьи - на плоскости Галилея (параболической плоскости).

**Определение 8.** Серым изображением  $f(\mathbf{z}): Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I) \rightarrow \mathbf{R}^{Vis}$  называется  $\mathbf{R}$ -значная функция, зависящая от комплексной переменной  $\mathbf{z} \in Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I)$ :

$$f(\mathbf{z}) = f(x_1 + I x_2) \tag{5}$$

**Определение 9.** Преобразования  $\mathbf{z}' = \mathbf{z} + \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{z}' = \lambda \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{z}' = \exp(I\varphi)\mathbf{z}$ , где  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{z}'$ ,  $\mathbf{w} \in Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I)$  называются *трансляцией*, *масштабированием* и *вращением* физического пространства  $Geo_2^{Sp(\delta)}$ .

В матричной форме эти преобразования имеют следующий вид

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} + \mathbf{w} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}' = \lambda \mathbf{z} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z}' = e^{I\varphi} \mathbf{z} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & I^2 \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, & I = I_-, \\ \begin{bmatrix} \text{ch } \varphi & \text{sh } \varphi \\ \text{sh } \varphi & \text{ch } \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, & I = I_+, \\ \begin{bmatrix} \pm 1 & \\ \varphi & \pm 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, & I = I_0, \end{cases}$$

где  $\mathbf{z} = (x + I y)$ ,  $\mathbf{z}' = (x' + I y')$ ,  $\mathbf{w} = (w_x + I w_y) \in \text{Geo}_2^{Sp(\delta)}$ . Они формируют 3 группы: 1) группу пространственных преобразований  $\text{Tr Geo}_2^{Sp(\delta)}$ , 2) группу пространственных масштабных преобразований  $\text{Sc Geo}_2^{Sp(\delta)}$  и 3) группу пространственных вращений  $\text{Rot Geo}_2^{Sp(\delta)}$ .

Преобразования (геометрические искажения) серых изображений в физическом пространстве могут быть описаны на языке пространственных алгебр  $\text{Alg}_2^{Sp}(\mathbb{R} | 1, I)$  единым (универсальным) способом. Эти искажения могут быть вызваны: 1) пространственными трансляциями  $\mathbf{z}' = \mathbf{z} + \mathbf{w}$ , 2) вращениями  $\mathbf{z}' = \exp(I\varphi_{sp})\mathbf{z}$  и, наконец, изменениями масштаба  $\mathbf{z}' = \lambda \mathbf{z}$ . Вся совокупность перечисленных выше преобразований  $\mathbf{z}' = \lambda \exp(I\varphi_{sp})\mathbf{z} + \mathbf{w}$  формирует малую группу аффинных преобразований  $\text{Aff}(A_2^{Sp}(\mathbb{R} | I))$  плоскости  $\text{Alg}_2^{Sp}(\mathbb{R} | 1, I)$ .

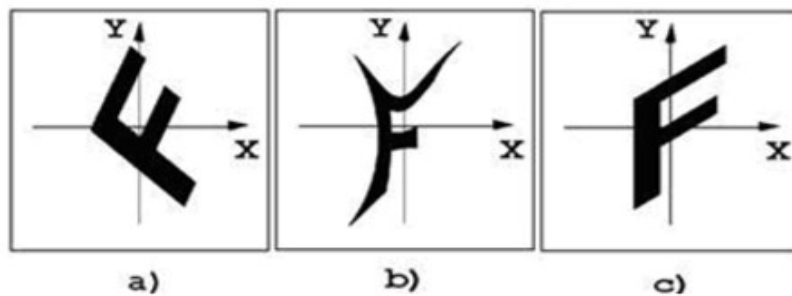


Рис. 22. Вращения в а) 2-D Евклидовом пространстве б) 2-D пространстве Минковского и в) 2-D пространстве Галилея

Если  $\mathbf{f}(\mathbf{z})$  - некоторое исходное изображение, то изображение

$$\lambda, \varphi, \mathbf{w} \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\lambda \exp(I\varphi_{sp})\mathbf{z} + \mathbf{w}) \quad (6)$$

является его  $\text{Aff}(A_2^{Sp}(\mathbb{R} | I))$  искаженной версией. Пространственные искажения здесь вызваны преобразованиями физического пространства:  $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{z}' = \lambda \exp(I\varphi_{sp})\mathbf{z} + \mathbf{w}$  (см. рис. 22. и рис. 23)

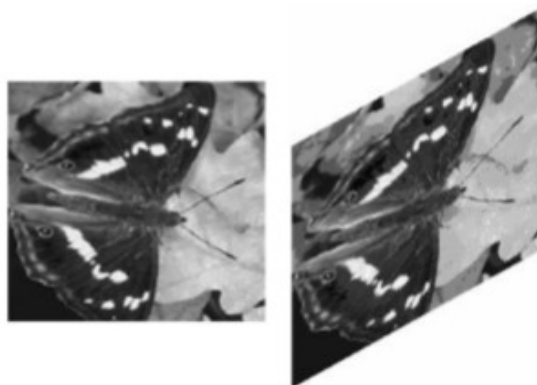


Рис. 23. Галилеевские вращения серого изображения

### 3.2.2. Моменты и инварианты серых изображений

При вычислении инвариантов изображений важную роль играют, так называемые, действительно-значные моменты изображений – специфические признаки изображений [32-40]. Мы разовьем эту теорию до гиперкомплекснозначных моментов и инвариантов.

**Определение 10.** Если  $c$  - центроид (центр тяжести) изображения  $f(z)$ , то функционал

$$M_p \{ f \} = \int_{z \in A_2^{Sp}} (z-c)^p f(z) dx dy$$

называется  $Alg_2^{Sp}$ -значным центральным моментом порядка  $p=0,1,2,\dots$

Если начало координат находится в центроиде изображения (центроид находится в перекрестии прицела), то такое изображение называется центрированным. При вычислении моментов и инвариантов мы будем иметь дело только с центрированными изображениями. Для них выражение для моментов принимает более простой вид

$$M_p \{ f \} = \int_{z \in A_2^{Sp}} z^p f(z) dx dy \quad (7)$$

$$\begin{array}{ccc}
 f(z) & \xrightarrow{\text{Aff}(A_2^{Sp}(\mathbb{R}|I))} & f_{\lambda, \varphi}(z) = f(\lambda e^{i\varphi} z) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M_p \{ f \} & \xrightarrow{\text{Aff}(A_2^{Sp}(\mathbb{R}|I))} & M_p \{ f_{\lambda, \varphi} \} = \lambda^{-(p+2)} e^{-ip\varphi} M_p \{ f \}
 \end{array}$$

Рис. 24. Связь центральных моментов исходного и преобразованного изображений

Очевидно, что можно вычислить бесконечное количество моментов

$$M_0 \{ f \}, M_1 \{ f \}, M_2 \{ f \}, \dots, M_p \{ f \}, \dots$$

Выясним связь между моментами исходного изображения  $f(\mathbf{z})$  и его искаженной версией  $\lambda, \varphi, \mathbf{w} \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\lambda \exp(I\varphi_{sp})\mathbf{z} + \mathbf{w})$ .

**Теорема 1.** Центральные моменты  $\mathbf{M}_p \{f\}$  являются относительными  $Alg_2^{Sp}$ -значными инвариантами по отношению к аффинной групп преобразований с  $Alg_2^{Sp}$ -значными мультипликаторами  $A^{-(p+2)} e^{-Ip\varphi}$ , то есть

$$\mathbf{M}_p \{f_{\lambda, \varphi}\} = \lambda^{-(p+2)} e^{-Ip\varphi} \mathbf{M}_p \{f\} \quad (8)$$

где  $\mathbf{M}_p \{f\}$  и  $\mathbf{M}_p \{\lambda, \varphi \mathbf{f}(\mathbf{z})\}$  моменты исходного  $f(\mathbf{z})$  и преобразованного изображений  $\lambda, \varphi \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\lambda e^{I\varphi} \mathbf{z})$ .

**Доказательство.** Для искажённой версии изображения имеем

$$\mathbf{M}_p \{f_{\lambda, \varphi}\} = \int_{z \in A_2^{Sp}} \mathbf{z}^p f(\lambda e^{I\varphi} \mathbf{z}) dx dy$$

Замена переменных  $\mathbf{z}' = \lambda e^{I\varphi} \mathbf{z}$  в последнем выражении даёт

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_p \{f_{\lambda, \varphi}\} &= \int_{z \in A_2^{Sp}} \lambda^{-2} (\lambda^{-1} e^{-I\varphi} \mathbf{z}')^p f(\mathbf{z}') dx' dy' = \\ &= \lambda^{-(p+2)} e^{-Ip\varphi} \int_{z \in A_2^{Sp}} (\mathbf{z}')^p f(\mathbf{z}') dx' dy' = \lambda^{-(p+2)} e^{-Ip\varphi} \mathbf{M}_p \{f\} \end{aligned}$$

Суть теоремы иллюстрируется диаграммой на рис. 24 и следующими примерами:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 \{f_{A, \varphi, \mathbf{w}}\} &= \lambda^{-2} \mathcal{M}_0 \{f\}, \\ \mathbf{M}_1 \{f_{A, \varphi, \mathbf{w}}\} &= \lambda^{-3} e^{-I\varphi} \mathcal{M}_1 \{f\}, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{M}_0^{-(p-1)} \{f_{A, \varphi, \mathbf{w}}\} &= \lambda^{2(p-1)} \mathcal{M}_0^{-(p-1)} \{f\}, \\ \mathbf{M}_1^p \{f_{A, \varphi, \mathbf{w}}\} &= \lambda^{-3p} e^{-Ip\varphi} \mathcal{M}_1^p \{f\}. \end{aligned}$$

Из этих моментов можно построить абсолютные инварианты. Действительно, нетрудно видеть, что произведение следующих моментов

$$\mathbf{M}_0^{-(p-1)} \{f_{\lambda, \varphi}\} \mathbf{M}_1^p \{f_{\lambda, \varphi}\} = \lambda^{-(p+2)} e^{-Ip\varphi} \mathbf{M}_0^{-(p-1)} \{f_{\lambda, \varphi}\} \mathbf{M}_1^p \{f\}$$

при искажении исходного изображения преобразуются аналогично самим моментам

$$\mathbf{M}_p \{f_{\lambda, \varphi}\} = \lambda^{-(p+2)} e^{-Ip\varphi} \mathbf{M}_p \{f\}$$

Поэтому отношения правых и левых частей последних двух равенств

$$\frac{\mathbf{M}_p\{f_{\lambda,\varphi}\}}{\mathbf{M}_0^{-(p-1)}\{f_{\lambda,\varphi}\}\mathbf{M}_1^p\{f_{\lambda,\varphi}\}} = \frac{\mathbf{M}_p\{f\}}{\mathbf{M}_0^{-(p-1)}\{f\}\mathbf{M}_1^p\{f\}} \quad (9)$$

являются абсолютными инвариантами.

**Теорема 2.** Нормализованные центральные моменты

$$\mathbf{Inv}_p\{f\} = \mathbf{N}_p\{f\} = \frac{\mathbf{M}_p\{f\}}{\mathbf{M}_0^{-(p-1)}\{f\}\mathbf{M}_1^p\{f\}} \quad (10)$$

- абсолютные  $Alg_2^{Sp}$ -значные инварианты по отношению к аффинной группе преобразований, то есть

$$\mathbf{Inv}_p\{f_{\lambda,\varphi}\} = \frac{\mathbf{M}_p\{f_{\lambda,\varphi}\}}{\mathbf{M}_0^{-(p-1)}\{f_{\lambda,\varphi}\}\mathbf{M}_1^p\{f_{\lambda,\varphi}\}} = \frac{\mathbf{M}_p\{f\}}{\mathbf{M}_0^{-(p-1)}\{f\}\mathbf{M}_1^p\{f\}} = \mathbf{Inv}_p\{f\},$$

что иллюстрируется диаграммой на рис. 25.

$$\begin{array}{ccc} f(z) & \xrightarrow{\text{Aff}(A_2^{Sp}(\mathbb{R}|I))} & f_{\lambda,\varphi}(z) = f(\lambda e^{i\varphi} z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Inv}_p\{f\} & \xrightarrow{\text{Aff}(A_2^{Sp}(\mathbb{R}|I))} & \mathbf{Inv}_p\{f_{\lambda,\varphi}\} = \mathbf{Inv}_p\{f\} \end{array}$$

Рис. 25. Неизменность абсолютных инвариантов по отношению к аффинным преобразованиям исходного изображения

Последние две теоремы в определенном смысле являются —эталонными, поскольку их аналоги верны и для более сложных случаев, которые будут рассмотрены далее.

### 3.2.3. Алгебраические модели бихроматических изображений

Бихроматические 2-D изображения

$$\mathbf{f}(x,y) = (f_0(x,y), f_1(x,y)): \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{V}^2$$

обладают следующими двумя атрибутами:  $\mathbf{R}^2$ ,  $\mathbf{V}^2$  – двумерными физическим и визуальным пространствами. Мы оснащаем эти пространства структурами 2-D алгебр обобщенных комплексных чисел  $Alg_2^{Sp}(\mathbb{R}|1,I)$  и  $Alg_2^{Vis}(\mathbb{R}|1,J)$ , соответственно, то есть

$$\mathbf{R}^2 \rightarrow \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|1, I) := \mathbf{R} + \mathbf{R}I = \{z = x + Iy | x, y \in \mathbf{R}\},$$

$$\mathbf{V}^2 \rightarrow \text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J) := \mathbf{R} + \mathbf{R}J = \{z = a + Jb | a, b \in \mathbf{R}\},$$

где  $I$  и  $J$  – пространственная и бихроматическая мнимые единицы, соответственно, со свойствами  $I^2 = \delta \in \{-1, 0, +1\}$  и  $J^2 = \gamma \in \{-1, 0, +1\}$ . Эти алгебры мы называем пространственной и бихроматической алгебрами физического  $\mathbf{R}^2$  и визуального (перцептуального)  $\mathbf{V}^2$  пространств, соответственно. Как и в пространственном случае, визуальное пространство может быть оснащено тремя перцептуальными алгебрами с различными геометрическими (метрическими) свойствами:

- Если  $J^2 \equiv J_-^2 = -1$ , то перцептуальная алгебра

$$\text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J_-) = \{z = a + J_- b | (a, b \in \mathbf{R}) \& (J_-^2 = -1)\}$$

суть поле комплексных бихроматических чисел, где  $J_-$  – бихроматическая мнимая единица, подобная обычной классической мнимой единице  $J_- \approx i$ .

- Если  $J^2 \equiv J_+^2 = +1$ , то перцептуальная алгебра

$$\text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J_+) = \{z = a + J_+ b | (a, b \in \mathbf{R}) \& (J_+^2 = 0)\}$$

суть кольцо двойных бихроматических чисел, где  $J_+$  – бихроматическая мнимая единица, подобная обычной двойной единице  $J_+ \approx e$ .

- Если  $J^2 \equiv J_0^2 = 0$ , то перцептуальная алгебра

$$\text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J_0) = \{z = a + J_0 b | (a, b \in \mathbf{R}) \& (J_0^2 = 0)\}$$

представляет собой кольцо дуальных бихроматических чисел, где  $J_0$  – бихроматическая мнимая единица, подобная обычной дуальной единице  $J_0 \approx \varepsilon$ .

### Определение 11. Бихроматическим изображением

$$f(\mathbf{z}) : \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|1, I) \rightarrow \text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J)$$

называется  $\text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J)$  -значная функция, зависящая от комплексной переменной  $\mathbf{z} \in \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|1, I)$

$$f(\mathbf{z}) = f_0(x + I y) + J \cdot f_1(x + I y) \quad (11)$$

Таким образом, можно предложить девять моделей бихроматических изображений  $f(\mathbf{z}) : \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|1, I) \rightarrow \text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J)$  представленных ниже

$$\begin{aligned} \bar{-}f(\mathbf{z}) : \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|1, I_-) &\rightarrow \text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J_-), & {}^0f(\mathbf{z}) : \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|1, I_0) &\rightarrow \text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J_0), & \bar{+}f(\mathbf{z}) : \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|1, I_+) &\rightarrow \text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J_+), \\ {}^0\bar{-}f(\mathbf{z}) : \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|1, I_0) &\rightarrow \text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J_-), & {}^{0,0}f(\mathbf{z}) : \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|1, I_0) &\rightarrow \text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J_0), & {}^{0,+}f(\mathbf{z}) : \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|1, I_0) &\rightarrow \text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J_+), \\ {}^{+}\bar{-}f(\mathbf{z}) : \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|1, I_+) &\rightarrow \text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J_-), & {}^{+,0}f(\mathbf{z}) : \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|1, I_+) &\rightarrow \text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J_0), & {}^{+,+}f(\mathbf{z}) : \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R}|1, I_+) &\rightarrow \text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J_+). \end{aligned}$$

**Определение 12.** Преобразования

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{z}' = \lambda \mathbf{z}, \quad \mathbf{z}' = e^{I\varphi_{sp}} \mathbf{z}, \quad \mathbf{z}' = \mathbf{z} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{z}' = \mu \mathbf{z}, \quad \mathbf{z}' = e^{J\theta_{ch}} \mathbf{z},$$

называются трансляцией, масштабированием и вращением физического  $Geo_2^{Sp(\delta)}$  и бихроматического  $Geo_2^{Vis(\gamma)}$  пространств, соответственно, где  $\mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{w} \in Alg_2^{Sp}$  и  $\mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{w} \in Alg_2^{Vis}$ .

Эти преобразования формируют следующие группы:

- 1) пару групп пространственных  $Tr(Geo_2^{Sp(\delta)})$  и бихроматических  $Tr(Geo_2^{Vis(\gamma)})$  трансляций,
- 2) пару групп пространственных  $Sc(Geo_2^{Sp(\delta)})$  и бихроматических  $Sc(Geo_2^{Vis(\gamma)})$  масштабных преобразований,
- 3) пару групп физических  $Rot(Geo_2^{Sp(\delta)})$  и бихроматических  $Rot(Geo_2^{Vis(\gamma)})$  вращений.

Преобразования изображений (геометрические и цветовые искажения) в физическом и в перцептуальном пространствах могут быть описаны на языках пространственной и перцептуальной алгебр.

Если  $f(\mathbf{z})$  некоторое исходное бихроматическое изображение, то изображение

$$\begin{matrix} \mu, \theta, \mathbf{w} \\ \lambda, \varphi, \mathbf{w} \end{matrix} f(\mathbf{z}) = \mu e^{J\theta} \cdot f(\lambda e^{J\varphi} \mathbf{z} + \mathbf{w}) + \mathbf{w} \tag{12}$$

является его искаженной версией. Пространственные искажения здесь вызваны преобразованиями физического пространства:  $\mathbf{z} \rightarrow \lambda e^{J\varphi_{sp}} \mathbf{z} + \mathbf{w}$ , а цветовые – преобразованиями перцептуального пространства  $f \rightarrow \mu e^{J\theta_{ch}} \cdot f + \mathbf{w}$ . Оказывается что алгебраические модели бихроматического изображения (11) и его искаженной версии (12) имеют универсальный характер в том смысле, что многие типы многоканальных изображений, определенные на евклидовых и неевклидовых пространствах могут быть записаны в аналогичной форме с применением гиперкомплексных алгебр.

**3.2.4. Моменты и инварианты бихроматических изображений**

При определении моментов бихроматических изображений согласно стандартному выражению

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_p \{f\} &= \int_{z \in A_2^{Sp}} \mathbf{z}^p \cdot f(\mathbf{z}) dx dy = \int_{z \in A_2^{Sp}} \mathbf{z}^p \cdot (f_0(x + Iy) + J \cdot f_1(x + Iy)) dx dy = \\ &= \int_{z \in A_2^{Sp}} \mathbf{z}^p \cdot f_0(x + Iy) dx dy + J \cdot \int_{z \in A_2^{Sp}} \mathbf{z}^p \cdot f_1(x + Iy) dx dy = \\ &= \mathbf{M}_p \{f_0\} + J \cdot \mathbf{M}_p \{f_1\} \end{aligned} \tag{13}$$

возникает небольшая проблема. Дело в том, что произведение  $\mathbf{z}^p \cdot f(\mathbf{z})$  определено, так как  $\mathbf{z} = x + yI$  - пространственные комплексные числа, а  $f = f_0 + f_1 J$  - пер-



цептуальные комплексные числа. Первые живут в физическом пространстве, а вторые - в субъективном перцептуальном пространстве мозга. Их можно было бы отождествить, но слишком уж различна природа этих пространств. Поэтому мы поступим следующим образом. Напомним, что пространственные числа формируют 2-D алгебру

$$\mathbf{R}^2 \rightarrow \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R} | 1, I) := \mathbf{R} + \mathbf{R}I = \{z = x + Iy \mid x, y \in \mathbf{R}\}$$

над полем вещественных чисел. Это означает, что вещественная  $x \in \mathbf{R}$  и мнимая  $y \in \mathbf{R}$  составляющие комплексного числа  $\mathbf{z} = x + Iy$  являются вещественными числами, что отражено в записи  $\text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R} | 1, I) := \mathbf{R} + \mathbf{R}I$ . Но нам никто не мешает рассматривать комплексные числа с вещественной и комплексной составляющими, принадлежащими комплексному перцептуальному пространству

$$\begin{aligned} \text{Alg}_4^{\text{VisSp}}(\mathbf{R} | I | J) &= \text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R} | 1, I) | 1, J) := \\ &= \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R} | 1, I) + \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R} | 1, I) \cdot J = \left\{ \overset{\circ}{\mathbf{z}} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 J \mid \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \text{Alg}_2^{\text{Sp}}(\mathbf{R} | 1, I) \right\} = \\ &= \left\{ \overset{\circ}{\mathbf{z}} = (x_1 + y_1 I) + (x_2 + y_2 I) J \mid x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbf{R} \right\} = (\mathbf{R} + \mathbf{R}I) + (\mathbf{R} + \mathbf{R}I)J. \end{aligned}$$

где  $\mathbf{z}_1 = x_1 + y_1 I$ ,  $\mathbf{z}_2 = x_2 + y_2 I$ . Таким образом, все операции под интегралом в (13) можно проводить по законам  $\text{Alg}_4^{\text{VisSp}}(\mathbf{R} | J | I)$ -алгебры и поэтому моменты в этом выражении являются  $\text{Alg}_4^{\text{VisSp}}(\mathbf{R} | J | I)$ -значными:

$$\overset{\circ}{M}_p \{f\} = \overset{\circ}{M}_p \{f_0\} + J \cdot \overset{\circ}{M}_p \{f_0\}.$$

Выясним связь между моментами исходного изображения  $f(\mathbf{z})$  и его искаженной версией

$$\overset{\mu, \theta}{\lambda, \varphi} f(\mathbf{z}) = \mu e^{J\theta} \cdot f(\lambda e^{J\varphi} \mathbf{z}).$$

**Теорема 3.** Центральные моменты  $\overset{\circ}{M}_p \{f\}$  являются относительными  $\text{Alg}_4^{\text{VisSp}}(\mathbf{R} | J | I)$ -значными инвариантами по отношению к аффинной группе преобразований с мультипликаторами  $\mu e^{J\theta} \lambda^{-(p+2)} e^{-I p \varphi}$ , то есть

$$\overset{\circ}{M}_p \left\{ \overset{\mu, \theta}{\lambda, \varphi} f(\mathbf{z}) \right\} = \mu e^{J\theta} \lambda^{-(p+2)} e^{-I p \varphi} \overset{\circ}{M}_p \{f\}, \quad (14)$$

где  $\overset{\circ}{M}_p \{f\}$  и  $\overset{\circ}{M}_p \left\{ \overset{\mu, \theta}{\lambda, \varphi} f(\mathbf{z}) \right\}$  моменты исходного  $f(\mathbf{z})$  и преобразованного изображений

$$\overset{\mu, \theta}{\lambda, \varphi} f(\mathbf{z}) = \mu e^{J\theta} \cdot f(\lambda e^{J\varphi} \mathbf{z}).$$

$$\begin{array}{ccc}
 f(z) & \xrightarrow{\text{Aff}(A_2^{Sp}(\mathbb{R}|I))} & f_{\lambda,\varphi}(z) = f(\lambda e^{i\varphi} z) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M_p\{f\} & \xrightarrow{\text{Aff}(A_2^{Sp}(\mathbb{R}|I))} & M_p\{f_{\lambda,\varphi}\} = \lambda^{-(p+2)} e^{-ip\varphi} M_p\{f\}
 \end{array}$$

Рис. 26. Связь центральных моментов исходного и преобразованного изображений

**Доказательство.** Для искаженной версии изображения имеем

$$\overset{\circ}{M}_p\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\} = \mu e^{J\theta} \int_{z \in A_2^{Sp}} \mathbf{z}^p \cdot f(\lambda e^{J\varphi} \mathbf{z}) dx dy.$$

После замены переменных  $\mathbf{z}' = \lambda e^{J\varphi} \mathbf{z}$  получаем искомый результат. Этот результат иллюстрируется диаграммой на рис.26. Очевидно

$$\frac{\overset{\circ}{M}_p\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\} \overset{\circ}{M}_0\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\}}{\overset{\circ}{M}_{p-1}\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\} \overset{\circ}{M}_1\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\}} = e^{-I(p-1)\varphi} \frac{\overset{\circ}{M}_p\{f(\mathbf{z})\} \overset{\circ}{M}_0\{f(\mathbf{z})\}}{\overset{\circ}{M}_{p-1}\{f(\mathbf{z})\} \overset{\circ}{M}_1\{f(\mathbf{z})\}} \quad (15)$$

Так как

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{M}_0\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\} &= \mu e^{J\theta} \cdot \lambda^{-2} \overset{\circ}{M}_0\{f\}, & \overset{\circ}{M}_1\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\} &= \mu e^{J\theta} \cdot \lambda^{-3} e^{-I\varphi} \overset{\circ}{M}_1\{f\}, \\
 \overset{\circ}{M}_2\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\} &= \mu e^{J\theta} \lambda^{-4} e^{-2I\varphi} \overset{\circ}{M}_2\{f\},
 \end{aligned}$$

то при  $p=2$  из (15) получаем

$$\frac{\overset{\circ}{M}_2\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\} \overset{\circ}{M}_0\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\}}{\overset{\circ}{M}_1^2\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\}} = e^{-I\varphi} \frac{\overset{\circ}{M}_2\{f(\mathbf{z})\} \overset{\circ}{M}_0\{f(\mathbf{z})\}}{\overset{\circ}{M}_1^2\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\}}$$

и, следовательно,

$$\frac{\overset{\circ}{M}_2^{p-1}\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\} \overset{\circ}{M}_0^{p-1}\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\}}{\overset{\circ}{M}_1^{2(p-1)}\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\}} = e^{-I(p-1)\varphi} \frac{\overset{\circ}{M}_2^{p-1}\{f(\mathbf{z})\} \overset{\circ}{M}_0^{p-1}\{f(\mathbf{z})\}}{\overset{\circ}{M}_1^{2(p-1)}\{f(\mathbf{z})\}}. \quad (16)$$

Отношение правых и левых частей выражений (15) и (16) дает искомый результат в виде инвариантного отношения:

$$\frac{\overset{\circ}{M}_p\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\} \overset{\circ}{M}_1^{(2p-3)}\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\}}{\overset{\circ}{M}_{p-1}\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\} \overset{\circ}{M}_2^{p-1}\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\} \overset{\circ}{M}_0^{p-2}\left\{\frac{\mu,\theta}{\lambda,\varphi}f(\mathbf{z})\right\}} = \frac{\overset{\circ}{M}_p\{f(\mathbf{z})\} \overset{\circ}{M}_1^{2p-3}\{f(\mathbf{z})\}}{\overset{\circ}{M}_{p-1}\{f(\mathbf{z})\} \overset{\circ}{M}_2^{p-1}\{f(\mathbf{z})\} \overset{\circ}{M}_0^{p-2}\{f(\mathbf{z})\}}$$

**Теорема 4.** Нормализованные центральные моменты

$$Inw_{p>2} \{f(\mathbf{z})\} = \frac{\overset{\circ}{M}_p \{f(\mathbf{z})\} \overset{\circ}{M}_1^{2p-3} \{f(\mathbf{z})\}}{\overset{\circ}{M}_{p-1} \{f(\mathbf{z})\} \overset{\circ}{M}_2^{2p-1} \{f(\mathbf{z})\} \overset{\circ}{M}_6^{p-2} \{f(\mathbf{z})\}} \quad (17)$$

являются абсолютными  $Alg_4^{VisSp}$ -значными инвариантами по отношению к аффинной группе преобразований физического и перцептуального пространств.

### 3.3. Алгебраизация цветных изображений

Цветные 2-D изображения  $\mathbf{f}(x,y) = (f_r(x,y), f_g(x,y), f_b(x,y)) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}_{rgb}^3$  обладают следующими двумя атрибутами:  $\mathbf{R}^2, \mathbf{V}_{rgb}^3$  – двумерным физическим и трехмерным визуальным пространствами. Мы оснащаем  $\mathbf{R}^2$  структурой 2-D алгебры обобщенных комплексных чисел  $Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I)$ ,  $\mathbf{V}_{rgb}^3$  – структурой так называемой триплетной алгебры  $Alg_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_{col}^1, \varepsilon_{col}^2)$ , то есть

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^2 &\rightarrow Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I) := \mathbf{R} + \mathbf{R}I = \{z = x_1 + Ix_2 \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}, \\ \mathbf{V}^3 &\rightarrow Alg_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_{col}^1, \varepsilon_{col}^2) := \mathbf{R} + \mathbf{R}\varepsilon_{col}^1 + \mathbf{R}\varepsilon_{col}^2 = \{c = r + g\varepsilon_{col}^1 + b\varepsilon_{col}^2 \mid r, g, b \in \mathbf{R}\}, \end{aligned}$$

где  $I$  – пространственная мнимая единица, а  $1_{col}, \varepsilon_{col}^1, \varepsilon_{col}^2$  цветные мнимые единицы, со свойствами  $I^2 = \delta \in \{-1, 0, +1\}$  и  $\varepsilon_{col}^3 = \gamma \in \{-1, 0, +1\}$ . Теорию таких алгебр можно найти в работах [41-46].

#### 3.3.1. Алгебраизация цветного перцептуального пространства

Изучение гипермнимых единиц типа  $1_{col}, \varepsilon_{col}^1, \varepsilon_{col}^2$  со свойством  $\varepsilon_{col}^3 = \gamma \in \{-1, 0, +1\}$  было предложено Августом де Морганом [41] и Чарльзом Гревсом [42]. Они изучали различные трехмерные алгебры со следующими законами умножения гипермнимых единиц:

<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>·</td><td>1</td><td><math>\varepsilon_-^1</math></td><td><math>\varepsilon_-^2</math></td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td><math>\varepsilon_-^1</math></td><td><math>\varepsilon_-^2</math></td></tr> <tr><td><math>\varepsilon_-^1</math></td><td><math>\varepsilon_-^1</math></td><td><math>\varepsilon_-^2</math></td><td>-1</td></tr> <tr><td><math>\varepsilon_-^2</math></td><td><math>\varepsilon_-^2</math></td><td>-1</td><td><math>\varepsilon_-^1</math></td></tr> </table>	·	1	$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^2$	1	1	$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^2$	$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^2$	-1	$\varepsilon_-^2$	$\varepsilon_-^2$	-1	$\varepsilon_-^1$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>·</td><td>1</td><td><math>\varepsilon_0^1</math></td><td><math>\varepsilon_0^2</math></td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td><math>\varepsilon_0^1</math></td><td><math>\varepsilon_0^2</math></td></tr> <tr><td><math>\varepsilon_0^1</math></td><td><math>\varepsilon_0^1</math></td><td><math>\varepsilon_0^2</math></td><td>0</td></tr> <tr><td><math>\varepsilon_0^2</math></td><td><math>\varepsilon_0^2</math></td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	·	1	$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^2$	1	1	$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^2$	$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^2$	0	$\varepsilon_0^2$	$\varepsilon_0^2$	0	0	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>·</td><td>1</td><td><math>\varepsilon_+^1</math></td><td><math>\varepsilon_+^2</math></td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td><math>\varepsilon_+^1</math></td><td><math>\varepsilon_+^2</math></td></tr> <tr><td><math>\varepsilon_+^1</math></td><td><math>\varepsilon_+^1</math></td><td><math>\varepsilon_+^2</math></td><td>1</td></tr> <tr><td><math>\varepsilon_+^2</math></td><td><math>\varepsilon_+^2</math></td><td>1</td><td><math>\varepsilon_+^1</math></td></tr> </table>	·	1	$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^2$	1	1	$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^2$	$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^2$	1	$\varepsilon_+^2$	$\varepsilon_+^2$	1	$\varepsilon_+^1$	(18)
·	1	$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^2$																																																
1	1	$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^2$																																																
$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^2$	-1																																																
$\varepsilon_-^2$	$\varepsilon_-^2$	-1	$\varepsilon_-^1$																																																
·	1	$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^2$																																																
1	1	$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^2$																																																
$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^2$	0																																																
$\varepsilon_0^2$	$\varepsilon_0^2$	0	0																																																
·	1	$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^2$																																																
1	1	$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^2$																																																
$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^2$	1																																																
$\varepsilon_+^2$	$\varepsilon_+^2$	1	$\varepsilon_+^1$																																																

Согласно им числа вида  $c = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$  называются триплетными циклическими числами (если  $\varepsilon^3 = -1$ ), триплетными нильпотентными числами (если  $3 \cdot 0 = \varepsilon$ ), триплетными ациклическими числами (если  $\varepsilon^3 = +1$ ).

Очевидно, существует три перцептуальных цветных алгебры:

- Если  $\varepsilon^3 = \varepsilon_{-}^3 = -1$ , то

$$Alg_3^{vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_-, \varepsilon_-^2) := \mathbf{R}1 + \mathbf{R}\varepsilon_- + \mathbf{R}\varepsilon_-^2 = \{ \mathcal{C} = r1 + g\varepsilon_- + b\varepsilon_-^2 \mid r, g, b \in \mathbf{R} \}$$

– цветная алгебра цветных ациклических чисел.

• Если  $\varepsilon^3 = \varepsilon_+^3 = +1$ , то

$$Alg_3^{vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_+, \varepsilon_+^2) := \mathbf{R}1 + \mathbf{R}\varepsilon_+ + \mathbf{R}\varepsilon_+^2 = \{ \mathcal{C} = r1 + g\varepsilon_+ + b\varepsilon_+^2 \mid r, g, b \in \mathbf{R} \}$$

– цветная алгебра цветных циклических чисел.

• Если  $\varepsilon^3 = \varepsilon_0^3 = 0$ , то

$$Alg_3^{vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_0, \varepsilon_0^2) := \mathbf{R}1 + \mathbf{R}\varepsilon_0 + \mathbf{R}\varepsilon_0^2 = \{ \mathcal{C} = r1 + g\varepsilon_0 + b\varepsilon_0^2 \mid r, g, b \in \mathbf{R} \}$$

– цветная алгебра цветных нильпотентных чисел.

Цветные циклические числа формы  $\mathcal{C} = r1 + g\varepsilon + b\varepsilon^2$  ( $\varepsilon^3 = 1$ ) были впервые открыты Ч. Гревсом в работе [42]. Он назвал эти числа триплетами. Учитывая контекст данной работы, будем называть их цветными числами. Сложение и умножение двух цветных чисел  $\mathcal{C} = r1 + g\varepsilon + b\varepsilon^2$  и  $\mathcal{C} = r_21 + g_2\varepsilon + b_2\varepsilon^2$  определяются так:

$$\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 = (r_1 + g_1\varepsilon + b_1\varepsilon^2) + (r_2 + g_2\varepsilon + b_2\varepsilon^2) = (r_1 + r_2) + (g_1 + g_2)\varepsilon + (b_1 + b_2)\varepsilon^2,$$

$$\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}_2 = (r_1 + g_1\varepsilon + b_1\varepsilon^2) \cdot (r_2 + g_2\varepsilon + b_2\varepsilon^2) = (r_1r_2 + g_1b_2 + b_1g_2) + (r_1g_2 + r_2g_1 + b_1b_2)\varepsilon + (r_1b_2 + g_1g_2 + r_2b_1)\varepsilon^2.$$

Триплетное произведение изоморфно циклической свертке

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_2 &= (r_1 + g_1\varepsilon + b_1\varepsilon^2) \cdot (r_2 + g_2\varepsilon + b_2\varepsilon^2) = \\ &= (r_1r_2 + g_1b_2 + b_1g_2, r_1g_2 + r_2g_1 + b_1b_2, r_1b_2 + g_1g_2 + r_2b_1). \end{aligned}$$

Триплетное сопряжение числа  $\mathcal{C} = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$  определяется равенством:

$$\bar{\mathcal{C}} = \overline{r + g\varepsilon + b\varepsilon^2} = r + g\varepsilon^2 + b\varepsilon.$$

Норма  $\|\mathcal{C}\|_2$  и модуль  $|\mathcal{C}|_2$  определяются выражениями

$$\|\mathcal{C}\|_2 = \mathcal{C} \bar{\mathcal{C}} = (r^2 + g^2 + b^2) - (rg + rb + gb), \quad |\mathcal{C}|_2 = (\|\mathcal{C}\|_2)^{1/2} = (\mathcal{C} \bar{\mathcal{C}})^{1/2}$$

Ч. Гревс [42] показал, что каждое триплетное число имеет три нормы

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}\|_1 &= |r + g + b|, \quad \|\mathcal{C}\|_2 = (r^2 + g^2 + b^2) - (rg + rb + gb), \\ \|\mathcal{C}\|_3 &= \|\mathcal{C}\|_1 \|\mathcal{C}\|_2 = r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb. \end{aligned}$$

Если расстояние  $\rho(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  двумя триплетными числами  $\mathcal{C}$  и  $\mathcal{D}$  определить как модуль их разности  $\mathcal{C} - \mathcal{D} = \mathcal{U} = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$ , то в цветовом перцептуальном пространстве можно ввести три метрики:

$$\begin{aligned} \rho_1(\mathcal{C}, \mathcal{D}) &= |\mathcal{C} - \mathcal{D}|_1 = |\mathcal{U}|_1 = |r + g + b|, \\ \rho_2(\mathcal{C}, \mathcal{D}) &= |\mathcal{C} - \mathcal{D}|_2 = |\mathcal{U}|_2 = \sqrt{(r^2 + g^2 + b^2) - (rg + rb + gb)}, \\ \rho_3(\mathcal{C}, \mathcal{D}) &= |\mathcal{C} - \mathcal{D}|_3 = |\mathcal{U}|_3 = \sqrt[3]{r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb}. \end{aligned}$$

В результате чего алгебра цветных чисел  $Alg_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon, \varepsilon^2)$  превращается в три 3-D метрических пространства:

$$\begin{aligned} Geo_3^{Vis1} &= \left\langle \left\langle Alg_3(\mathbf{R}|1, \varepsilon, \varepsilon^2) \mid |r + g + b| \right\rangle \right\rangle, \\ Geo_3^{Vis2} &= \left\langle \left\langle Alg_3(\mathbf{R}|1, \varepsilon, \varepsilon^2) \mid \sqrt{2(r^2 + g^2 + b^2) - (rg + rb + gb)} \right\rangle \right\rangle, \\ Geo_3^{Vis3} &= \left\langle \left\langle Alg_3(\mathbf{R}|1, \varepsilon, \varepsilon^2) \mid \sqrt[3]{r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb} \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

Ч. Гревс дал алгебраическую и геометрическую интерпретации триплетным числам. С геометрической точки зрения цветное число  $C = x + y\varepsilon + z\varepsilon^2$  является точкой  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(r, g, b) \in \mathbf{V}_{RGB}^3$  в 3-D цветовом пространстве  $\mathbf{V}_{RGB}^3$  с координатами  $(r, g, b)$ .

В алгебре  $Alg_3(\mathbf{R}|1, \varepsilon, \varepsilon^2)$  существуют два замечательных числа

$$e_{lu} = \frac{(1 + \varepsilon + \varepsilon^2)}{3}, \quad \mathbf{E}_{ch} = 1 - e_{lu} = \frac{(2 - \varepsilon - \varepsilon^2)}{3}, \quad (19)$$

которые мы называем яркостным и хроматическим идемпотентами. Они обладают следующими свойствами

$$(e_{lu})^2 = e_{lu}, \quad (\mathbf{E}_{ch})^2 = \mathbf{E}_{ch}, \quad e_{lu}\mathbf{E}_{ch} = \mathbf{E}_{ch}e_{lu} = 0, \quad e_{lu} + \mathbf{E}_{ch} = 1. \quad (20)$$

В линейной алгебре операторы, обладающие такими свойствами, называются проекционными операторами. Нетрудно вычислить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \cdot e_{lu} &= (r + g\varepsilon + b\varepsilon^2) \frac{1 + \varepsilon + \varepsilon^2}{3} = [r + g + b] \frac{1 + \varepsilon + \varepsilon^2}{3} = a_{lu} \cdot e_{lu}, \\ \mathcal{C} \cdot \mathbf{E}_{ch} &= (r + g\varepsilon + b\varepsilon^2) \frac{(2 - \varepsilon - \varepsilon^2)}{3} = [(r - b) + (g - b)\varepsilon] \frac{(2 - \varepsilon - \varepsilon^2)}{3} = \mathcal{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_{lu} &:= [r + g + b] = \mathcal{C} \bmod(\varepsilon - 1) = (r + g\varepsilon + b\varepsilon^2) \bmod(\varepsilon - 1), \\ \mathcal{Z}_{ch} &:= [(r - b) + (g - b)\varepsilon] = \mathcal{C} \bmod(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = (r + g\varepsilon + b\varepsilon^2) \bmod(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) \end{aligned} \quad (21)$$

Поэтому любое триплетное число может быть представлено в виде взвешенной суммы идемпотентов, так как

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \cdot 1 &= \mathcal{C} \cdot (e_{lu} + \mathbf{E}_{ch}) = \mathcal{C} \cdot e_{lu} + \mathcal{C} \cdot \mathbf{E}_{ch} = a_{lu}e_{lu} + \mathcal{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch} = \\ &= [r + g + b]e_{lu} + [(r - b) + (g - b)\varepsilon]\mathbf{E}_{ch} \end{aligned}$$

В новом дуплексном представлении  $\mathcal{C} = a_{lu} e_{lu} + \mathcal{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch}$  две триплетные арифметические операции имеют простейшую покомпонентную форму

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^1 + \mathcal{C}^2 &= (a_{lu}^1 \cdot e_{lu} + \mathcal{Z}_{ch}^1 \cdot \mathbf{E}_{ch}) + (a_{lu}^2 e_{lu} + \mathcal{Z}_{ch}^2 \cdot \mathbf{E}_{ch}) = \\ &= (a_{lu}^1 + a_{lu}^2) \cdot e_{lu} + (\mathcal{Z}_{ch}^1 + \mathcal{Z}_{ch}^2) \cdot \mathbf{E}_{ch}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^1 \mathcal{C}^2 &= (a_{lu}^1 \cdot e_{lu} + \mathcal{Z}_{ch}^1 \cdot \mathbf{E}_{ch})(a_{lu}^2 \cdot e_{lu} + \mathcal{Z}_{ch}^2 \cdot \mathbf{E}_{ch}) = \\ &= a_{lu}^1 a_{lu}^2 \cdot e_{lu} e_{lu} + \mathcal{Z}_{ch}^1 a_{lu}^2 \cdot e_{lu} \mathbf{E}_{ch} + a_{lu}^1 \mathcal{Z}_{ch}^2 e_{lu} \mathbf{E}_{ch} + \mathcal{Z}_{ch}^1 \mathcal{Z}_{ch}^2 \cdot \mathbf{E}_{ch} \mathbf{E}_{ch} = \\ &= a_{lu}^1 a_{lu}^2 \cdot e_{lu} + \mathcal{Z}_{ch}^1 \mathcal{Z}_{ch}^2 \cdot \mathbf{E}_{ch}, \end{aligned}$$

поскольку  $e_{lu} \mathbf{E}_{ch} = e_{lu} \mathbf{E}_{ch} = 0$ . Это является основанием для введения векторного представления триплетных чисел в виде

$$\mathcal{C} = a_{lu} e_{lu} + \mathcal{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch} = (a_{lu}, \mathcal{Z}_{ch}) \quad (22)$$

в котором арифметические операции выполняются покомпонентно:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^1 + \mathcal{C}^2 &= (a_{lu}^1, \mathcal{Z}_{ch}^1) + (a_{lu}^2, \mathcal{Z}_{ch}^2) = (a_{lu}^1 + a_{lu}^2, \mathcal{Z}_{ch}^1 + \mathcal{Z}_{ch}^2), \\ \mathcal{C}^1 \mathcal{C}^2 &= (a_{lu}^1, \mathcal{Z}_{ch}^1)(a_{lu}^2, \mathcal{Z}_{ch}^2) = (a_{lu}^1 a_{lu}^2, \mathcal{Z}_{ch}^1 \mathcal{Z}_{ch}^2). \end{aligned} \quad (23)$$

Из выражений

$$a_{lu} := [r + g + b] = \mathcal{C} \bmod(\varepsilon - 1) = (r + g\varepsilon^1 + b\varepsilon^2) \bmod(\varepsilon - 1),$$

$$\mathcal{Z}_{ch} := [(r - b) + (g - b)\varepsilon] = \mathcal{C} \bmod(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = (r + g\varepsilon^1 + b\varepsilon^2) \bmod(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)$$

видно, что  $a_{lu} := [r + g + b]$  - действительные числа, а  $\mathcal{Z}_{ch} = a + b\varepsilon$  внешне похожи на комплексные числа. Однако, элемент  $\varepsilon$  не подобен классической мнимой единице, поскольку  $\varepsilon^2 \bmod(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = -\varepsilon - 1$ . Поэтому введём элемент

$\dot{\nu} = (\varepsilon^1 - \varepsilon^2) / \sqrt{3}$ , изоморфный мнимой единице. Действительно,

$$\dot{\nu}^2 = \left( \frac{\varepsilon^1 - \varepsilon^2}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{\varepsilon^2 - 2 + \varepsilon^1}{3} = \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon^1 + 1 - 3}{3} \bmod(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = -1.$$

Очевидно, что

$$w = -\frac{1}{2} + \dot{\nu} \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^1 - \varepsilon^2}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \varepsilon^1 - \varepsilon^2}{2}.$$

- корень третьей степени из 1, так как

и

$$w^2 \bmod(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = -\frac{1}{2} - \dot{\nu} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \varepsilon^1 + \varepsilon^2}{2}$$

Используя переписываем пару идемпотентов (19) следующим образом

$$e_{lu} = \frac{(1 + \varepsilon + \varepsilon^2)}{3}, \quad \mathbf{E}_{ch} = 1 - e_{lu} = \frac{(2 - \varepsilon - \varepsilon^2)}{3} = \frac{1 + w^1 \varepsilon^1 + w^2 \varepsilon^2}{3}. \quad (24)$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \cdot e_{lu} &= (r + g\varepsilon^1 + b\varepsilon^2) \frac{1 + \varepsilon^1 + \varepsilon^2}{3} = (r + g + b) \frac{1 + \varepsilon^1 + \varepsilon^2}{3} = a_{lu} \cdot e_{lu}, \\ \mathcal{C} \cdot \mathbf{E}_{ch} &= (r + g\varepsilon^1 + b\varepsilon^2) \frac{1 + w^1 \varepsilon^1 + w^2 \varepsilon^2}{3} = \\ &= (r + gw^1 + bw^2) \frac{1 + w^1 \varepsilon^1 + w^2 \varepsilon^2}{3} = \mathcal{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch}. \end{aligned} \quad (25)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} a_{lu} &= r + g + b, \quad \mathcal{Z}_{ch} = r + gw^1 + bw^2 = \\ &= r + 0.5g(-1 + i\sqrt{3}) + 0.5b(-1 - i\sqrt{3}) = \left( r - \frac{g+b}{2} \right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(g-b). \end{aligned} \quad (26)$$

Следовательно,  $\mathcal{Z}_{ch}$  является комплексным числом, а из равенства

$$\mathcal{C} = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2 = a_{lu} \cdot e_{lu} + \mathcal{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch} = (a_{lu}, \mathcal{Z}_{ch}) \quad (27)$$

следует, что цветная алгебра  $Alg_3(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$  является прямой суммой реального  $\mathbf{R}$  и комплексного  $\mathbf{C}$  полей:

$$\mathcal{A}_3(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2) = \mathbf{R} \cdot e_{lu} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_{ch} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{C}.$$

Мы будем называть реальные числа  $a_{lu} \in \mathbf{R}$  яркостными числами, а комплексные числа  $\mathcal{Z}_{ch} \in \mathbf{C}$  - хроматическими числами.

**Примечание 1.** Триплетная алгебра  $Alg_3(\mathbf{R}|1, \varepsilon, \varepsilon^2)$  изоморфна следующей алгебре  $Alg_3(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2) \approx \mathbf{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^3 - 1)$ . Так как  $(\varepsilon^3 - 1) = (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)$ , то согласно китайской теореме об остатках, можно написать

$$\begin{aligned} Alg_3(\mathbf{R}|1, \varepsilon, \varepsilon^2) &\approx \mathbf{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^3 - 1) = \\ &= \mathbf{R}[\varepsilon]/(\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) \approx \mathbf{R}[\varepsilon]/(\varepsilon - 1) \oplus \mathbf{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{R}[\varepsilon]/(\varepsilon - 1) &:= \{a_{lu} | a_{lu} = (r + g\varepsilon + b\varepsilon^2) \bmod(\varepsilon - 1)\} = \{r + g + b | r, g, b \in \mathbf{R}\}, \\ \mathbf{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) &:= \\ &= \{\mathcal{Z}_{ch} | \mathcal{Z}_{ch} = (r + g\varepsilon + b\varepsilon^2) \bmod(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)\} = \{(r - b) + (g - b)\varepsilon | r, g, b \in \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

Это означает, что любое триплетное число  $\mathcal{C} \in \text{Alg}_3(\mathbf{R} | 1, \varepsilon, \varepsilon^2)$  может быть представлено двумя остатками

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= (\mathcal{C} \bmod(\varepsilon - 1), \mathcal{C} \bmod(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)) = \\ &= (a_{lu}, \mathcal{Z}_{ch}) = (r + g + b, (r - b) + (g - b)\varepsilon), \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} a_{lu} &= \mathcal{C} \bmod(\varepsilon - 1) \in \mathbf{R}[\varepsilon]/(\varepsilon - 1), \\ \mathcal{Z}_{ch} &= \mathcal{C} \bmod(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = (r - b) + (g - b)\varepsilon \in \mathbf{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) \end{aligned} \quad (29)$$

Согласно (27) из остатков  $(a_{lu}, \mathcal{Z}_{ch})$  восстанавливается триплетное число  $\mathcal{C}$ . Из (26) легко получить выражения для насыщенности и угла цветового тона любого цветного (триплетного) числа  $\mathcal{C} = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$ :

$$\begin{aligned} |\mathcal{Z}_{ch}|_{sat} &= \sqrt{r^2 + g^2 + b^2 - rg - rb - gb} = \left[ (r - g)^2 + (r - b)^2 + (g - b)^2 \right] / \sqrt{2}, \\ \theta_{ch} &= \arctg \frac{\sqrt{3}(g - b)}{2r - g - b}, \end{aligned} \quad (30)$$

что совпадает с точностью до постоянного множителя с выражениями (1) и (2) для соответствующих характеристик цвета. Заметим, что любое триплетное число может быть представлено в экспоненциальной форме. Действительно, для экспоненциальной функции вещественного аргумента мы имеем

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k / k!$ . Подставляя сюда  $x = \mathcal{A} = (a, \nu)$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = e^{\mathcal{A}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{A}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a, \nu)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{a^k}{k!}, \frac{\nu^k}{k!} \right) = \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} \right) = (e^a, e^\nu) = (a_{lu}, \mathcal{Z}), \\ a_{lu} &= e^a, \quad \mathcal{Z} = e^\nu = e^{c + \dot{\nu} \cdot d} = e^c e^{\dot{\nu} \cdot d} = e^c (\cos d + \dot{\nu} \sin d) \end{aligned} \quad (31)$$

Следовательно

$$\mathcal{C} = e^{\mathcal{A}} = (e^a, e^\nu) = (e^a, e^{c + \dot{\nu} \cdot d}) = (e^a, e^c e^{\dot{\nu} \cdot d}) = (\mu_{lu}, \mu_{sat} e^{\dot{\nu} \cdot \theta_{ch} d}) = (\mu_{lu}, \mathcal{Z}_{ch}),$$

где

$$\nu = c + \dot{\nu} \cdot d, \quad \mu_{lu} = e^a, \quad \mu_{sat} = e^c = |\mathcal{Z}_{ch}|, \quad \theta_{ch} = d = \arg(\mathcal{Z}_{ch}).$$

### 3.3.2. Модели цветных 2-D изображений

Используя алгебру  $\text{Alg}_3^{vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^l, \varepsilon^2)$ , можно ввести алгебраические модели цветных изображений в виде функции одной обобщенной комплексной переменной со значениями в триплетной алгебре.



**Определение 13.** Цветным изображением

$$f(x + Iy) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I) \rightarrow Alg_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$$

называется  $Alg_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ -значная функция, зависящая от комплексной переменной  $\mathbf{z} \in Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I)$

$$f(x + Iy) = f_r(x + Iy)1 + f_g(x + Iy)\varepsilon_{col}^1 + f_b(x + Iy)\varepsilon_{col}^2, \quad (32)$$

$$f(x + Iy) = f_{lu}(x + Iy)e_{lu} + f_{ch}(x + Iy)\mathbf{E}_{ch} = (f_{lu}(x + Iy), f_{ch}(x + Iy)).$$

Первое представление называется (R,G,B)-форматом (рис.27), а второе – яркостно-хроматическим («luminance-chrominance»-LC, см рис. 28). Последний формат  $(f_{lu}(\mathbf{z}), f_{ch}(\mathbf{z}))$  определяет изображение в терминах яркостной  $f_{lu}(\mathbf{z})$  и хроматической  $f_{ch}(\mathbf{z})$  составляющих,  $|f_{ch}(\mathbf{z})|$  насыщенность (saturation) и  $\mathbf{arg}\{f_{ch}(\mathbf{z})\}$  цветовой тон ( $huw$ )  $f(\mathbf{z})$ . В зависимости от свойств мнимых единиц, можно предложить девять моделей цветных изображений представленных ниже

$$\begin{aligned} &^{-}f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_-) \rightarrow Alg_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_-^1, \varepsilon_-^2), \quad {}^{-0}f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_-) \rightarrow Alg_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_0^1, \varepsilon_0^2), \quad {}^{-+}f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_-) \rightarrow Alg_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_+^1, \varepsilon_+^2), \\ &{}^{0-}f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_0) \rightarrow Alg_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_-^1, \varepsilon_-^2), \quad {}^{00}f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_0) \rightarrow Alg_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_0^1, \varepsilon_0^2), \quad {}^{0+}f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_0) \rightarrow Alg_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_+^1, \varepsilon_+^2), \\ &{}^{+-}f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_+) \rightarrow Alg_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_-^1, \varepsilon_-^2), \quad {}^{+0}f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_+) \rightarrow Alg_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_0^1, \varepsilon_0^2), \quad {}^{++}f(\mathbf{z}) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_+) \rightarrow Alg_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_+^1, \varepsilon_+^2). \end{aligned}$$

Преобразования изображений (геометрические и цветовые искажения) в физическом и в перцептуальном пространствах могут быть описаны на языках пространственной и перцептуальной алгебр.

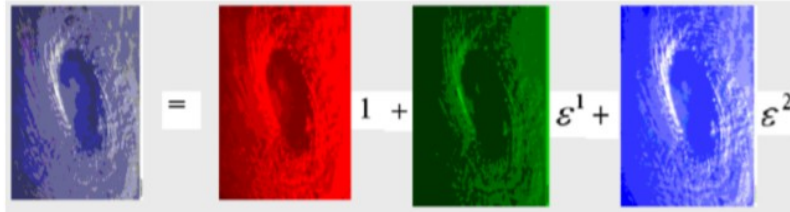


Рис. 27. В традиционном подходе каждый цветной пиксель ассоциируется с точкой в 3-D цветовом RGB векторном пространстве, а в предлагаемом подходе каждый пиксель ассоциируется с триплетным числом.

Эти искажения могут быть вызваны: 1) пространственными преобразованиями (трансляциями  $\mathbf{z}' = \mathbf{z} + \mathbf{w}$ , вращениями  $\mathbf{z}' = \exp(I\varphi_{sp})\mathbf{z}$ , изменениями масштаба  $\mathbf{z}' = \lambda\mathbf{z}$ ) и 2) цветовыми преобразованиями: цветной трансляцией  $f + \mathbf{w}$ , и преобразованием цвета  $\mathcal{C}f = (\mu_{lu}, \mu_{sat} e^{i\theta_{ch}}) f$ . Если  $f(\mathbf{z})$  - исходное цветное изображение, то изображение

$$\begin{aligned} &{}_{\lambda, \varphi, \mathbf{w}}^{\mu_{lu}, \mu_{ch}, \theta_{ch}} \mathcal{C}f(\mathbf{z}) = (\mu_{lu}, \mu_{sat} e^{i\theta_{ch}}) \cdot f(\lambda e^{I\varphi} \mathbf{z} + \mathbf{w}) = \\ &= (a_{lu} f_{lu}(\lambda e^{I\varphi} \mathbf{z} + \mathbf{w}), \mu_{sat} e^{i\theta_{ch}} f_{ch}(\lambda e^{I\varphi} \mathbf{z} + \mathbf{w})) = \\ &= a_{lu} f_{lu}(\lambda e^{I\varphi} \mathbf{z} + \mathbf{w}) e_{lu} + \mu_{sat} e^{i\theta_{ch}} f_{ch}(\lambda e^{I\varphi} \mathbf{z} + \mathbf{w}) \mathbf{E}_{ch} \end{aligned} \quad (33)$$

является его искаженной версией. Пространственные искажения здесь вызваны преобразованиями физического пространства:  $\mathbf{z} \rightarrow \lambda \exp(I\varphi_{Sp})\mathbf{z} + \mathbf{w}$ , а цветовые – преобразованиями перцептуального пространства  $(\mu_{lu}, \mu_{sat} e^{i\theta_{Ch}}) \mathbf{f}$ .

$$\begin{aligned}
 f_{col}(x,y) &= \text{[Image of bicycles]} = \\
 &= f_{lu}(x,y)e_{lu} + \mathbf{f}_{Ch}(x,y)E_{Ch} = \\
 &\text{[Image of grayscale bicycles]} + \text{[Color map]}
 \end{aligned}$$

Рис. 28. Яркостно –хроматический LC-формат, в котором цветное изображение представляет собой пару изображений: серое (реально-значное) изображение и бихроматическое (комплексно-значное)

Как видно, изменения цветового тона, насыщенности и яркости достаточно просто описываются на языке цветной алгебры.



Рис. 29. Изменение цветового тона у исходного изображения  $f(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{C} \cdot f(\mathbf{z}) = (1, e^{i\theta_{Ch}}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), f_{Ch}(\mathbf{z})) = (f_{lu}(\mathbf{z}), e^{i\theta_{Ch}} f_{Ch}(\mathbf{z}))$ ; а) исходное изображение "Yorick" ( $\theta_{Ch} = 0$ ), б)  $\theta_{Ch} = \pi/12$ , в)  $\theta_{Ch} = \pi/6$ , г)  $\theta_{Ch} = \pi/4$ , д)  $\theta_{Ch} = -\pi/12$ , е)  $\theta_{Ch} = -\pi/6$

Пусть для примера  $\mathcal{C} = (\mu_{lu}, \mu_{sat} e^{i\theta_{Ch}})$ , где  $\mu_{lu} > 0$ , тогда следующие преобразования

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{C} \cdot f(\mathbf{z}) &= (\mu_{lu}, \mu_{sat} e^{i\theta_{Ch}}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), f_{ch}(\mathbf{z})) = \\ &= (\mu_{lu}, \mu_{sat} e^{i\theta_{Ch}}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), f_{ch}(\mathbf{z})) = (\mu_{lu} f_{lu}(\mathbf{z}), \mu_{sat} e^{i\theta_{Ch}} f_{ch}(\mathbf{z})) \end{aligned}$$

меняют яркость, цветовой тон и насыщенность цветного изображения. Множество таких преобразований формирует яркостно-хроматическую полугруппу

$$\text{LCG}(\text{Alg}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|\varepsilon)) = \left\{ (\mu_{lu}, \mu_{sat} e^{i\theta_{Ch}}) \mid (\mu_{lu} \in \mathbf{R}^+) \& (\mu_{sat} e^{i\theta_{Ch}} \in \mathbf{C}) \right\}.$$

- В частности, если  $\mathcal{C} = (1, e^{i\theta_{Ch}})$ , то преобразования

$$f(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{C} f(\mathbf{z}) = (1, e^{i\theta_{Ch}}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), f_{ch}(\mathbf{z})) = (f_{lu}(\mathbf{z}), e^{i\theta_{Ch}} f_{ch}(\mathbf{z}))$$

изменяют цветовой тон изображения (см. рис. 29). Множество подобных преобразований формирует ортогональную группу преобразований цветового тона  $\text{HOG}(\text{Alg}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|\varepsilon)) = \{(1, \exp(i\theta_{Ch})) \mid \exp(i\theta_{Ch}) \in \mathbf{C}\}$  (hue orthogonal group).

- Пусть  $\mathcal{C} = (1, \mu_{sat})$ , тогда преобразования

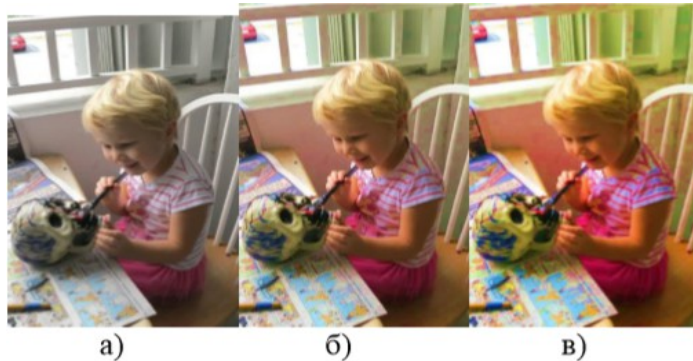
$$f(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{C} f(\mathbf{z}) = (1, \mu_{sat}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), f_{ch}(\mathbf{z})) = (f_{lu}(\mathbf{z}), \mu_{sat} f_{ch}(\mathbf{z}))$$

изменяют насыщенность исходного изображения (см. Рис. 30). Множество таких преобразований формирует группу преобразований насыщенности  $\text{SaG}(\text{Alg}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|\varepsilon_{col})) = \{(1, \mu_{sat}) \mid \mu_{sat} \in \mathbf{R}^+\}$  (saturation group).

- Если же  $\mathcal{C} = (1, \mu_{sat} e^{i\theta_{Ch}})$ , то преобразования

$$f(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{C} f(\mathbf{z}) = (1, \mu_{sat} e^{i\theta_{Ch}}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), f_{ch}(\mathbf{z})) = (f_{lu}(\mathbf{z}), \mu_{sat} e^{i\theta_{Ch}} f_{ch}(\mathbf{z}))$$

изменяют цветовой тон и насыщенность исходного изображения (см. Рис. 31). Множество таких преобразований формирует хроматическую полугруппу  $\text{ChG}(\text{Alg}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|\varepsilon_{col})) = \{(1, \mu_{sat} \exp(i\theta_{Ch})) \mid \exp(i\theta_{Ch}) \in \mathbf{C} \& \mu_{sat} \in \mathbf{R}^+\}$ .



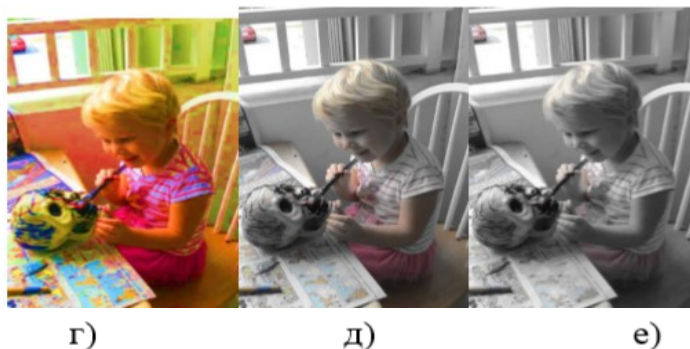


Рис. 30. Изменение насыщенности исходного цветного изображения  $f(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{C} \cdot f(\mathbf{z}) = (1, \mu_{sat}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), f_{ch}(\mathbf{z})) = (f_{lu}(\mathbf{z}), \mu_{sat} f_{ch}(\mathbf{z}))$  а) исходное изображение "Yorick" ( $\mu_{sat} = 1$ ), б)  $\mu_{sat} = 1,3$ ; в)  $\mu_{sat} = 1,6$ ; г)  $\mu_{sat} = 2$ , д)  $\mu_{sat} = 0,6$ ; е)  $\mu_{sat} = 0,3$

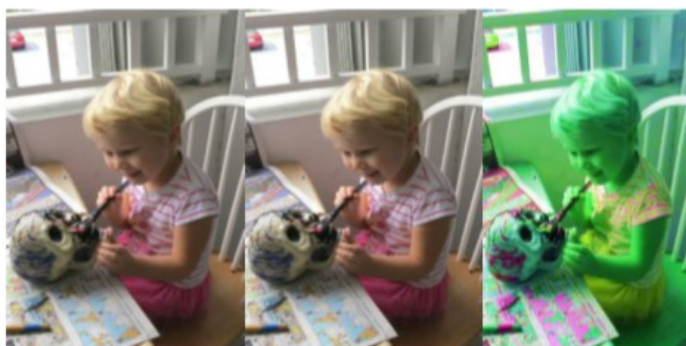


Рис. 31. Изменение хроматической составляющей (цветового тона и насыщенности) у цветного изображения

$$f(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{C} f(\mathbf{z}) = (1, \mu_{sat} e^{i\theta_{ch}}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), f_{ch}(\mathbf{z})) = (f_{lu}(\mathbf{z}), \mu_{sat} e^{i\theta_{ch}} f_{ch}(\mathbf{z}))$$

а) исходное изображение "Yorick" ,  
( $\mu_{sat} = 1, \theta_{ch} = 0$ ), б)  $\mu_{sat} = 1,3; \theta_{ch} = -\pi/12$ ; в)  $\mu_{sat} = 1,6; \theta_{ch} = +\pi/12$

### 3.3.3. Моменты и инварианты цветных изображений

Моменты цветных изображений определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_p \{f\} &= \int_{z \in A_2^{sp}} \mathbf{z}^p \cdot f(\mathbf{z}) dx dy = \\ &= \int_{z \in A_2^{sp}} \mathbf{z}^p (f_r(x + Iy) + \varepsilon^1 f_g(x + Iy) + \varepsilon^2 f_b(x + Iy)) dx dy = \\ &= \int_{z \in A_2^{sp}} \mathbf{z}^p f_r(x + Iy) dx dy + \varepsilon^1 \int_{z \in A_2^{sp}} \mathbf{z}^p \cdot f_g(x + Iy) dx dy + \varepsilon^2 \int_{z \in A_2^{sp}} \mathbf{z}^p f_b(x + Iy) dx dy = \\ &= \mathbf{M}_p \{f_r\} + \varepsilon^1 \cdot \mathbf{M}_p \{f_g\} + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{M}_p \{f_b\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Нетрудно видеть, что моменты принадлежат новой пространственно-перцептуальной алгебре

$$\begin{aligned} Alg_6^{VisSp} &= Alg_3^{Vis} (Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I)|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2) := \\ &= Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I) + Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I) \cdot \varepsilon^1 + Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I) \cdot \varepsilon^2 = \\ &= \left\{ \overset{\circ}{\mathcal{Z}} = \mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_1 \varepsilon^1 + \mathbf{z}_2 \varepsilon^2 \mid \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I) \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, все операции под интегралом (34) можно проводить по законам  $Alg_6^{VisSp}$ -алгебры и поэтому моменты в этом выражении (34) являются  $Alg_6^{VisSp}$ -значными:

$$\mathbf{M}_p \{f\} = \mathbf{M}_p \{f_r\} + \varepsilon^1 \cdot \mathbf{M}_p \{f_g\} + \varepsilon^2 \cdot \mathbf{M}_p \{f_b\}.$$

Выясним связь между моментами исходного изображения  $f(\mathbf{z})$  и его искаженной версией

$$\overset{\circ}{\mu}_{\lambda, \varphi}^{\mu_{lu}, \mu_{sat}, \theta_{ch}} f(\mathbf{z}) = (\mu_{lu}, \mu_{sat} e^{J\theta_{ch}}) \cdot f(\lambda e^{J\varphi} \mathbf{z}).$$

**Теорема 5.** Центральные моменты  $\overset{\circ}{\mathbf{M}}_p \{f\}$  являются относительными  $Alg_6^{VisSp}$ -значными инвариантами по отношению к аффинной групп преобразований с мультипликаторами  $(\mu_{lu}, \mu_{sat}) \exp(J\theta_{ch}) \lambda^{-(p+2)} \exp(-I\rho\varphi)$ , то есть

$$\overset{\circ}{\mathbf{M}}_p \left\{ \overset{\circ}{\mu}_{\lambda, \varphi}^{\mu_{lu}, \mu_{sat}, \theta_{ch}} f(\mathbf{z}) \right\} = (\mu_{lu}, \mu_{sat} e^{J\theta_{ch}}) \lambda^{-(p+2)} e^{-I\rho\varphi} \overset{\circ}{\mathbf{M}}_p \{f\}, \quad (35)$$

где

$$\overset{\circ}{\mathbf{M}}_p \{f\} \quad \text{и} \quad \overset{\circ}{\mathbf{M}}_p \left\{ \overset{\circ}{\mu}_{\lambda, \varphi}^{\mu_{lu}, \mu_{sat}, \theta_{ch}} f(\mathbf{z}) \right\}$$

моменты исходного  $f(\mathbf{z})$  и преобразованного изображений

$$\overset{\circ}{\mu}_{\lambda, \varphi}^{\mu_{lu}, \mu_{sat}, \theta_{ch}} f(\mathbf{z}) = (\mu_{lu}, \mu_{sat} e^{J\theta_{ch}}) \cdot f(\lambda e^{J\varphi} \mathbf{z}).$$

**Доказательство.** Для искаженной версии изображения имеем

$$\overset{\circ}{\mathbf{M}}_p \left\{ \overset{\circ}{\mu}_{\lambda, \varphi}^{\mu_{lu}, \mu_{sat}, \theta_{ch}} f(\mathbf{z}) \right\} = (\mu_{lu}, \mu_{sat} e^{J\theta_{ch}}) \int_{\mathbf{z} \in \mathcal{A}_2^{Sp}} \mathbf{z}^p \cdot f(\lambda e^{J\varphi} \mathbf{z}) dx dy. \quad (36)$$

После замены переменных  $\mathbf{z}' = \lambda e^{J\varphi} \mathbf{z}$  получаем искомый результат.

**Теорема 6.** Нормализованные центральные моменты

$$\text{Innv}_{p>2} \{f(\mathbf{z})\} = \frac{\overset{\circ}{\mathbf{M}}_p \{f(\mathbf{z})\} \overset{\circ}{\mathbf{M}}_1^{2p-3} \{f(\mathbf{z})\}}{\overset{\circ}{\mathbf{M}}_{p-1} \{f(\mathbf{z})\} \overset{\circ}{\mathbf{M}}_2^{p-1} \{f(\mathbf{z})\} \overset{\circ}{\mathbf{M}}_0^{p-2} \{f(\mathbf{z})\}} \quad (37)$$

являются абсолютными  $Alg_6^{VisSp}$ -значными инвариантами по отношению к аффинной групп преобразований физического и перцептуального пространств.

### 3.4. Алгебраические модели многоканальных изображений

Традиционно многоканальные изображения интерпретируются как  $K$ -D векторно-значные сигналы

$$\mathbf{f}(\mathbf{z})=(f_0(\mathbf{z}), f_1(\mathbf{z}), \dots, f_{K-1}(\mathbf{z})): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}^K$$

Будем интерпретировать их как мультиплетно-значные сигналы

$$f(\mathbf{z}) = f_0(\mathbf{z}) + f_1(\mathbf{z})\varepsilon^1 + \dots + f_{K-1}(\mathbf{z})\varepsilon^{K-1}$$

которые принимают значения в мультиплетной алгебре  $Alg_K^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{K-1}) = \mathbf{R}1 + \mathbf{R}\varepsilon + \dots + \mathbf{R}\varepsilon^{K-1}$ , где  $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^2$  и  $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{K-1}$  – гипермнимые единицы, которые обладают одним из трёх свойств  $\varepsilon^{K-1} \in \{+1, 0, -1\}$  [41-46].

#### 3.4.1. Алгебраизация гиперспектрального перцептуального пространства

Мультиплетные числа (многомерные обобщения комплексных чисел) представляются линейными комбинациями гипермнимых единиц 1

$$m = \sum_{i=0}^{K-1} a_i \varepsilon^i, \quad a_i \in \mathbf{R}.$$

Эти числа (в зависимости от  $\varepsilon^{K-1} = +1, 0, -1$ ) формируют три мультиплетных алгебры

$$\begin{aligned} Alg_K^{+,Vis}(\mathbf{R}) &= Alg_K^{+,Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_+^1, \varepsilon_+^2, \dots, \varepsilon_+^{K-1}) = \sum_{i=0}^{K-1} \mathbf{R}\varepsilon_+^i, \\ Alg_K^{-,Vis}(\mathbf{R}) &= Alg_K^{-,Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_-^1, \varepsilon_-^2, \dots, \varepsilon_-^{K-1}) = \sum_{i=0}^{K-1} \mathbf{R}\varepsilon_-^i, \\ Alg_K^{0,Vis}(\mathbf{R}) &= Alg_K^{0,Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_0^1, \varepsilon_0^2, \dots, \varepsilon_0^{K-1}) = \sum_{i=0}^{K-1} \mathbf{R}\varepsilon_0^i. \end{aligned}$$

которые мы называем многоцветными алгебрами и обозначаем так:

$$\begin{aligned} Alg_k^{+,mcol}(\mathbf{R}) &= Alg_k^{+,mcol}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_+^1, \varepsilon_+^2, \dots, \varepsilon_+^{k-1}) = \mathbf{R} + \mathbf{R}\varepsilon_+^1 + \mathbf{R}\varepsilon_+^2 + \dots + \mathbf{R}\varepsilon_+^{k-1}, \\ Alg_k^{-,mcol}(\mathbf{R}) &= Alg_k^{-,mcol}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_-^1, \varepsilon_-^2, \dots, \varepsilon_-^{k-1}) = \mathbf{R} + \mathbf{R}\varepsilon_-^1 + \mathbf{R}\varepsilon_-^2 + \dots + \mathbf{R}\varepsilon_-^{k-1}, \\ Alg_k^{0,mcol}(\mathbf{R}) &= Alg_k^{0,mcol}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_0^1, \varepsilon_0^2, \dots, \varepsilon_0^{k-1}) = \mathbf{R} + \mathbf{R}\varepsilon_0^1 + \mathbf{R}\varepsilon_0^2 + \dots + \mathbf{R}\varepsilon_0^{k-1}, \end{aligned}$$

Для гипермнимых единиц имеют место следующие таблицы умножения

·	1	$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^2$	...	$\varepsilon_+^{k-1}$
1	1	$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^2$	...	$\varepsilon_+^{k-1}$
$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^2$	...	$\varepsilon_+^{k-1}$	1
$\varepsilon_+^2$	$\varepsilon_+^2$	...	$\varepsilon_+^{k-1}$	1	$\varepsilon_+^1$
...	...	...	...	...	...
$\varepsilon_+^{k-1}$	$\varepsilon_+^{k-1}$	1	$\varepsilon_+^1$	...	$\varepsilon_+^{k-2}$

·	1	$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^2$	...	$\varepsilon_-^{k-1}$
1	1	$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^2$	...	$\varepsilon_-^{k-1}$
$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^2$	...	$\varepsilon_-^{k-1}$	-1
$\varepsilon_-^2$	$\varepsilon_-^2$	...	$\varepsilon_-^{k-1}$	-1	$-\varepsilon_-^1$
...	...	...	...	...	...
$\varepsilon_-^{k-1}$	$\varepsilon_-^{k-1}$	-1	$-\varepsilon_-^1$	...	$-\varepsilon_-^{k-2}$

·	1	$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^2$	...	$\varepsilon_0^{k-1}$
1	1	$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^2$	...	$\varepsilon_0^{k-1}$
$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^2$	...	$\varepsilon_0^{k-1}$	0
$\varepsilon_0^2$	$\varepsilon_0^2$	...	$\varepsilon_0^{k-1}$	0	0
...	...	...	...	...	...
$\varepsilon_0^{k-1}$	$\varepsilon_0^{k-1}$	0	0	...	0

Сложение мультиплетных чисел  $m_1$  и  $m_2$  в трех алгебрах осуществляется покомпонентно:

$$m = m_1 + m_2 = \sum_{i=1}^{K-1} a_i \varepsilon^i + \sum_{i=1}^{K-1} b_i \varepsilon^i = \sum_{i=1}^{K-1} (a_i + b_i) \varepsilon^i.$$

Следовательно, по отношению к сложению все три алгебры формируют три изоморфных 3D-векторных пространства. Правила умножения любой пары мультиплетных чисел  $m_1$  и  $m_2$  в трех мультиплетных алгебрах различны

$$m = m_1 \cdot m_2 = \left( \sum_{n=0}^{K-1} a_n \varepsilon_-^n \right) \cdot \left( \sum_{m=0}^{K-1} b_m \varepsilon_-^m \right) = \sum_{l=0}^{K-1} \left( \sum_{m=0}^{K-1} a_{l \ominus m} b_m \right) \varepsilon_-^l = \sum_{l=0}^{K-1} c_l \varepsilon_-^l$$

для  $Alg_k^{+,Vis}(\mathbf{R}) = Alg_k^{+,Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon_+^1, \varepsilon_+^2, \dots, \varepsilon_+^{K-1})$ ;

$$m = m_1 \cdot m_2 = \left( \sum_{n=0}^{K-1} a_n \varepsilon_+^n \right) \cdot \left( \sum_{m=0}^{K-1} b_m \varepsilon_+^m \right) = \sum_{l=0}^{K-1} \left( \sum_{m=0}^{K-1} \text{Sign}(l-m) a_{l \ominus m} b_m \right) \varepsilon_+^l = \sum_{l=0}^{K-1} c_l \varepsilon_+^l$$

для  $Alg_k^{-,Vis}(\mathbf{R}) = Alg_k^{-,Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon_-^1, \varepsilon_-^2, \dots, \varepsilon_-^{K-1})$  и

$$m = m_1 \cdot m_2 = \left( \sum_{n=0}^{K-1} a_n \varepsilon_0^n \right) \cdot \left( \sum_{m=0}^{K-1} b_m \varepsilon_0^m \right) = \sum_{l=0}^{K-1} \left( \sum_{m=0}^{K-1} \text{Hev}(l-m) a_{l \ominus m} b_m \right) \varepsilon_0^l = \sum_{l=0}^{K-1} c_l \varepsilon_0^l$$

для  $Alg_k^{0,Vis}(\mathbf{R}) = Alg_k^{0,Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon_0^1, \varepsilon_0^2, \dots, \varepsilon_0^{K-1})$ , где  $l \ominus m$  есть сложение по модулю  $K$ , и

$$\text{Sign}(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad \text{Hev}(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

есть знаковая функция и функция Хевисайда, соответственно (см. рис. 32). Легко видеть, что эти произведения изоморфны дискретным  $K$ -точечным сверткам – циклической, ациклической и нильпотентной, соответственно:

$$c_l = \sum_{m=0}^{K-1} a_{l \oplus m} b_m, \quad c_l = \sum_{m=0}^{K-1} \text{Sign}(l-m) a_{l \oplus m} b_m, \quad c_l = \sum_{m=0}^{K-1} \text{Hev}(l-m) a_{l \oplus m} b_m.$$

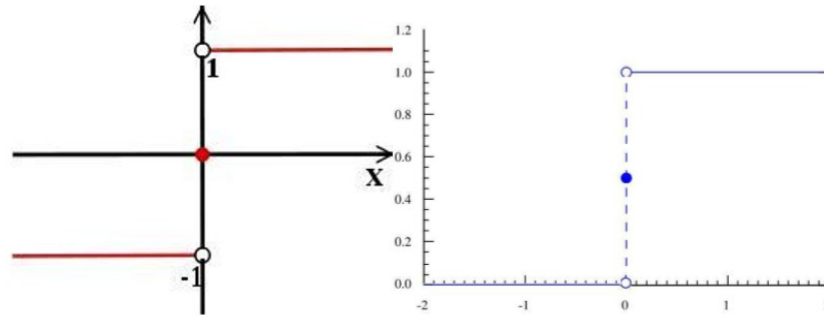


Рис 32. Знаковая функция и функция Хевисайда

Используя полиномиальную китайскую теорему об остатках, можно легко доказать, что две алгебры  $\text{Alg}_K^{+,Vis}(\mathbf{R})$  и  $\text{Alg}_K^{-,Vis}(\mathbf{R})$  являются прямыми суммами полей реальных и комплексных чисел:

$$\text{Alg}_K^{+,Vis}(\mathbf{R}) = (\mathbf{R} \cdot e_{lu}^1 \oplus \mathbf{R} \cdot e_{lu}^2) \oplus \sum_{j=1}^{K/2-1} \mathbf{C} \cdot \mathcal{E}_{ch}^j,$$

если  $K$  – чётное и

$$\text{Alg}_K^{+,Vis}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{K_{lu}} \oplus \mathbf{C}^{K_{ch}} = \mathbf{R} \cdot e_{lu}^1 \oplus \sum_{j=1}^{(K-1)/2} \mathbf{C} \cdot \mathcal{E}_{ch}^j,$$

если  $K$  – нечётное, аналогично

$$\text{Alg}_K^{-,Vis}(\mathbf{R}) = \sum_{j=1}^{K/2} \mathbf{C} \cdot \mathcal{E}_{ch}^j,$$

если  $K$  – чётное и

$$\text{Alg}_K^{-,Vis}(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot e_{lu}^1 \oplus \sum_{j=1}^{(K-1)/2} \mathbf{C} \cdot \mathcal{E}_{ch}^j,$$

если  $K$  – нечетное, где  $e_{lu}^i$  и  $\mathcal{E}_{ch}^j$  – суть "реальные" и "комплексные" ортогональные идемпотенты, такие, что

$$(e_{lu}^i)^2 = e_{lu}^i, \quad (\mathcal{E}_{ch}^j)^2 = \mathcal{E}_{ch}^j, \quad e_{lu}^i \mathcal{E}_{ch}^j = \mathcal{E}_{ch}^j e_{lu}^i$$



для всех  $i$  и  $j$ .

Пусть  $K_{lu}=0,1,2$  и  $K_{ch} \in \{K/2, K/2-1, (K-1)/2\}$ . Каждый мультиплет  $m \in Alg_K^{\pm, Vis}(\mathbf{R})$  может быть представлен в виде линейной комбинации  $K_{lu}$  «скалярных» и  $K_{ch}$  «комплексных» составляющих:

$$m = \sum_{i=1}^{K_{lu}} (\mu_i \cdot e_{lu}^i) + \sum_{j=1}^{K_{ch}} (z_j \cdot E_{ch}^j).$$

Реальные числа  $\mu_i \in \mathbf{R}$  называются мультияркостями, а комплексные  $z_j$  – мультихроматами. В таком представлении две главные арифметические операции имеют простую форму:

$$m_1 + m_2 = \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} \mu_i \cdot e_{lu}^i + \sum_{j=1}^{K_{ch}} z_j \cdot E_{ch}^j \right) + \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} \eta_i \cdot e_{lu}^i + \sum_{j=1}^{K_{ch}} w_j \cdot E_{ch}^j \right) = \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} (\mu_i + \eta_i) \cdot e_{lu}^i + \sum_{j=1}^{K_{ch}} (z_j + w_j) \cdot E_{ch}^j \right),$$

$$m_1 \cdot m_2 = \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} \mu_i \cdot e_{lu}^i + \sum_{j=1}^{K_{ch}} z_j \cdot E_{ch}^j \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} \eta_i \cdot e_{lu}^i + \sum_{j=1}^{K_{ch}} w_j \cdot E_{ch}^j \right) = \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} (\mu_i \cdot \eta_i) \cdot e_{lu}^i + \sum_{j=1}^{K_{ch}} (z_j \cdot w_j) \cdot E_{ch}^j \right),$$

Мультиплетные алгебры не являются полями. Они формируют числовые кольца с делителями нуля.

### 3.4.2. Модели гиперспектральных изображений

Используя алгебры  $Alg_K^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{K-1})$ , можно ввести алгебраические модели цветных изображений в виде функции одной обобщенной комплексной переменной со значениями в триплетной алгебре.

**Определение 14.** Гиперспектральным изображением

$$f(x + Iy) : Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I) \rightarrow Alg_K^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{K-1})$$

называется  $Alg_K^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{K-1})$ -значная функция, зависящая от комплексной переменной  $\mathbf{z} \in Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I)$ :

Втор  $f(x + Iy) = \sum_{l=0}^{K-1} f_l(x + Iy) \varepsilon^l, \quad f(x + Iy) = \sum_{i=1}^{K_{lu}} f_{lu}^i(x + Iy) \cdot e_{lu}^i + \sum_{j=1}^{K_{ch}} f_{ch}^j(x + Iy) \cdot E_{ch}^j \quad (38) \text{ гала. ами}$

(  $f_{lu}^1, f_{lu}^2, \dots, f_{lu}^{K_{lu}}, \dots$  ) и  $K_{ch}$  хроматическими компонентами

$$\left( f_{ch}^1(\mathbf{z}), f_{ch}^2(\mathbf{z}), \dots, f_{ch}^{K_{ch}}(\mathbf{z}), \dots \right),$$

где

$$\left| f_{ch}^1(\mathbf{z}), f_{ch}^2(\mathbf{z}), \dots, f_{ch}^{K_{ch}}(\mathbf{z}) \right|$$

– мультинасыщенности и

$$\arg \left\{ f_{ch}^1(\mathbf{z}), f_{ch}^2(\mathbf{z}), \dots, \dots, \arg \left\{ f_{ch}^{K_{ch}}(\mathbf{z}) \right\} \right\}$$

– мультитона многоканального изображения  $f(\mathbf{z})$  .

В зависимости от свойств мнимых единиц, можно предложить девять моделей гиперспектральных изображений, представленных ниже

$$\begin{aligned} &^{-}f(\mathbf{z}): Alg_2^{\mathfrak{Sp}}(\mathbb{R}|1, I_-) \rightarrow Alg_K^{Vis}(\mathbb{R}|1, \varepsilon_-^1, \dots, \varepsilon_-^{K-1}), \quad {}^{-0}f(\mathbf{z}): Alg_2^{\mathfrak{Sp}}(\mathbb{R}|1, I) \rightarrow Alg_K^{Vis}(\mathbb{R}|1, \varepsilon_0^1, \dots, \varepsilon_0^{K-1}), \quad {}^{+}f(\mathbf{z}): Alg_2^{\mathfrak{Sp}}(\mathbb{R}|1, I_+) \rightarrow Alg_K^{Vis}(\mathbb{R}|1, \varepsilon_+^1, \dots, \varepsilon_+^{K-1}), \\ &{}^0_{-}f(\mathbf{z}): Alg_2^{\mathfrak{Sp}}(\mathbb{R}|1, I_0) \rightarrow Alg_K^{Vis}(\mathbb{R}|1, \varepsilon_-^1, \dots, \varepsilon_-^{K-1}), \quad {}^{00}f(\mathbf{z}): Alg_2^{\mathfrak{Sp}}(\mathbb{R}|1, I_0) \rightarrow Alg_K^{Vis}(\mathbb{R}|1, \varepsilon_0^1, \dots, \varepsilon_0^{K-1}), \quad {}^{0+}f(\mathbf{z}): Alg_2^{\mathfrak{Sp}}(\mathbb{R}|1, I_0) \rightarrow Alg_K^{Vis}(\mathbb{R}|1, \varepsilon_+^1, \dots, \varepsilon_+^{K-1}), \\ &{}^{+}f(\mathbf{z}): Alg_2^{\mathfrak{Sp}}(\mathbb{R}|1, I_+) \rightarrow Alg_K^{Vis}(\mathbb{R}|1, \varepsilon_-^1, \dots, \varepsilon_-^{K-1}), \quad {}^{+0}f(\mathbf{z}): Alg_2^{\mathfrak{Sp}}(\mathbb{R}|1, I_+) \rightarrow Alg_K^{Vis}(\mathbb{R}|1, \varepsilon_0^1, \dots, \varepsilon_0^{K-1}), \quad {}^{++}f(\mathbf{z}): Alg_2^{\mathfrak{Sp}}(\mathbb{R}|1, I_+) \rightarrow Alg_K^{Vis}(\mathbb{R}|1, \varepsilon_+^1, \dots, \varepsilon_+^{K-1}). \end{aligned}$$

Изменения мультитаркости и мультихроматичности у многоканального изображения легко описываются на языке мультиплетной алгебры  $Alg_K^{Vis}(\mathbb{R})$  как преобразования  $f(\mathbf{z}) \rightarrow m \cdot f(\mathbf{z})$  для подходящих мультиплетных чисел  $m$ . Например, если

$$\begin{aligned} m &= (\mu_{lu}^1, \mu_{lu}^2, \dots, \mu_{lu}^{K_{lu}}; \mathfrak{Z}_{ch}^1, \mathfrak{Z}_{ch}^2, \dots, \mathfrak{Z}_{ch}^{K_{ch}}) = \\ &= (\mu_{lu}^1, \mu_{lu}^2, \dots, \mu_{lu}^{K_{lu}}; \mu_{ch}^1 e^{i\theta_{ch}^1}, \mu_{lu}^1 e^{i\theta_{ch}^2}, \mu_{lu}^2 e^{i\theta_{ch}^2}, \dots, \mu_{lu}^{K_{ch}} e^{i\theta_{ch}^{K_{ch}}}) \end{aligned}$$

где  $\mu_{ch}^l = | \quad |, \mathfrak{Z}_{ch}^j, j=1, 2, \dots, K_{ch}$ , то преобразование

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) \rightarrow m \cdot f(\mathbf{z}) &= \\ &= \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} \mu_{lu}^i e^{i\theta_{lu}^i} + \sum_{j=1}^{K_{ch}} \mu_{ch}^j e^{i\theta_{ch}^j} \cdot \mathfrak{E}_{ch}^j \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} f_{lu}^i(\mathbf{z}) \cdot e^{i\theta_{lu}^i} + \sum_{j=1}^{K_{ch}} f_{ch}^j(\mathbf{z}) \cdot \mathfrak{E}_{ch}^j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{K_{lu}} \mu_{lu}^i f_{lu}^i(\mathbf{z}) \cdot e^{i\theta_{lu}^i} + \sum_{j=1}^{K_{ch}} \mu_{ch}^j e^{i\theta_{ch}^j} f_{ch}^j(\mathbf{z}) \cdot \mathfrak{E}_{ch}^j \end{aligned}$$

изменяет мультитаркости, мультицветовые тона и мультинасыщенности. Множество таких преобразований формирует полугруппу мультилюминансных и мультихроматических преобразований

$$\begin{aligned} &MLCG\left(Alg_K^{Vis}(\mathbb{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{K-1})\right) = \\ &= \left\{ m = (\mu_{lu}^1, \mu_{lu}^2, \dots, \mu_{lu}^{K_{lu}}; \mathfrak{Z}_{ch}^1, \mathfrak{Z}_{ch}^2, \dots, \mathfrak{Z}_{ch}^{K_{ch}}) \mid (\mu_{lu}^1, \mu_{lu}^2, \dots, \mu_{lu}^{K_{lu}} \in \mathbb{R}^+) \& (\mathfrak{Z}_{ch}^1, \mathfrak{Z}_{ch}^2, \dots, \mathfrak{Z}_{ch}^{K_{ch}} \in \mathbb{C}) \right\}. \end{aligned}$$

Пусть, в частности,  $m = (1, \dots, 1; e^{i\theta_{ch}^1}, e^{i\theta_{ch}^{K_{ch}}})$ ,

тогда следующее преобразование

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) \rightarrow mf(\mathbf{z}) &= \\ &= \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} 1 \cdot e^{i\theta_{lu}^i} + \sum_{j=1}^{k_{ch}} e^{i\theta_{ch}^j} \cdot \mathfrak{E}_{ch}^j \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} f_{lu}^i(\mathbf{z}) \cdot e^{i\theta_{lu}^i} + \sum_{j=1}^{k_{ch}} f_{ch}^j(\mathbf{z}) \cdot \mathfrak{E}_{ch}^j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{k_{lu}} f_{lu}^i(\mathbf{z}) \cdot e^{i\theta_{lu}^i} + \sum_{j=1}^{k_{ch}} e^{i\theta_{ch}^j} f_{ch}^j(\mathbf{z}) \cdot \mathfrak{E}_{ch}^j \end{aligned}$$

изменяет только мультицветность исходного изображения.

Их множество формирует *группу мультицветных преобразований*

$$\begin{aligned} \mathbf{MHog}\left(\text{Alg}_K^{\text{Vis}}\left(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{K-1}\right)\right) = \\ = \left\{ \mathbf{m} = \left(1, 1, \dots, 1; e^{i\theta_{ch}^1}, e^{i\theta_{ch}^2}, \dots, e^{i\theta_{ch}^{K_{ch}}}\right) \mid e^{i\theta_{ch}^1}, e^{i\theta_{ch}^2}, \dots, e^{i\theta_{ch}^{K_{ch}}} \in \mathbf{C} \right\}. \end{aligned}$$

Пусть теперь

$$\mathbf{m} = \left(1, 1, \dots, 1; \mu_{sat}^1, \mu_{sat}^2, \dots, \mu_{sat}^{K_{ch}}\right), \mu_{sat}^1, \mu_{sat}^2, \dots, \mu_{sat}^{K_{ch}} > 0,$$

тогда преобразование исходного изображения

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{m} \cdot f(\mathbf{x}) = \\ = \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} 1 \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} \mu_{sat}^j \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} f_{lu}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} f_{ch}^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right) = \\ = \sum_{i=1}^{k_{lu}} f_{lu}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} \mu_{sat}^j f_{ch}^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \end{aligned}$$

изменяет только мультинасыщенность исходного изображения. Их множество формирует *полугруппу преобразований мультинасыщенностей*

$$\begin{aligned} \mathbf{MSdg}\left(\text{Alg}_K^{\text{Vis}}\left(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{k-1}\right)\right) = \\ = \left\{ \mathbf{m} = \left(1, 1, \dots, 1; \mu_{sat}^1, \mu_{sat}^2, \dots, \mu_{sat}^{K_{ch}}\right) \mid \mu_{sat}^1, \mu_{sat}^2, \dots, \mu_{sat}^{K_{ch}} \in \mathbf{R}^+ \right\} \end{aligned}$$

Если же

$$\mathbf{m} = \left(\mu_{lu}^1, \mu_{lu}^2, \dots, \mu_{lu}^{K_{lu}}; \mu_{sat}^1 e^{i\theta_{ch}^2}, \mu_{sat}^2 e^{i\theta_{ch}^2}, \dots, \mu_{sat}^{K_{ch}} e^{i\theta_{ch}^{K_{ch}}}\right),$$

то преобразование

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{m} \cdot f(\mathbf{x}) = \\ = \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} \mu_{lu}^i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} \mu_{sat}^j e^{i\theta_{ch}^2} \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} f_{lu}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} f_{ch}^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right) = \\ = \sum_{i=1}^{k_{lu}} \mu_{lu}^i f_{lu}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} \mu_{sat}^j e^{i\theta_{ch}^2} f_{ch}^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \end{aligned}$$

изменяет у исходного изображения и мультицветность и мультинасыщенность одновременно. Все множество подобных преобразований формирует мультихроматическую полугруппу.

$$\begin{aligned} \mathbf{MChg}\left(\text{Alg}_K^{\text{Vis}}\left(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{k-1}\right)\right) = \\ = \left\{ \mathbf{m} = \left(\mu_{lu}^1, \mu_{lu}^2, \dots, \mu_{lu}^{K_{lu}}; \mu_{sat}^1 e^{i\theta_{ch}^2}, \mu_{sat}^2 e^{i\theta_{ch}^2}, \dots, \mu_{sat}^{K_{ch}} e^{i\theta_{ch}^{K_{ch}}}\right) \mid \right. \\ \left. \left(\mu_{lu}^1, \mu_{lu}^2, \dots, \mu_{lu}^{K_{lu}}; \mu_{sat}^1, \mu_{sat}^2, \dots, \mu_{sat}^{K_{ch}}\right) \in \mathbf{R}^+ \ \& \ \left(e^{i\theta_{ch}^2}, e^{i\theta_{ch}^2}, \dots, e^{i\theta_{ch}^{K_{ch}}} \in \mathbf{C}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Мы предполагаем, что головной мозг может использовать гиперкомплексные алгебры для ментального изменения мультитаркости и мультихроматичности многоканальных изображений, которые возникают в памяти мозга на так называемом «экране сознания», например, во время сна.

### 3.4.3. Моменты и инварианты гиперспектральных изображений

Моменты цветных изображений определяются следующим образом

$$\begin{aligned} M_p \{f\} &= \int_{z \in \mathcal{A}_2^{Sp}} \mathbf{z}^p \cdot f(\mathbf{z}) dx dy = \int_{z \in \mathcal{A}_2^{Sp}} \mathbf{z}^p \left( \sum_{j=1}^{K-1} f_j(x + Iy) \varepsilon^j \right) dx dy = \\ &= \sum_{j=1}^{K-1} \varepsilon^j \int_{z \in \mathcal{A}_2^{Sp}} \mathbf{z}^p f_j(x + Iy) dx dy = \sum_{j=1}^{K-1} \varepsilon^j \cdot M_p \{f_j\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Нетрудно видеть, что моменты принадлежат новой пространственноперцептуальной алгебре  $Alg_K^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{K-1})$

$$\begin{aligned} Alg_K^{VisSp} = Alg_K^{Vis}(Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I)|1, \varepsilon, \varepsilon^2) := \\ Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I) + Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I)\varepsilon^1 + \dots + Alg_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I)\varepsilon^{K-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, все операции под интегралом (39) можно проводить по законам  $Alg_6^{Sp}$ -алгебры и поэтому моменты в этом выражении являются  $Alg_6^{Sp}$ -значными:

$$M_p \{f\} = \sum_{j=1}^{K-1} \varepsilon^j \cdot M_p \{f_j\}.$$

Выясним связь между моментами исходного изображения  $f(\mathbf{z})$  и его искаженной версией

$$\mu_{lu, \mu_{sat}, \theta_{ch}}^{\lambda, \varphi} f(\mathbf{z}) = (\mu_{lu}, \mu_{sat} e^{J\theta_{ch}}) \cdot f(\lambda e^{J\varphi} \mathbf{z}).$$

**Теорема 7.** Центральные моменты  $\overset{\circ}{M}_p \{f\}$  являются относительными  $Alg_6^{VisSp}$ -значными инвариантами по отношению к аффинным группам пространственных и перцептуальных преобразований с мультипликаторами  $(\mu_{lu}, \mu_{sat} \exp(J\theta_{ch})) \lambda^{-(p+2)} \exp(-I\rho\varphi)$ , то есть

$$\overset{\circ}{M}_p \left\{ \mu_{lu, \mu_{sat}, \theta_{ch}}^{\lambda, \varphi} f(\mathbf{z}) \right\} = (\mu_{lu}, \mu_{sat} e^{J\theta_{ch}}) \lambda^{-(p+2)} e^{-I\rho\varphi} \overset{\circ}{M}_p \{f\}, \quad (40)$$

где

$$\overset{\circ}{M}_p \{f\} \text{ и } \overset{\circ}{M}_p \left\{ \mu_{lu, \mu_{sat}, \theta_{ch}}^{\lambda, \varphi} f(\mathbf{z}) \right\}$$

моменты исходного  $f(\mathbf{z})$  и преобразованного изображений

$$\mu_{lu, \mu_{sat}, \theta_{ch}}^{\lambda, \varphi} f(\mathbf{z}) = (\mu_{lu}, \mu_{sat} e^{J\theta_{ch}}) \cdot f(\lambda e^{J\varphi} \mathbf{z}).$$

**Доказательство.** Для искаженной версии изображения имеем

$$\overset{\circ}{M}_p \left\{ \overset{\circ}{\mu}_{iu, \mu_{sat}, \theta_{ch}, \lambda, \varphi} f(\mathbf{z}) \right\} = \left( \mu_{iu}, \mu_{sat} e^{J\theta_{ch}} \right) \int_{\mathbf{z} \in \mathcal{A}_2^{Sp}} \mathbf{z}^p \cdot f(\lambda e^{J\varphi} \mathbf{z}) dx dy.$$

После замены переменных  $\mathbf{z}' = \lambda e^{J\varphi} \mathbf{z}$  получаем искомый результат.

**Теорема 8.** Нормализованные центральные моменты

$$In\mathcal{N}_{p>2} \{f(\mathbf{z})\} = \frac{\overset{\circ}{M}_p \{f(\mathbf{z})\} \overset{\circ}{M}_1^{2p-3} \{f(\mathbf{z})\}}{\overset{\circ}{M}_{p-1} \{f(\mathbf{z})\} \overset{\circ}{M}_2^{p-1} \{f(\mathbf{z})\} \overset{\circ}{M}_0^{p-2} \{f(\mathbf{z})\}} \quad (41)$$

являются абсолютными  $Alg_{2K}^{VisSp}$ -значными инвариантами по отношению к аффинной группе преобразований физического и перцептуального пространств.

### 3.5. Синтез цветных преобразований, всплесков и сплайнов

#### 3.5.1. Цветные (орто-унитарные) преобразования

Классический спектральный анализ, основанный на ортогональных и унитарных преобразованиях, играет важнейшую роль в цифровой обработке изображений. Преобразования, подобные дискретному преобразованию Фурье (ДПФ) и Уолша (ДПУ), интенсивно используются в различных приложениях. Естественным образом возникает вопрос о синтезе преобразований цветных (триплетно-значных) изображений. Дискретные 2-D цветные ( $N \times N$ )-изображения  $\mathbf{f}_{col} := [f_{col}(i, j)]_{i, j=1}^N$  определяются как 2-D ( $N \times N$ )-массивы с пикселями, записанными в (R,G,B) или LC-форматах. Все изображения  $\mathbf{f}_{col} := [f_{col}(i, j)]_{i, j=1}^N$  формируют  $N^2$ -мерное векторное пространство  $(Alg_3^{Vis})^{N^2}$  над триплетной алгеброй.

**Определение 15.** Величина

$$N_k(\mathbf{f}_{col}) := \sum_{(i, j) \in \mathcal{Z}_N^2} \|\mathbf{f}_{col}(i, j)\|_k$$

называется нормой изображения  $\mathbf{f}_{col}$ , где  $k=1, 2, 3$  – одна из трех триплетных норм (3).

**Определение 16.** Линейный оператор

$$\mathcal{L}_{2D} : (Alg_3^{Vis})^{N^2} \rightarrow (Alg_3^{Vis})^{N^2}$$

называется орто-унитарным (или цветным), если он сохраняет норму цветного изображения.

Поскольку триплетное число в LC формате является своеобразным агрегатом из действительного и комплексного чисел, то естественно назвать введенные преобразования орто-унитарными или цветными. В LC-формате такие преобразования могут быть синтезированы с помощью произвольных ортогонального  $O_{2D}$  и унитарного  $U_{2D}$  2-D преобразований следующим образом:

$$\mathcal{L}_{2D} = (O_{1D} \otimes O_{1D})e_{lu} + (U_{1D} \otimes U_{1D})\mathbf{E}_{ch},$$

где  $\otimes$  - символ тензорного произведения.

Следовательно, каждая пара  $(O_{1D}, U_{1D})$  из ортогонального  $O_{1D}$  и унитарного  $U_{1D}$  преобразований генерирует орто-унитарное преобразование

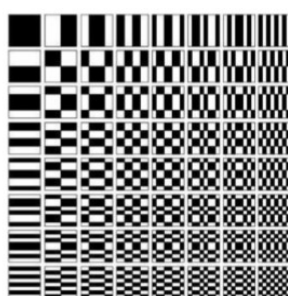
$$\mathcal{L}_{2D} = (O_{1D} \otimes O_{1D})e_{lu} + (U_{1D} \otimes U_{1D})\mathbf{E}_{ch}.$$

В качестве примера в Таблице 1 приведены некоторые цветные преобразования.

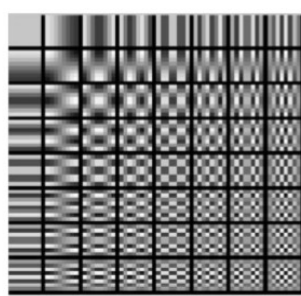
**Таблица 1.** Примеры цветных преобразований

	$F$	$\dot{W}$	$\dot{H}d$	$\dot{W}v$
$W$	$W \cdot e_{lu} + F \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$W \cdot e_{lu} + \dot{W} \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$W \cdot e_{lu} + \dot{H}d \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$W \cdot e_{lu} + \dot{W}v \cdot \mathbf{E}_{ch}$
$Hd$	$Hd \cdot e_{lu} + F \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Hd \cdot e_{lu} + \dot{W} \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Hd \cdot e_{lu} + \dot{H}d \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Hd \cdot e_{lu} + \dot{W}v \cdot \mathbf{E}_{ch}$
$Ht$	$Ht \cdot e_{lu} + F \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Ht \cdot e_{lu} + \dot{W} \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Ht \cdot e_{lu} + \dot{H}d \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Ht \cdot e_{lu} + \dot{W}v \cdot \mathbf{E}_{ch}$
$Hr$	$Hr \cdot e_{lu} + F \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Hr \cdot e_{lu} + \dot{W} \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Hr \cdot e_{lu} + \dot{H}d \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Hr \cdot e_{lu} + \dot{W}v \cdot \mathbf{E}_{ch}$
$Wv$	$Wv \cdot e_{lu} + F \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Wv \cdot e_{lu} + \dot{W} \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Wv \cdot e_{lu} + \dot{H}d \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Wv \cdot e_{lu} + \dot{W}v \cdot \mathbf{E}_{ch}$

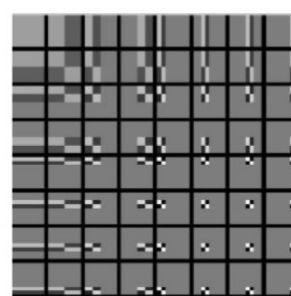
Здесь  $O_{1D} = W, Hd, Ht, Hr, Wv$  – суть ортогональные преобразования Уолша, Адамара, Хартли, Хаара и вейвлет-преобразование, соответственно;  $U_{1D} = F, \dot{W}, \dot{H}d, \dot{W}v$  – суть унитарное преобразование Фурье, комплекснозначное преобразование Уолша и Адамара и, наконец, комплекснозначное вейвлет преобразование, соответственно.



64 базисных  $8 \times 8$ -функций  
Уолша



64 базисных косинусных  
 $8 \times 8$ -функций



64 базисных  $8 \times 8$ -функ-  
ций Хаара

Рис. 33. Иконостас из базисных функций трех ортогональных преобразований

Если  $O = [\varphi_k(n)]_{k,n=0}^{N-1}$  и  $U = [\psi_k(n)]_{k,n=0}^{N-1}$  - произвольные ортогональное и унитарные преобразования, строки которых образуют базисы из реально-

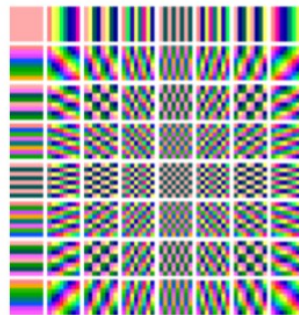
и комплексно-значных функций  $\{\varphi_k(n)\}_{k,n=0}^{N-1}$  и  $\{\psi_k(n)\}_{k,n=0}^{N-1}$ . Тогда выражение

$$\begin{aligned} & (O \otimes O)e_{lu} + (U \otimes U)\mathbf{E}_{ch} = \\ & = \left( [\varphi_{k_1}(n_1)] \otimes [\varphi_{k_2}(n_2)] \right) e_{lu} + [\psi_{k_1}(n_1)] \otimes [\psi_{k_2}(n_2)] \mathbf{E}_{ch} = \\ & = [\varphi_{k_1}(n_1)\varphi_{k_2}(n_2)] e_{lu} + [\psi_{k_1}(n_1)\psi_{k_2}(n_2)] \mathbf{E}_{ch} \end{aligned}$$

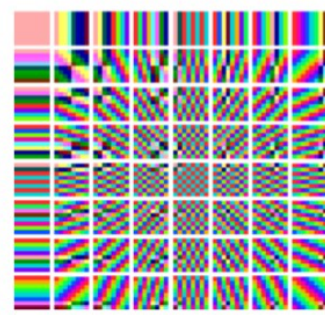
представляет цветное преобразование, где функции  $\{\varphi_{k_1}(n_1)\varphi_{k_2}(n_2)\}_{k_1,k_2,n_1,n_2=0}^{N-1,N-1}$  и  $\{\psi_{k_1}(n_1)\psi_{k_2}(n_2)\}_{k_1,k_2,n_1,n_2=0}^{N-1,N-1}$  формируют  $N^2$  ортогональных и унитарных базисных функций, которые рисуют в виде серых  $N \times N$ -картинок, где численное значение функции изображается уровнем серого. Картинки собирают в 2-D массив, каждая ячейка которого занята одной базисной функцией. Мы называем такой массив иконостасом.



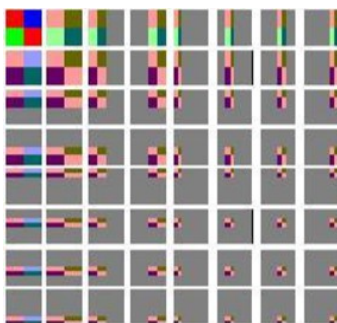
Цветные базисные 8x8-функции Уолша-Фурье



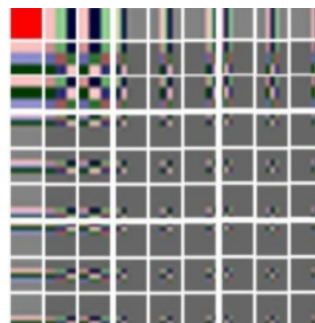
Цветные базисные 8x8-функции Хартли-Фурье



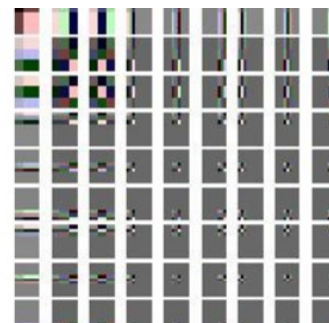
Цветные базисные 8x8-функции Хаара-Фурье



Цветные базисные 8x8-функции Уолша-Уолша



Цветные базисные 9x9-функции Голя-Фурье



Цветные базисные 9x9-функции Хаара-Френеля

Рис. 34. Иконостас из 2-D базисных цветных функций

Для примера, иконостасы для 2-D функций Уолша, косинусоидальных функций и функций Хаара приведены на Рис. 33. Примеры иконостасов для цветных преобразований показаны на рис. 34.

### 3.5.2. Цветные вейвлет-преобразования

Пусть  $\psi^R(x)$  – реально-значная материнская вейвлет-функция (всплеск), а  $\psi_{s,\tau}^R(x)$  – ее сдвинутые и масштабированные версии:

$$\psi_{s,\tau}^R(x) = (\sqrt{|s|})^{-1} \psi^R((x-\tau)/s), \quad s, \tau \in R, s \neq 0.$$

Они формируют ортогональный базис пространства  $L_2(R)$ . Построим цветные всплески как агрегат из яркостной и хроматической составляющих. В качестве первой используем реально-значный всплеск  $\psi^R(x)$ . Хроматическую составляющую определим как аналитический комплексно-значный сигнал следующего вида:

$$\psi_{s,\tau}^{Ch}(x) = \psi_{s,\tau}^R(x) + jH_1\{\psi_{s,\tau}^R(x)\}.$$

где  $H_1\{\cdot\}$  – суть одномерное преобразование Гильберта. Используя идемпотенты  $e_{lu}, E_{Ch}$ , построим цветные базисные всплески

$$\begin{aligned} \psi_{s,\tau}^{Col}(x) &= \varphi_{s,\tau}^{lu}(x) \cdot e_{lu} + \psi_{s,\tau}^{Ch}(x) \cdot E_{Ch} = \varphi_{s,\tau}^{lu}(x) \cdot e_{lu} + [\varphi_{s,\tau}^{lu}(x) + j\mathcal{H}\{\varphi_{s,\tau}^{lu}(x)\}] \cdot E_{Ch} = \\ &= \varphi_{s,\tau}^{lu}(x) \cdot [e_{lu} + E_{Ch}] + j\mathcal{H}\{\varphi_{s,\tau}^{lu}(x)\} \cdot E_{Ch} = \varphi_{s,\tau}^{lu}(x) + j\mathcal{H}\{\varphi_{s,\tau}^{lu}(x)\} \cdot E_{Ch}, \end{aligned}$$

где  $\varphi_{s,\tau}^{lu}(x) = \varphi_{s,\tau}^R(x)$  – реально-значная (яркостная) компонента всплеска и  $\psi_{s,\tau}^{Ch}(x)$  – его комплексно-значная (хроматическая) составляющая. Очевидно, аналитические функции двух переменных

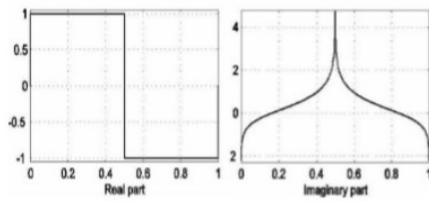
$$\begin{aligned} \psi_{s_1,\tau_1}^{Col}(x) \psi_{s_2,\tau_2}^{Col}(y) &= \\ &= \varphi_{s_1,\tau_1}^{lu}(x) \varphi_{s_2,\tau_2}^{lu}(y) \cdot e_{lu} + [\varphi_{s_1,\tau_1}^{lu}(x) \varphi_{s_2,\tau_2}^{lu}(y) + j\mathcal{H}_2\{\varphi_{s_1,\tau_1}^{lu}(x) \varphi_{s_2,\tau_2}^{lu}(y)\}] \cdot E_{Ch} \\ &= \varphi_{s_1,\tau_1}^{lu}(x) \varphi_{s_2,\tau_2}^{lu}(y) + j\mathcal{H}_2\{\varphi_{s_1,\tau_1}^{lu}(x) \varphi_{s_2,\tau_2}^{lu}(y)\} \cdot E_{Ch}, \end{aligned}$$

формируют двумерные всплески, где  $H_2$  – суть двумерное преобразование Гильберта. Мы определяем двумерное цветное (орто-унитарное) вейвлетпреобразование как

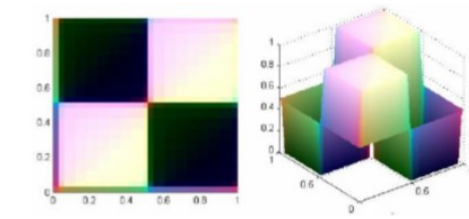
$$F_{COU}^{col}(s_1, \tau_1, s_2, \tau_2) = \left( \sqrt{|s_1| |s_2|} \right)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}_{col}(x, y) \psi_{s_1,\tau_1}^{Col}(x) \psi_{s_2,\tau_2}^{Col}(y) dx dy.$$

Примеры цветных всплесков и их составляющих приведены на Рис 35.

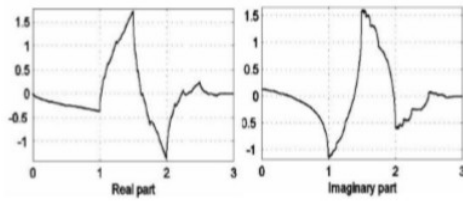




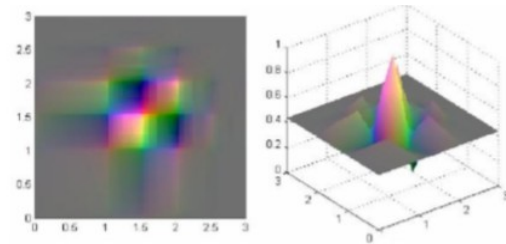
Реальная и мнимая части  
 1-D всплеска Хаара



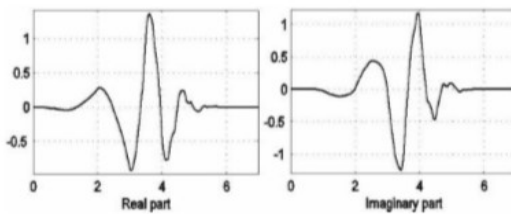
Хроматическая составляющая (слева) и цвет-  
 ной 2-D всплеск Хаара



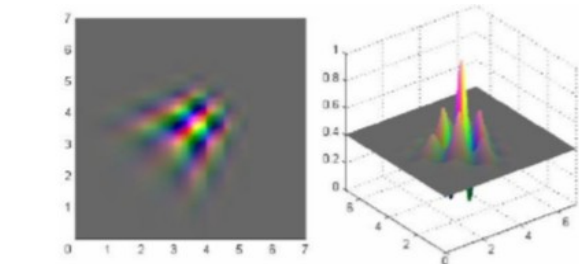
Реальная и мнимая части  
 1-D всплеска Добюши-2



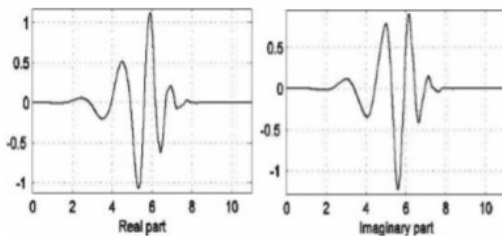
Хроматическая составляющая (слева) и цвет-  
 ной 2-D всплеск Добюши-2



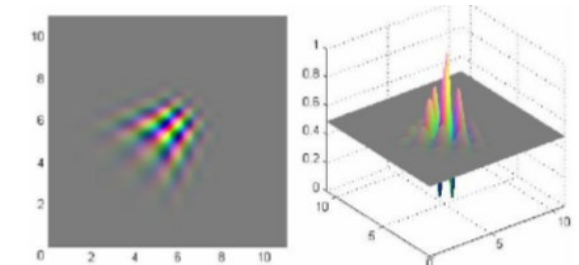
Реальная и мнимая части  
 1-D всплеска Добюши-4



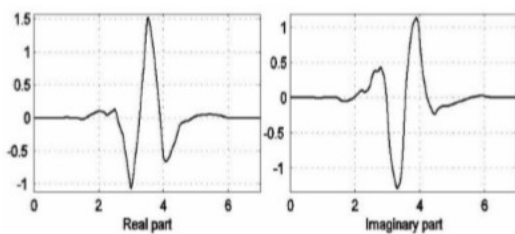
Хроматическая составляющая (слева) и цвет-  
 ной 2-D всплеск Добюши-4



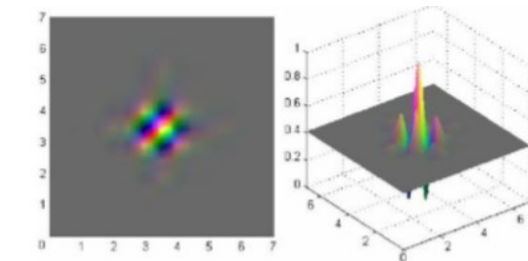
Реальная и мнимая части  
 1-D всплеска Добюши-6



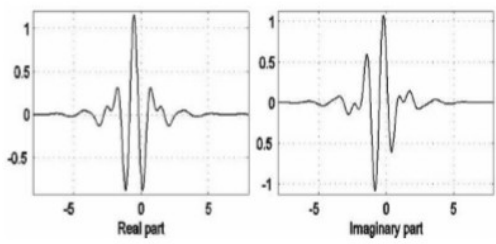
Хроматическая составляющая (слева) и цвет-  
 ной 2-D всплеск Добюши-6



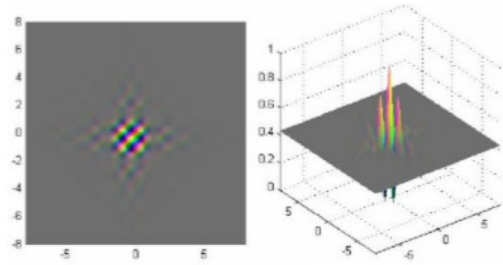
Реальная и мнимая части  
 1-D всплеска Symlet-4



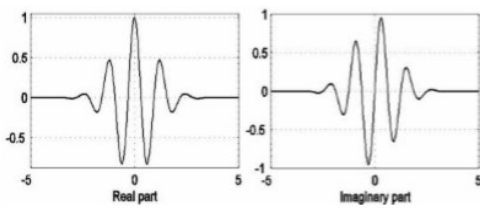
Хроматическая составляющая (слева) и цвет-  
 ной 2-D всплеск Symlet-4



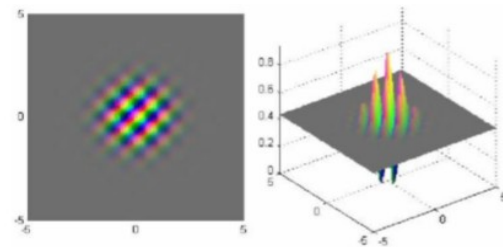
Реальная и мнимая части  
1-D всплеска Мейера (Meyer)



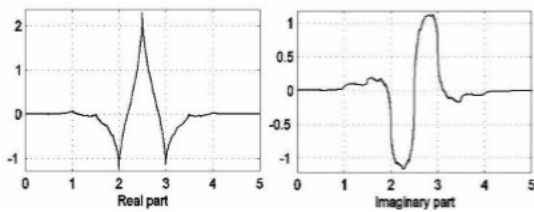
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Мейера



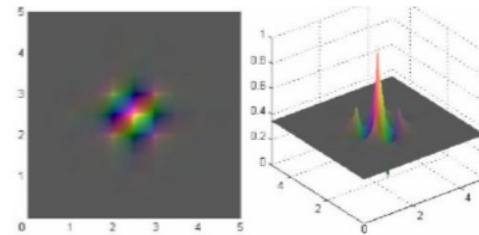
Реальная и мнимая части  
1-D всплеска Морлета (Morlet)



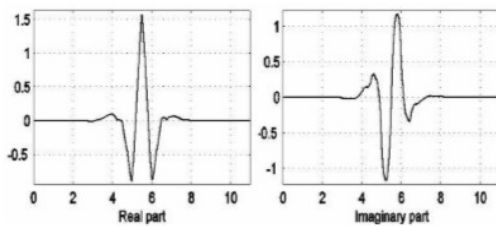
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Мейера



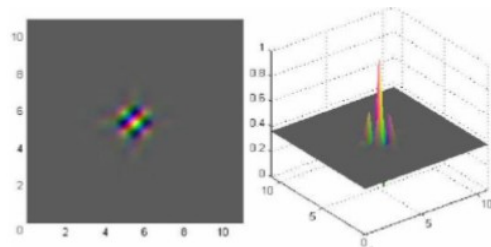
Реальная и мнимая части  
1-D всплеска Koif-1



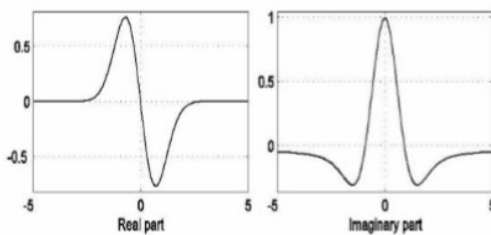
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Koif-1



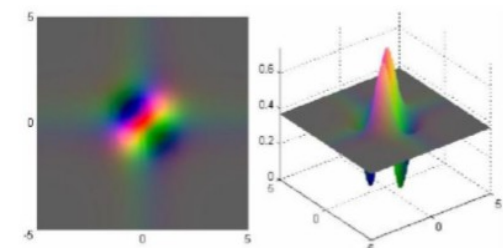
Реальная и мнимая части  
1-D всплеска Koif-2



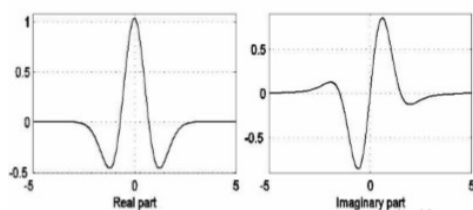
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Koif-2



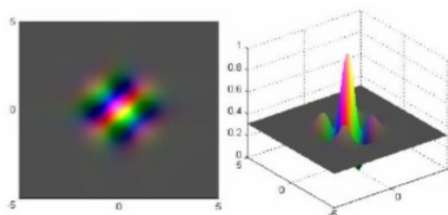
Реальная и мнимая части  
1-D всплеска Гаусса-1



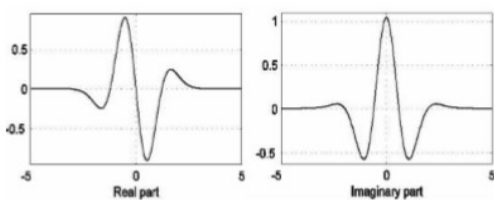
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Гаусса-1



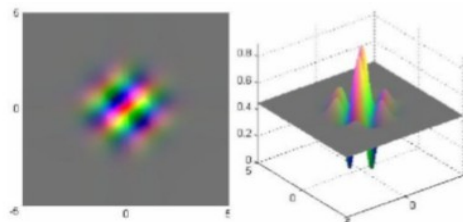
Реальная и мнимая части  
 1-D всплеска Гаусса-2



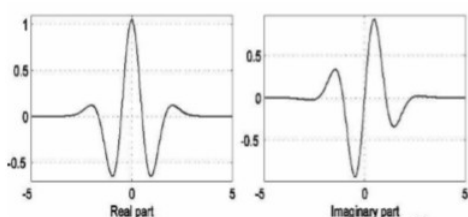
Хроматическая составляющая (слева) и цвет-  
 ной 2-D всплеск Гаусса-2



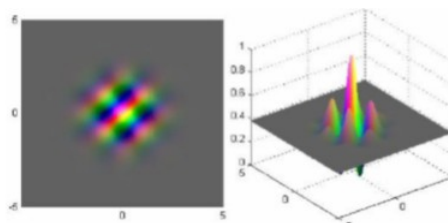
Реальная и мнимая части  
 1-D всплеска Гаусса-3



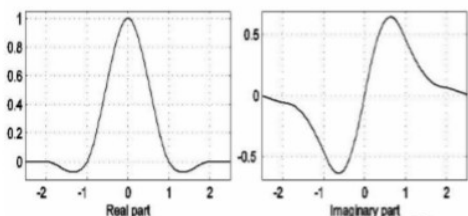
Хроматическая составляющая (слева) и цвет-  
 ной 2-D всплеск Гаусса-3



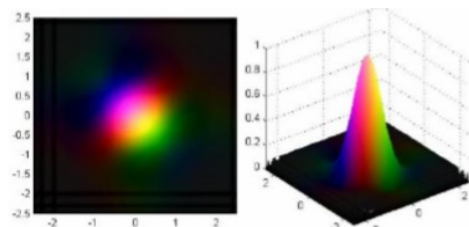
Реальная и мнимая части  
 1-D всплеска Гаусса-4



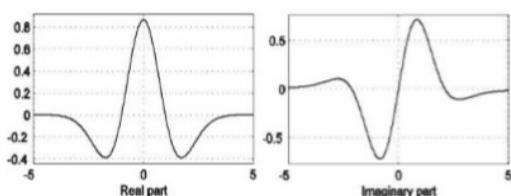
Хроматическая составляющая (слева) и цвет-  
 ной 2-D всплеск Гаусса-4



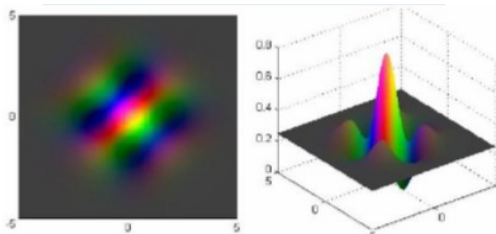
Реальная и мнимая части  
 1-D всплеска Кейса (Keys)



Хроматическая составляющая (слева) и цвет-  
 ной 2-D всплеск Кейса



Реальная и мнимая части  
 1-D всплеска MexicanHat



Хроматическая составляющая (слева) и цвет-  
 ной 2-D всплеск MexicanHat

Рис 35. Слева направо: примеры реальной и мнимой частей 1-D серых всплесков, построенные на их основе хроматические 2-D составляющие и соответствующие им цветные 2-D всплески

### 3.5.3. Цветные сплайны

Подобно цветным всплескам, можно построит цветные сплайны. Пусть  $Spl(x)$  - реально-значный сплайн. Цветной сплайн - суть триплетно-значная функция:

$$\begin{aligned}
 Spl^{Col}(x) &= Spl(x) \cdot \mathbf{e}_{lu} + [Spl(x) + j\mathcal{H}\{Spl(x)\}] \cdot \mathbf{E}_{Ch} = \\
 &= Spl(x) \cdot [\mathbf{e}_{lu} + \mathbf{E}_{Ch}] + j\mathcal{H}\{Spl(x)\} \cdot \mathbf{E}_{Ch} = Spl(x) \cdot \mathbf{I}_3 + j\mathcal{H}\{Spl(x)\} \cdot \mathbf{E}_{Ch}.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Пусть к примеру  $Spl(x) \equiv BSpl(x)$  произвольный  $B$ -сплайн, который строится с помощью итерационной свёртки прямоугольного импульса:

где \* - свёртка, имеет след

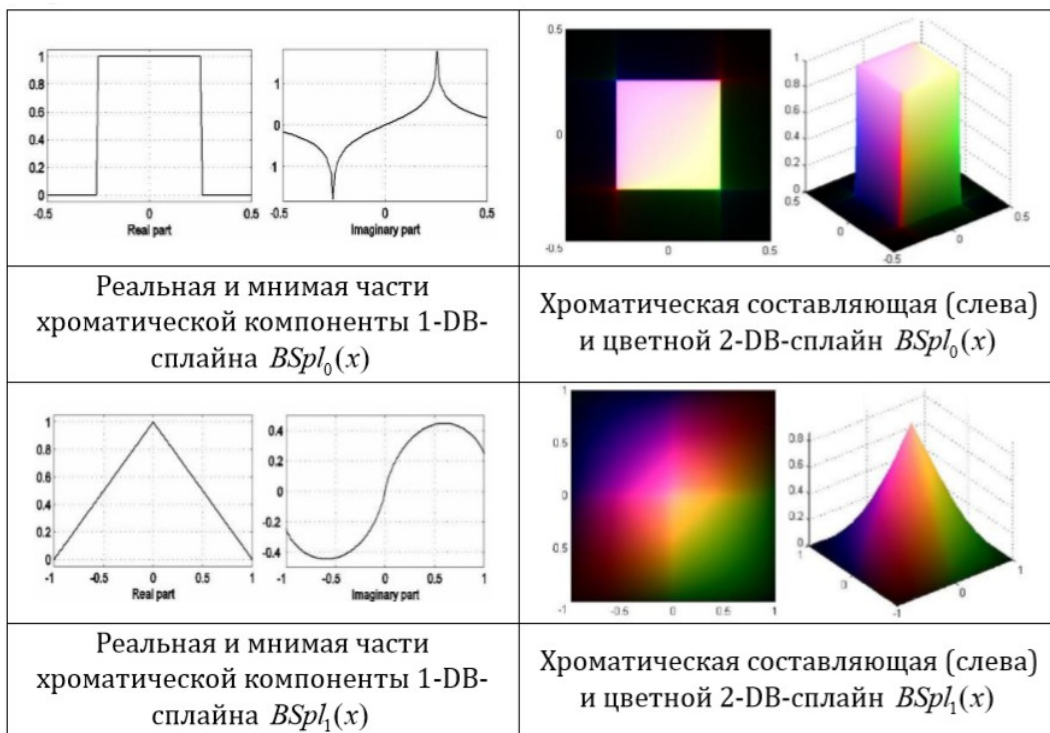
$$BSpl_0(x) = \begin{cases} 1, & -1/2 < x < 1/2, \\ 1/2, & |x| = 1/2, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{by } BSpl_n(x) = (BSpl_{n-1} * BSpl_0)(x) \quad \text{ИН}$$

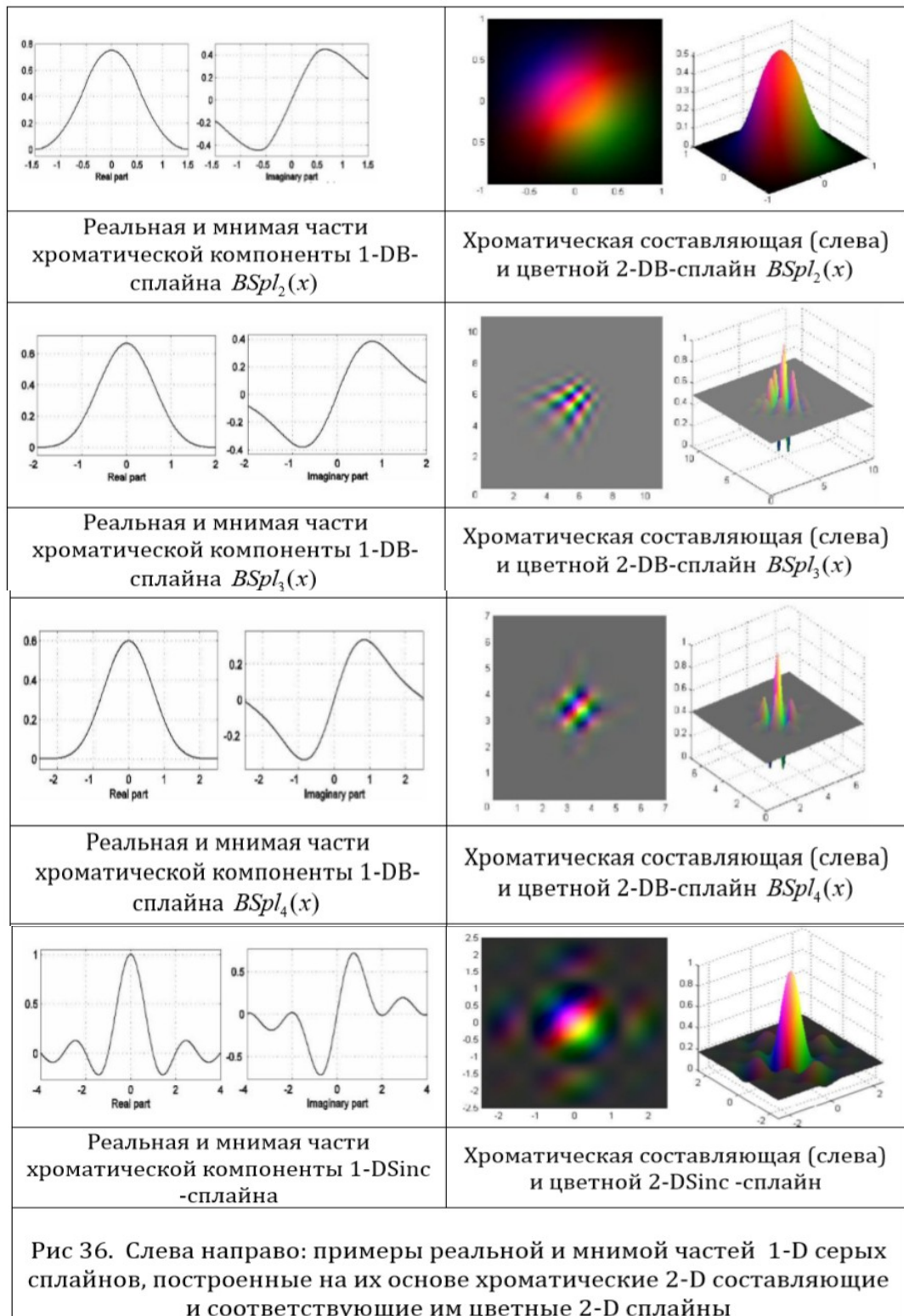
Очевидно, следующие функции

$$BSpl_n^{Col}(x) \cdot BSpl_n^{Col}(y) = BSpl_n(x) \cdot BSpl_n(y) \cdot \mathbf{I}_3 + j\mathcal{H}_2\{BSpl_n(x) \cdot BSpl_n(y)\} \cdot \mathbf{E}_{Ch},$$

представляют двумерные сплайны. В качестве примера на Рис.36 приведены некоторые цветные сплайны.

$$BSpl_n^{Col}(x) = BSpl_n(x) \cdot \mathbf{I}_3 + j\mathcal{H}\{BSpl_n(x)\} \cdot \mathbf{E}_{Ch}.$$





#### 4. Алгебраические модели 3D и 4D изображений

##### 4.1. Исторические замечания

Геометрическая интерпретация комплексных чисел с помощью точек обычной двумерной плоскости сыграла исключительную роль в разрушении мистики вокруг этих чисел в XVIII веке, когда Лейбниц называл их *the marvel of analysis, the monster of ideas world, almost amphibian between existence and non-existence*. В противоположность этому кватернионы с самого начала их создания были связаны с насущными задачами алгебры и геометрии. Когда было окончательно выяснено, что трехмерные алгебры (триплетные алгебры) обладают делителями нуля, Гамильтон решил попытаться найти экзотические числа в четырехмерных пространствах, которые обладали бы всеми свойствами вещественных и комплексных чисел. Такие обобщения комплексных чисел Гамильтон назвал кватернионами (по латыни *quaternus* – четырехкратный). Гамильтон опубликовал свои исследования в работах [47-49]. Современное изложение теории можно найти в работах [50-55]. Введем кватернионную алгебру, следуя подходу Гамильтона. Для начала рассмотрим числа формы  $r+xi+yj+zk$  с  $i^2 = j^2 = -1$ , которые будут формировать трехмерное пространство подобно тому, как комплексные числа формируют двумерную плоскость.

Факт существования нормы комплексного числа  $z\bar{z} = x^2 + y^2$  заставляет ввести ее обобщение для новых трехмерных комплексных чисел по правилу  $r\bar{r} = (x+yi+zj)(x+yi+zj) = x^2 + y^2 + z^2 - (ij+ji)yz$ . Для того, чтобы это число оказалось вещественным, необходимо постулировать антикоммутативность правила умножения мнимых единиц, а именно  $ij = -ji$ . Обратим внимание на тот факт, что имея в своем распоряжении только две мнимые единицы, мы не в состоянии построить нового числового поля, потому что из предположений  $ij = a_0 + a_1i + a_2j$  и  $ji = b_0 + b_1i + b_2j$  и  $ji = -ij$ , следует, что  $a_0 = a_1 = a_2 = 0, b_0 = b_1 = b_2 = 0$ . Поэтому необходимо ввести третью мнимую единицу такую, что  $k \neq i \neq j$  со свойством  $k = ij = -ji$ . Эта новая некоммутативная числовая система характеризуется следовательно тремя мнимыми единицами  $i, j, k$ , которые удовлетворяют следующим правилам умножения  $i^2 = j^2 = k^2 = ij = -1$ . Числа формы  $q = t+xi+yj+zk$ , где  $t, x, y, z \in R$ , называются кватернионами. Они формируют 4-D алгебру

$$Alg_4^{Sp(0,0,3)}(R|i, j, k) := R + Ri + Rj + Rk = \{q = t + xi + yj + zk | t, x, y, z \in R\}, \quad (43)$$

над полем вещественных чисел  $R$ , натянутую на 4 мнимые единицы  $1, i, j, k$ .

Числовая  $w$  и векторная  $\vec{r} = xi + yj + zk$  составляющие были названы Гамильтоном скалярной и векторной частями кватерниона, соответственно.

Теперь эти компоненты обозначаются так  $w := Sc(q)$  и  $\vec{r} = xi + yj + zk := Vec(q)$ .

Следовательно, согласно Гамильтону каждый кватернион является суммой скалярного числа и вектора  $q = w + \vec{r}$ , где  $w := Sc(q)$  и  $\vec{r}q = Vec(q) \in R^3$ .

Сложение и вычитание двух векторов  $\vec{r}_1 = x_1i + y_1j + z_1k$  и  $\vec{r}_2 = x_2i + y_2j + z_2k$  определяется так

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 &= (x_1i + y_1j + z_1k) \pm (x_2i + y_2j + z_2k) = \\ &= (x_1 \pm x_2)i + (y_1 \pm y_2)j + (z_1 \pm z_2)k. \end{aligned}$$

Их произведение дает кватернион общего вида

$$\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = -(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2],$$

скалярную часть которого  $Sc(q) = Sc(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = -(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  Гамильтон назвал скалярным произведением векторов  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ , а векторную часть

$Vec(q) = Vec(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$  – векторным произведением этих векторов (заметим, что определение скалярного произведения по Гамильтону отличается от современного определения только знаком, хотя векторное произведение – то же самое). В частности,  $u^2 = -(u, u) + [u_1 \times u_2] = -(u, u) = -1$  для векторов с единичной нормой  $\|u\| = 1$ . Это означает, что, если в классической теории комплексных чисел существует только два различных корня квадратных из минус единицы ( $+i$  и  $-i$ ) и они отличаются друг от друга только знаком, то в кватернионной теории существует бесконечно много квадратных корней из минус единицы и все они расположены на поверхности сферы единичного радиуса

$$\mathbf{u} = (u_x i + u_y j + u_z k) = (\cos \varphi \cdot i + \sin \varphi \cos \theta \cdot j + \sin \varphi \sin \theta \cdot k).$$

Для них  $u^2 = -1$  и  $u$  будучи точкой на единичной сфере имеют следующие координаты  $u = (u_x, u_y, u_z) = (\cos \varphi, \sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta)$ .

Произведение кватернионов общей формы Гамильтон определил следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 &= (w_1 + \vec{r}_1) \cdot (w_2 + \vec{r}_2) = w_1 w_2 + w_2 \vec{r}_1 + w_1 \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \\ &= [w_1 w_2 - (\vec{r}_1, \vec{r}_2)] + [w_2 \vec{r}_1 + w_1 \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2], \end{aligned}$$

где

$$Sc(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) = [w_1 w_2 - (\vec{r}_1, \vec{r}_2)], Vec(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) = [w_2 \vec{r}_1 + w_1 \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2].$$

Стандартное определение сопряжения таково  $q = w - xi - yj - zk$ . Легко проверить, что

$$\overline{\mathbf{q} + \mathbf{p}} = \overline{\mathbf{p}} + \overline{\mathbf{q}}, \quad \overline{\mathbf{qp}} = \overline{\mathbf{q}}\overline{\mathbf{p}}, \quad \overline{\overline{\mathbf{qp}}} = \mathbf{qp}.$$

Самосопряженные кватернионы ( $\overline{q} = q$ ) принадлежат полю реальных чисел, а произведение  $\overline{q}q$  эквивалентно

**Определение 17.** Квадратичная форма

$$\overline{\mathbf{q}}\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\|^2 = w_0^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

$$N(q) = \overline{q}q = \|\mathbf{q}\|^2 = w_0^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

называется нормой кватерниона  $q$ .

Она для ненулевых кватернионов может принимать только положительные значения. Легко проверить, что  $N(qp) = N(pq) = N(q)N(p)$ . Действительно,  $qp\bar{q}\bar{p} = q\bar{p}\bar{q}p = q\|p\|\bar{q} = \|p\|q\bar{q} = \|p\|\|q\|$ .

**Определение 18.** Квадратный корень из произведения  $q\bar{q}$  называется модулем кватерниона  $q$  и обозначается как  $|q| = \sqrt{N(q)} = \sqrt{\bar{q}q}$  или коротко как  $|q|$ , если это не вызывает недоразумений.

Заметим, что  $\|1\| = 1, \|i\| = \|j\| = \|k\| = 1$ . Каждый кватернион  $q \neq 0$  имеет обратный относительно умножения  $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$ . Следующие равенства верны:  $(pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1}, qq^{-1} = q^{-1}q = 1$ .

Каждый единичный кватернион имеет следующую форму:

$$q = \cos \varphi + u \sin \varphi \quad (44)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} N(q) = q\bar{q} &= (\cos \varphi + u \cdot \sin \varphi) \overline{(\cos \varphi + u \cdot \sin \varphi)} = \\ &= (\cos^2 \varphi - u^2 \cdot \sin^2 \varphi) = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1. \end{aligned}$$

Это означает, что аналог формулы Эйлера  $q = \cos \varphi + u \sin \varphi$  имеет место и для кватернионов.

**Теорема 9.** Преобразования

$$r' = \exp(\vec{u} \varphi / 2) \cdot r \cdot \exp(-\vec{u} \varphi / 2) \quad (45)$$

представляют собой вращения трехмерного Евклидова пространства вокруг чисто векторного кватерниона  $\vec{u}$  на угол  $\varphi$ .

Гамильтон также рассматривал частные от деления двух векторов; нетрудно видеть, что

$$\frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{r}_2} = \frac{|\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2|} (\cos \varphi + \mathbf{u} \cdot \sin \varphi) \quad \text{т.е.} \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \frac{|\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2|} (\cos \varphi + \mathbf{u} \cdot \sin \varphi),$$

где  $\varphi$  - угол между векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , а  $\mathbf{u}$  есть вектор единичного модуля, перпендикулярный к  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , то есть

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|} [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2].$$

Это означает, что частное от деления вектора  $\mathbf{r}_1$  на вектор  $\mathbf{r}_2$  является следующим кватернионом

$$q = \frac{|\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2|} (\cos \varphi + \mathbf{u} \cdot \sin \varphi) = \frac{|\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2|} \left( \cos \varphi + \frac{1}{|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|} [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2] \cdot \sin \varphi \right),$$

И этот кватернион можно рассматривать как оператор, преобразующий вектор  $\mathbf{r}_1$  в  $\mathbf{r}_2$



$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \frac{|\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2|} \left( \cos \varphi + \frac{1}{|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|} [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2] \cdot \sin \varphi \right).$$

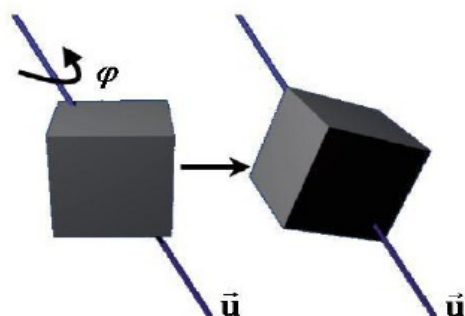


Рис. 37. Вращения трехмерного Евклидова физического пространства вокруг чисто векторного кватерниона  $\mathbf{u}$  на угол  $\varphi$ .

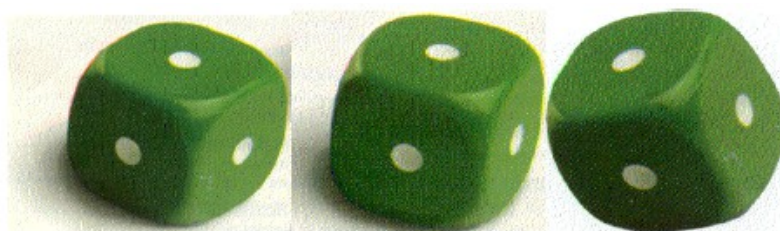


Рис. 38. Евклидовы вращения 3D цветных изображений

Кватернионы, сконструированные Гамильтоном, формируют четырехмерную пространственную алгебру

$$Alg_4^{Sp(0,0,3)}(\mathbf{R} | i, j, k) := \mathbf{R} + \mathbf{R}i + \mathbf{R}j + \mathbf{R}k = \{ \mathbf{q} = t + xi + yj + zk | t, x, y, z \in \mathbf{R} \},$$

натянутую на  $1, i, j, k$ , где  $k = ij$ . Напомним, что следующие равенства верны для этих единиц  $i^2 = j^2 = k^2 = ji = -1$  и  $ij = -ji, ik = -ki$ .

#### 4.2. Обобщенные кватернионные алгебры 4D физического пространства

Напомним, что обобщенные комплексные числа  $z = (x + Iy)$  формируют двумерную алгебру

$$Alg_2^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R} | I) := \mathbf{R} + \mathbf{R}I = \{ \mathbf{z} = x + Iy | x, y \in \mathbf{R} \},$$

натянутую на реальную и мнимую единицы  $1, I$ , со свойством  $I^2 \in \{-1, 0, +1\}$ . В первом случае, как мы знаем,  $(I^2 = (i^-)^2 = -1)$  алгебра формирует поле комплексных чисел и соответствующую ей 2-D геометрию Евклида, во втором  $(I^2 = (i^0)^2 = 0)$  она является алгеброй дуальных чисел с геометрией Галилея и в третьем случае она  $(I^2 = (i^+)^2 = +1)$  – суть алгебра двойных чисел с геометрией Минковского. Для дальнейшего удобно обозначить эти алгебры так

$$\begin{aligned} \text{Alg}_2^{\text{Sp}(0,0,1)}(\mathbf{R} | I_-) &:= \mathbf{R} + \mathbf{R}I_-, \\ \text{Alg}_2^{\text{Sp}(1,0,0)}(\mathbf{R} | I_+) &:= \mathbf{R} + \mathbf{R}I_+, \quad \text{Alg}_2^{\text{Sp}(0,1,0)}(\mathbf{R} | I_0) := \mathbf{R} + \mathbf{R}I_0. \end{aligned}$$

Мы видим, что в двумерном случае, метрические свойства алгебр зависят от типа мнимой единицы. Естественно возникает идея перейти в кватернионах Гамильтона мнимые единицы  $i, j, k$  со свойством  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ . С целью обобщения кватернионов Гамильтона можно положить  $i^2 = j^2 = k^2 = \delta \in \{-1, 0, +1\}$ . Здесь два последних значения 0 и +1 приводят к неклассическим кватернионам. Вводя обозначения  $I_1, I_2, K = I_1 I_2$  для новых гипермнимых единиц со свойствами  $I_1^2 = \delta_1, I_2^2 = \delta_2, (I_1 I_2)^2 = -\delta_1 \delta_2$ , получаем девять алгебр обобщенных кватернионов

$$\begin{aligned} \text{Alg}_4^{\text{Sp}(0,0,3)}(\mathbf{R} | I_1^-, I_2^-, I_1^- I_2^-) &:= \{ \mathbf{q} = x_0 \mathbf{1} + x_1 I_1^- + x_2 I_2^- + x_3 I_1^- I_2^- \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \}, \\ \text{Alg}_4^{\text{Sp}(0,2,1)}(\mathbf{R} | I_1^-, I_2^0, I_1^- I_2^0) &:= \{ \mathbf{q} = x_0 \mathbf{1} + x_1 I_1^- + x_2 I_2^0 + x_3 I_1^- I_2^0 \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \}, \\ \text{Alg}_4^{\text{Sp}(2,0,1)}(\mathbf{R} | I_1^-, I_2^+, I_1^- I_2^+) &:= \{ \mathbf{q} = x_0 \mathbf{1} + x_1 I_1^- + x_2 I_2^+ + x_3 I_1^- I_2^+ \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \}, \\ \text{Alg}_4^{\text{Sp}(0,2,1)}(\mathbf{R} | I_1^0, I_2^-, I_1^0 I_2^-) &:= \{ \mathbf{q} = x_0 \mathbf{1} + x_1 I_1^0 + x_2 I_2^- + x_3 I_1^0 I_2^- \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \}, \\ \text{Alg}_4^{\text{Sp}(0,3,0)}(\mathbf{R} | I_1^0, I_2^0, I_1^0 I_2^0) &:= \{ \mathbf{q} = x_0 \mathbf{1} + x_1 I_1^0 + x_2 I_2^0 + x_3 I_1^0 I_2^0 \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \}, \\ \text{Alg}_4^{\text{Sp}(1,2,0)}(\mathbf{R} | I_1^0, I_2^+, I_1^0 I_2^+) &:= \{ \mathbf{q} = x_0 \mathbf{1} + x_1 I_1^0 + x_2 I_2^+ + x_3 I_1^0 I_2^+ \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \}, \\ \text{Alg}_4^{\text{Sp}(2,0,1)}(\mathbf{R} | I_1^+, I_2^-, I_1^+ I_2^-) &:= \{ \mathbf{q} = x_0 \mathbf{1} + x_1 I_1^+ + x_2 I_2^- + x_3 I_1^+ I_2^- \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \}, \\ \text{Alg}_4^{\text{Sp}(1,2,0)}(\mathbf{R} | I_1^+, I_2^0, I_1^+ I_2^0) &:= \{ \mathbf{q} = x_0 \mathbf{1} + x_1 I_1^+ + x_2 I_2^0 + x_3 I_1^+ I_2^0 \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \}, \\ \text{Alg}_4^{\text{Sp}(3,0,0)}(\mathbf{R} | I_1^+, I_2^+, I_1^+ I_2^+) &:= \{ \mathbf{q} = x_0 \mathbf{1} + x_1 I_1^+ + x_2 I_2^+ + x_3 I_1^+ I_2^+ \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \}, \end{aligned}$$

в зависимости от того, какие из трех возможностей  $I_1^2 = \delta_1 \in \{+1, 0, -1\}$  и  $I_2^2 = \delta_2 \in \{+1, 0, -1\}$  реализуются для каждой из двух гипермнимых единиц  $I_1$  и  $I_2$ . Эти обобщенные кватернионные алгебры были предложены Клиффордом [56]. Каждый кватернион имеет уникальное скалярно-векторное представление в следующей форме  $\mathbf{q} = t + (x I_1 + y I_2 + z I_3) = t + \vec{r} = \text{Sc}(\mathbf{q}) + \text{Vec}(\mathbf{q})$ , где  $t, x, y, z \in \mathbf{R}$  - реальные числа, а  $t = \text{Sc}(\mathbf{q})$  и  $\vec{r} = \text{Vec}(\mathbf{q}) = x I_1 + y I_2 + z I_1 I_2$  - суть скалярная и векторная части кватерниона  $\mathbf{q}$  [56].

Правило перемножения мнимых единиц даётся следующей таблицей:

Сложение, вычитание и произведение двух обобщенных кватернионов  $\mathbf{q}_1 = t_1 + x_1 I_1 + y_1 I_2 + z_1 I_1 I_2$  и  $\mathbf{q}_2 = t_2 + x_2 I_1 + y_2 I_2 + z_2 I_1 I_2$  определяется так

·	1	$I_1$	$I_2$	$I_1I_2$
1	1	$I_1$	$I_2$	$I_1I_2$
$I_1$	$I_1$	$\delta_1$	$I_1I_2$	$\delta_1I_2$
$I_2$	$I_2$	$-I_1I_2$	$\delta_2$	$-\delta_2I_1$
$I_1I_2$	$I_1I_2$	$-\delta_1I_2$	$\delta_2I_1$	$\delta_1\delta_2$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 \pm \mathbf{q}_2 &= (t_1 + x_1I_1 + y_1I_2 + z_1I_1I_2) \pm (t_2 + x_2I_1 + y_2I_2 + z_2I_1I_2) = \\ &= (t_1 + t_2) + (x_1 + x_2)I_1 + (y_1 + y_2)I_2 + (z_1 + z_2)I_1I_2 = \\ &= (Sc(\mathbf{q}_1) \pm Sc(\mathbf{q}_2)) + (Vec(\mathbf{q}_1) \pm Vec(\mathbf{q}_2)) = (t_1 \pm t_2) + (\bar{\mathbf{r}}_1 \pm \bar{\mathbf{r}}_2), \\ \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 &= (t_1 + \bar{\mathbf{r}}_1) \cdot (t_2 + \bar{\mathbf{r}}_2) = [t_1t_2 - (\bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2)] + [t_2\bar{\mathbf{r}}_1 + t_1\bar{\mathbf{r}}_2 + \bar{\mathbf{r}}_1 \times \bar{\mathbf{r}}_2], \end{aligned}$$

где

$$\bar{\mathbf{r}}_1 \cdot \bar{\mathbf{r}}_2 = -(\bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2) + \bar{\mathbf{r}}_1 \times \bar{\mathbf{r}}_2$$

и

$$(\bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2) := x_1x_2\delta_1 + y_1y_2\delta_2 + z_1z_2\delta_1\delta_2 = (x_1, y_1, z_1) \begin{bmatrix} \delta_1 & & \\ & \delta_2 & \\ & & \delta_1\delta_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_1 \times \bar{\mathbf{r}}_2 &:= -\delta_1I_1(y_1z_2 - z_1y_2) + \delta_2I_2(x_1z_2 - z_1x_2) + \delta_2\delta_1I_1I_2(x_1y_2 - y_1x_2) = \\ &= \det \begin{bmatrix} -\delta_1I_1 & -\delta_2I_2 & \delta_2\delta_1I_1I_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для чисто векторных кватернионов имеем

$$\bar{\mathbf{r}}^2 = \bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{r}} = -(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{r}}) = -\|\bar{\mathbf{r}}\|^2 = -(x^2\delta_1 + y^2\delta_2 + z^2\delta_1\delta_2).$$

Интересно, что если  $\|\bar{\mathbf{r}}\|^2 = 1$ , то  $\bar{\mathbf{r}}^2 = -1$ . Такие кватернионы подобны мнимой единице  $I$ , для которой  $(I)^2 = -1$ . В алгебре  $Alg_4^{Sp(p,q,r)}(I_1, I_2, I_1I_2)$  можно определить уникальное сопряжение

$$\bar{\mathbf{q}} = \overline{(x_0 + x_1I_1 + x_2I_2 + x_3I_1I_2)} := x_0 - x_1I_1 - x_2I_2 - x_3I_1I_2.$$

Легко проверить, что  $\mathbf{q} + \mathbf{p} = \mathbf{q} + \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{q}\bar{\mathbf{p}}$ .

Самосопряженные кватернионы ( $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$ ) принадлежат полю комплексных чисел, а произведение  $\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}$  эквивалентно

$$\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\|_{\delta_1, \delta_2}^2 = x_0^2 - I_1^2x_1^2 - x_2^2I_2^2 + x_3^2I_1^2I_2^2 = x_0^2 - \delta_1x_1^2 - x_2^2\delta_2 + x_3^2\delta_1\delta_2.$$

**Определение 19.** Квадратичная форма

$$N_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\|_{\delta_1, \delta_2}^2 = x_0^2 - I_1^2 x_1^2 - x_2^2 I_2^2 + x_3^2 I_1^2 I_2^2 = x_0^2 - \delta_1 x_1^2 - x_2^2 \delta_2 + x_3^2 \delta_1 \delta_2.$$

называется псевдонормой обобщенного кватерниона  $\bar{\mathbf{q}}$ .

Она может принимать положительные и отрицательные значения. Легко проверить, что  $N_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{q}\mathbf{p}) = N_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{p}\mathbf{q}) = N_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{q}) N_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{p})$ . Действительно,

$$\overline{\mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{q}\mathbf{p}}\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}} = \mathbf{q}\|\mathbf{p}\|_{\delta_1, \delta_2} \bar{\mathbf{q}} = \|\mathbf{p}\|_{\delta_1, \delta_2} \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = \|\mathbf{p}\|_{\delta_1, \delta_2} \|\mathbf{q}\|_{\delta_1, \delta_2}.$$

**Определение 20.** Арифметическое значение квадратного корня из произведения  $\mathbf{q}\mathbf{q}$  называется модулем обобщенного кватерниона  $\mathbf{q}$  и обозначается как

$$|\mathbf{q}|_{\delta_1, \delta_2} = \sqrt{N_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{q})} = \sqrt{\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}}$$

или коротко как  $|\mathbf{q}|_{\delta_1, \delta_2}$ , если это не вызывает недоразумений.

Заметим, что  $\|1\|_{\delta_1, \delta_2} = 1, \|I_1\|_{\delta_1, \delta_2} = -\delta_1, \|I_2\|_{\delta_1, \delta_2} = \delta_2, \|I_1 I_2\|_{\delta_1, \delta_2} = \delta_1 \delta_2$ .

Каждый кватернион  $\mathbf{q} \neq 0$  такой, что  $\|\mathbf{q}\| \neq 0$ , имеет инверсное значение  $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ . Имеют место следующие равенства:  $(\mathbf{p}\mathbf{q})^{-1} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{p}^{-1}, \mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = 1$ , если  $N_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{p}), N_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{q}) \neq 0$ . Кватернионы, у которых  $N_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{p}) = 0$  не имеют инверсного элемента. Если же при этом  $\mathbf{q} \neq 0$ , то такие кватернионы называются делителями нуля.

### 4.3. Кватернионные геометрии 4D физического пространства

Если псевдорасстояние  $\rho_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  между двумя обобщенными кватернионами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  определить как модуль их разности  $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{u} = x_0 + x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2$ :

$$\rho_{\delta_1, \delta_2}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|_{\delta_1, \delta_2} = |\mathbf{u}|_{\delta_1, \delta_2} = \sqrt{x_0^2 - \delta_1 x_1^2 - \delta_2 x_2^2 + \delta_1 \delta_2 x_3^2}$$

то алгебра  $Alg_4^{Sp(p, q, r)}(\mathbf{R}|I_1, I_2, I_1 I_2)$  превращается в четырехмерное псевдометрическое пространство, обозначаемое как  $Geo_4^{Sp(\delta_1, \delta_2)}$ , с сигнатурой  $(s_0 = 1, s_1 = -\delta_1, s_2 = \delta_2, s_3 = \delta_1 \delta_2)$ . Псевдорасстояние может принимать положительные, отрицательные и даже мнимые значения. Естественно, что существует девять пространств со следующими псевдометриками:

$$\begin{aligned}
 Geo_4^{Sp(+1,+1)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(0,0,3)}(\mathbf{R} | I_1^-, I_2^-, I_1^- I_2^-), \rho_{+1,+1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_4^{Sp(0,+1)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(0,2,1)}(\mathbf{R} | I_1^0, I_2^-, I_1^0 I_2^-), \rho_{0,+1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_0^2 + x_2^2} \right\rangle \right\rangle, \tag{39}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Geo_4^{Sp(-1,+1)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(2,0,1)}(\mathbf{R} | I_1^+, I_2^-, I_1^+ I_2^-), \rho_{-1,+1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_4^{Sp(+1,0)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(0,2,1)}(\mathbf{R} | I_1^-, I_2^0, I_1^- I_2^0), \rho_{+1,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_0^2 + x_1^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_4^{Sp(0,0)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(0,3,0)}(\mathbf{R} | I_1^0, I_2^0, I_1^0 I_2^0), \rho_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_0^2} \right\rangle \right\rangle, \tag{40}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Geo_4^{Sp(-1,0)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(1,2,0)}(\mathbf{R} | I_1^+, I_2^0, I_1^+ I_2^0), \rho_{-1,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_0^2 - x_1^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_4^{Sp(+1,-1)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(2,0,1)}(\mathbf{R} | I_1^-, I_2^+, I_1^- I_2^+), \rho_{+1,-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_4^{Sp(0,-1)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(1,2,0)}(\mathbf{R} | I_1^0, I_2^+, I_1^0 I_2^+), \rho_{0,-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_0^2 - x_2^2} \right\rangle \right\rangle, \tag{41} \\
 Geo_4^{Sp(-1,-1)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(3,0,0)}(\mathbf{R} | I_1^+, I_2^+, I_1^+ I_2^+), \rho_{-1,-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2} \right\rangle \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что существует только пять неизоморфных друг другу 4-D геометрий:

$$\begin{aligned}
 Geo_4^{Sp(+1,+1)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(0,0,3)}(\mathbf{R} | I_1^-, I_2^-, I_1^- I_2^-), \rho_{+1,+1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_4^{Sp(+1,-1)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(2,0,1)}(\mathbf{R} | I_1^-, I_2^+, I_1^- I_2^+), \rho_{+1,-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_4^{Sp(+1,0)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(0,2,1)}(\mathbf{R} | I_1^-, I_2^0, I_1^- I_2^0), \rho_{+1,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_0^2 + x_1^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_4^{Sp(-1,0)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(1,2,0)}(\mathbf{R} | I_1^+, I_2^0, I_1^+ I_2^0), \rho_{-1,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_0^2 - x_1^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_4^{Sp(0,0)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(0,3,0)}(\mathbf{R} | I_1^0, I_2^0, I_1^0 I_2^0), \rho_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_0^2} = |x_0| \right\rangle \right\rangle.
 \end{aligned}$$

#### 4.5. Кватернионные геометрии 3D физического пространства

Подпространство чисто векторных кватернионов  $\mathbf{r} = x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2$  является трехмерным физическим пространством  $Geo_3^{Sp(s_1, s_2)} = \mathbf{Vec} \{ Geo_4^{Sp(s_1, s_2)} \}$ . Введенные псевдометрики индуцируют в  $Geo_3^{Sp(s_1, s_2)}$  соответствующие им трехмерные псевдометрики, выражения для которых получаются из (39)-(41) при  $x_0 = 0$ :

$$\begin{aligned}
 Geo_3^{Sp(+1,+1)} &= \left\langle \left\langle \mathbf{Vec} \left\{ Alg_4^{Sp(0,0,3)} \left( \mathbf{R} \mid I_1^-, I_2^-, I_1^- I_2^- \right) \right\}, \rho_{+1,+1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_3^{Sp(+1,0)} &= \left\langle \left\langle \mathbf{Vec} \left\{ Alg_4^{Sp(0,2,1)} \left( \mathbf{R} \mid I_1^0, I_2^-, I_1^0 I_2^- \right) \right\}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_1^2} = |x_1| \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_4^{Sp(-1,+1,-1)} &= \left\langle \left\langle \mathbf{Vec} \left\{ Alg_4^{Sp(2,0,1)} \left( \mathbf{R} \mid I_1^+ I_2^-, I_1^+ I_2^- \right) \right\}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_3^{Sp(+1,0)} &= \left\langle \left\langle \mathbf{Vec} \left\{ Alg_4^{Sp(0,2,1)} \left( \mathbf{R} \mid I_1^-, I_2^0, I_1^- I_2^0 \right) \right\}, \rho_{+1,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_1^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_3^{Sp(0,0)} &= \left\langle \left\langle \mathbf{Vec} \left\{ Alg_4^{Sp(0,3,0)} \left( \mathbf{R} \mid I_1^0, I_2^0, I_1^0 I_2^0 \right) \right\}, \rho_{0,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0 \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_3^{Sp(-1,0)} &= \left\langle \left\langle \mathbf{Vec} \left\{ Alg_4^{Sp(1,2,0)} \left( \mathbf{R} \mid I_1^+, I_2^0, I_1^+ I_2^0 \right) \right\}, \rho_{-1,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{-x_1^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_4^{Sp(+1,-1)} &= \left\langle \left\langle \mathbf{Vec} \left\{ Alg_4^{Sp(2,0,1)} \left( \mathbf{R} \mid I_1^-, I_2^+, I_1^- I_2^+ \right) \right\}, \rho_{+1,-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_4^{Sp(0,-1)} &= \left\langle \left\langle \mathbf{Vec} \left\{ Alg_4^{Sp(1,2,0)} \left( \mathbf{R} \mid I_1^0, I_2^+, I_1^0 I_2^+ \right) \right\}, \rho_{0,-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{-x_2^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_4^{Sp(-1,-1)} &= \left\langle \left\langle \mathbf{Vec} \left\{ Alg_4^{Sp(3,0,0)} \left( \mathbf{R} \mid I_1^+, I_2^+, I_1^+ I_2^+ \right) \right\}, \rho_{-1,-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{-x_1^2 - x_2^2 + x_3^2} \right\rangle \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Существуют только три нетривиальные трехмерные геометрии:

$$\begin{aligned}
 Geo_4^{Sp(+1,+1)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(0,0,3)} \left( \mathbf{R} \mid I_1^-, I_2^-, I_1^- I_2^- \right), \rho_{+1,+1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_4^{Sp(+1,-1)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(2,0,1)} \left( \mathbf{R} \mid I_1^-, I_2^+, I_1^- I_2^+ \right), \rho_{+1,-1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \right\rangle \right\rangle, \\
 Geo_4^{Sp(+1,0)} &= \left\langle \left\langle Alg_4^{Sp(0,2,1)} \left( \mathbf{R} \mid I_1^-, I_2^0, I_1^- I_2^0 \right), \rho_{+1,0}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x_1^2} \right\rangle \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Соответствующие трехмерные метрические пространства формируют трехмерные пространства Евклида, Минковского и Галилея.

**Определение 21.** Преобразования

$$\mathbf{q}' \rightarrow \mathbf{q} + \mathbf{p}, \quad \mathbf{q}' \rightarrow \lambda \mathbf{q}, \quad \bar{\mathbf{r}}' \rightarrow \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{r}' \rightarrow \lambda \mathbf{r},$$

называются *трансляциями* и *масштабными изменениями* 4-D и 3-D геометрий  $Geo_4^{Sp(\delta_1, \delta_2)}$  и  $Geo_3^{Sp(\delta_1, \delta_2)}$ , соответственно. Они формируют группы трансляций  $\text{Tr}(Geo_4^{Sp(\delta_1, \delta_2)})$ ,  $\text{Tr}(Geo_3^{Sp(\delta_1, \delta_2)})$  и группы *масштабных* преобразований.

Как известно [50-51, 56], обобщенные комплексные числа и классические кватернионы единичного модуля имеют следующую форму

$$\mathbf{z} = e^{I\varphi} = \cos \varphi + I \cdot \sin \varphi, \quad \mathbf{q} = e^{\bar{\mathbf{u}}\varphi} = \cos \varphi + \bar{\mathbf{u}} \cdot \sin \varphi,$$

где  $\cos\varphi$ ,  $\sin\varphi$  суть тригонометрические функции соответствующих геометрий. Оказывается, что обобщенные кватернионы единичного модуля могут быть записаны в аналогичной форме

$$\mathbf{q} = e^{\bar{\mathbf{u}}\varphi} = \cos\varphi + \bar{\mathbf{u}} \cdot \sin\varphi$$

где  $\varphi$  - угол вращения вокруг чисто векторного кватерниона  $\bar{\mathbf{u}}$  единичного модуля (здесь  $\|\bar{\mathbf{u}}\| = 1$  и  $\bar{\mathbf{u}}^2 = -1$ ).

**Теорема10.** Преобразования

$$\mathbf{q}' = e^{\bar{\mathbf{u}}_1\varphi_1/2} \mathbf{q}, \quad \mathbf{q}'' = \mathbf{q} e^{-\bar{\mathbf{u}}_2\varphi_2/2}, \quad \mathbf{q}''' = e^{\bar{\mathbf{u}}_1\varphi_1/2} \mathbf{q} e^{-\bar{\mathbf{u}}_2\varphi_2/2} \quad (46)$$

- суть вращения пространства  $Geo_4^{Sp(s_1, s_2)}$  и они формируют группы  $\mathbf{Rot}_L (Geo_4^{Sp(s_1, s_2)})$ ,  $\mathbf{Rot}_R (Geo_4^{Sp(s_1, s_2)})$ ,  $\mathbf{Rot}_{LR} (Geo_4^{Sp(s_1, s_2)})$  левых, правых и двусторонних вращений, соответственно.

*Доказательство.* Действительно,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}'\| &= \|e^{\bar{\mathbf{u}}_1\varphi_1/2} \mathbf{q}\| = \|e^{\bar{\mathbf{u}}_1\varphi_1/2}\| \cdot \|\mathbf{q}\| = \|\mathbf{q}\|, \\ \|\mathbf{q}''\| &= \|\mathbf{q} e^{-\bar{\mathbf{u}}_2\varphi_2/2}\| = \|\mathbf{q}\| \cdot \|e^{-\bar{\mathbf{u}}_2\varphi_2/2}\| = \|\mathbf{q}\|, \\ \|\mathbf{q}'''\| &= \|e^{\bar{\mathbf{u}}_1\varphi_1/2} \mathbf{q} e^{-\bar{\mathbf{u}}_2\varphi_2/2}\| = \|e^{\bar{\mathbf{u}}_1\varphi_1/2}\| \cdot \|\mathbf{q}\| \cdot \|e^{-\bar{\mathbf{u}}_2\varphi_2/2}\| = \|\mathbf{q}\|. \end{aligned}$$

**Теорема11.** Преобразования

$$\mathbf{q}' = e^{\bar{\mathbf{u}}_1\varphi_1/2} \mathbf{q} + \mathbf{p}, \quad \mathbf{q}'' = \mathbf{q} e^{-\bar{\mathbf{u}}_2\varphi_2/2} + \mathbf{p}, \quad \mathbf{q}''' = e^{\bar{\mathbf{u}}_1\varphi_1/2} \mathbf{q} e^{-\bar{\mathbf{u}}_2\varphi_2/2} + \mathbf{p} \quad (47)$$

формируют три группы левых, правых и двусторонних движений

$\mathbf{Mov}_L (Geo_4^{Sp(s_1, s_2)})$ ,  $\mathbf{Mov}_R (Geo_4^{Sp(s_1, s_2)})$ ,  $\mathbf{Mov}_{LR} (Geo_4^{Sp(s_1, s_2)})$ , соответственно.

Если в LRпреобразованиях (46) положить  $\bar{\mathbf{u}}_1 = \bar{\mathbf{u}}_2$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2$ , то получим

$$\begin{aligned} ('x_0 + '\bar{\mathbf{r}}) &= e^{\bar{\mathbf{u}}\varphi/2} (x_0 + \mathbf{r}) e^{-\bar{\mathbf{u}}\varphi/2} = e^{\bar{\mathbf{u}}\varphi/2} x_0 e^{-\bar{\mathbf{u}}\varphi/2} + e^{\bar{\mathbf{u}}\varphi/2} \bar{\mathbf{r}} e^{-\bar{\mathbf{u}}\varphi/2} = \\ &= x_0 + e^{\bar{\mathbf{u}}\varphi/2} \bar{\mathbf{r}} e^{-\bar{\mathbf{u}}\varphi/2}, \end{aligned}$$

где

$$'x_0 = x_0 \in \mathbf{R}_1 \text{ и } '\bar{\mathbf{r}} = e^{\bar{\mathbf{u}}\varphi/2} \bar{\mathbf{r}} e^{-\bar{\mathbf{u}}\varphi/2} \in \mathbf{Vec}\{Alg_4^{Sp(s_1, s_2)}\}.$$

Следовательно, преобразования

$$\bar{\mathbf{r}}' = e^{\bar{\mathbf{u}}\varphi/2} \cdot \bar{\mathbf{r}} \cdot e^{-\bar{\mathbf{u}}\varphi/2} \quad (48)$$

- суть вращения пространства  $Geo_3^{Sp(s_1, s_2)} = \mathbf{Vec}\{Alg_3^{Sp(s_1, s_2)}\}$  вокруг вектора  $\bar{\mathbf{u}}$  в трехмерном пространстве и они формируют группу вращений

**Rot**  $(Geo_3^{Sp(s_1, s_2)})$  . Формула (48) определяет, так называемое, спинорное представление группы **Rot**  $(Geo_3^{Sp(s_1, s_2)})$  .

**Теорема 12** [51]. Каждое движение  $(Geo_3^{Sp(s_1, s_2)})$  -пространства представимо в следующей форме

$$\vec{r}' = e^{\vec{u}\varphi/2} \cdot \vec{r} \cdot e^{-\vec{u}\varphi/2} + \vec{p}.$$

#### 4.6. Алгебраические модели 3D и 4D изображений

С целью построения алгебраических моделей изображений типа

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3): \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{V}_{rgb}^3, & \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3): \mathbf{R}^3 &\rightarrow \mathbf{V}_{Ret}^4, \\ \mathbf{f}(x_0, x_1, x_2, x_3): \mathbf{R}^4 &\rightarrow \mathbf{V}_{rgb}^3, & \mathbf{f}(x_0, x_1, x_2, x_3): \mathbf{R}^4 &\rightarrow \mathbf{V}_{Ret}^4 \end{aligned} \quad (49)$$

мы погружаем физические пространства  $\mathbf{R}^3$  и  $\mathbf{R}^4$  в одну из девяти кватернионных алгебр  $Alg_4^{Sp(p,q,r)}$  ( $\mathbf{R}|1, I_1, I_2, I_3$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^3 &\mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_{2^2}^{Sp(0,0,3)}\}, \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_{2^2}^{Sp(0,2,1)}\}, \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_{2^2}^{Sp(2,0,1)}\}, \\ \mathbf{R}^3 &\mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_{2^2}^{Sp(0,3,0)}\}, \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_{2^2}^{Sp(2,1,0)}\}, \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_{2^2}^{Sp(0,1,2)}\}, \\ \mathbf{R}^3 &\mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_{2^2}^{Sp(3,0,0)}\}, \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_{2^2}^{Sp(1,0,2)}\}, \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_{2^2}^{Sp(1,2,0)}\}, \\ \mathbf{R}^4 &\mapsto Alg_{2^2}^{Sp(0,0,3)}, \mathbf{R}^3 \mapsto Alg_{2^2}^{Sp(0,2,1)}, \mathbf{R}^3 \mapsto Alg_{2^2}^{Sp(2,0,1)}, \\ \mathbf{R}^4 &\mapsto Alg_{2^2}^{Sp(0,3,0)}, \mathbf{R}^3 \mapsto Alg_{2^2}^{Sp(2,1,0)}, \mathbf{R}^3 \mapsto Alg_{2^2}^{Sp(0,1,2)}, \\ \mathbf{R}^4 &\mapsto Alg_{2^2}^{Sp(3,0,0)}, \mathbf{R}^3 \mapsto Alg_{2^2}^{Sp(1,0,2)}, \mathbf{R}^3 \mapsto Alg_{2^2}^{Sp(1,2,0)}, \end{aligned}$$

В результате функции

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\vec{r}): \mathbf{Vec}\{Alg_4^{Sp(p,q,r)}\} &\rightarrow \mathbf{V}_{rgb}^3, & \mathbf{f}(\vec{r}): \mathbf{Vec}\{Alg_4^{Sp(p,q,r)}\} &\rightarrow \mathbf{V}_{Ret}^4, \\ \mathbf{f}(\vec{q}): Alg_4^{Sp(p,q,r)} &\rightarrow \mathbf{V}_{rgb}^3, & \mathbf{f}(\vec{q}): Alg_4^{Sp(p,q,r)} &\rightarrow \mathbf{V}_{Ret}^4 \end{aligned}$$

становятся зависимыми от кватернионных переменных

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) &= \mathbf{f}(x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2) = \mathbf{f}(\vec{r}), \\ \mathbf{f}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= \mathbf{f}(x_0 + x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2) = \mathbf{f}(\vec{q}), \end{aligned}$$

где

$$\vec{q} = x_0 + x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2, \quad \vec{r} = x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2.$$



Для окончательного построения алгебраических моделей рассматриваемых изображений осталось провести алгебраизацию перцептуальных пространств  $V_{rgb}^3$  и  $V_{ret}^4$ . Одна из возможностей основывается на погружении  $V_{rgb}^3$  и  $V_{ret}^4$  в триплетную и четырехплетную алгебры

$$V_{rgb}^3 \rightarrow Alg_k^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_1, \varepsilon_2), V_{ret}^4 \rightarrow Alg_k^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3),$$

свойства которых рассмотрены в предыдущих секциях. Следовательно,

$$f(\vec{r}) = \mathbf{f}(x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2) = \sum_{l=0}^2 f_l(x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2) \varepsilon^l,$$

$$f(\vec{q}) = \mathbf{f}(x_0 + x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2) = \sum_{l=0}^3 f_l(x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2) \varepsilon^l,$$

Однако в данном случае имеется еще одна возможность: погрузить  $V_{rgb}^3$  и  $V_{ret}^4$  в кватернионные алгебры типа

$$Alg_4^{Vis(u,v,w)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2, J_3) := \{q = y + rJ_1 + gJ_2 + bJ_3 \mid y, r, g, b \in \mathbf{R}\}$$

где  $J_1, J_2, J_3$  - цветные кватернионные единицы. Следовательно, как и в случае пространственной кватернионной алгебры, можно построить погружение  $V_{ret}^4$  в девять алгебр в зависимости от выбора цветных мнимых единиц

$$J_1^2 = \gamma_1 \in \{+1, 0, -1\} \text{ и } J_2^2 = \gamma_2 \in \{+1, 0, -1\} :$$

$$V_{Ret}^4 \mapsto Alg_4^{Vis(0,0,3)}, V_{Ret}^4 \mapsto Alg_4^{Vis(0,2,1)}, V_{Ret}^4 \mapsto Alg_4^{Vis(2,0,1)},$$

$$V_{Ret}^4 \mapsto Alg_4^{Vis(0,3,0)}, V_{Ret}^4 \mapsto Alg_4^{Vis(2,1,0)}, V_{Ret}^4 \mapsto Alg_4^{Vis(0,1,2)},$$

$$V_{Ret}^4 \mapsto Alg_4^{Vis(3,0,0)}, V_{Ret}^4 \mapsto Alg_4^{Vis(1,0,2)}, V_{Ret}^4 \mapsto Alg_4^{Vis(1,2,0)}.$$

Алгебры  $Alg_4^{Vis(u,v,w)}$  обладают векторными частями:

$$\begin{aligned} \mathbf{Vec}[Alg_4^{Vis(u,v,w)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2, J_3)] &= \mathbf{Vec}\{q \mid q = y + rJ_1 + gJ_2 + bJ_3\} = \\ &= \{\vec{q} \mid \vec{q} = rJ_1 + gJ_2 + bJ_3\} = V_{rgb}^3. \end{aligned}$$

Поэтому аналогичное погружение возможно и для цветного пространства  $V_{rgb}^3$ :

$$V_{rgb}^3 \mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_4^{Vis(0,0,3)}\}, V_{rgb}^3 \mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_4^{Vis(0,2,1)}\}, V_{rgb}^3 \mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_4^{Vis(2,0,1)}\},$$

$$V_{rgb}^3 \mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_4^{Vis(0,3,0)}\}, V_{rgb}^3 \mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_4^{Vis(2,1,0)}\}, V_{rgb}^3 \mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_4^{Vis(0,1,2)}\},$$

$$V_{rgb}^3 \mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_4^{Vis(3,0,0)}\}, V_{rgb}^3 \mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_4^{Vis(1,0,2)}\}, V_{rgb}^3 \mapsto \mathbf{Vec}\{Alg_4^{Vis(1,2,0)}\}.$$

В результате получаем 81 модель для трехмерных цветных и ретинальных изображений

$$\vec{f}_{rgb}(\vec{r}) : \mathbf{Vec}\{Alg_4^{Sp(p,q,r)}\} \rightarrow \mathbf{Vec}\{Alg_4^{Vis(u,v,w)}\}, \quad f_{Ret}(\vec{r}) : \mathbf{Vec}\{Alg_4^{Sp(p,q,r)}\} \rightarrow Alg_4^{Vis(u,v,w)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\vec{f}_{rgb}(\vec{\mathbf{r}}) &= \vec{f}_{rgb}(x_1I_1 + x_2I_2 + x_3I_1I_2) = \\ &= f_r(x_1I_1 + x_2I_2 + x_3I_1I_2)J_1 + f_g(x_1I_1 + x_2I_2 + x_3I_1I_2)J_2 + f_b(x_1I_1 + x_2I_2 + x_3I_1I_2)J_1J_2, \\ \vec{f}_{Ret}(\vec{\mathbf{r}}) &= \vec{f}_{Ret}(x_1I_1 + x_2I_2 + x_3I_1I_2) = f_y(x_1I_1 + x_2I_2 + x_3I_1I_2) + \\ &+ f_r(x_1I_1 + x_2I_2 + x_3I_1I_2)J_1 + f_g(x_1I_1 + x_2I_2 + x_3I_1I_2)J_2 + f_b(x_1I_1 + x_2I_2 + x_3I_1I_2)J_1J_2.\end{aligned}$$

Аналогично, для четырехмерных изображений имеем 81 модель

$$\vec{f}_{rgb}(\mathbf{q}) : Alg_4^{Sp(p,q,r)} \rightarrow \mathbf{Vec}\{Alg_4^{Vis(u,v,w)}\}, \quad \vec{f}_{Ret}(\mathbf{q}) : Alg_4^{Sp(p,q,r)} \rightarrow Alg_4^{Vis(u,v,w)}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\vec{f}_{rgb}(\vec{\mathbf{q}}) &= \vec{f}_{rgb}(x_0 + x_1I_1 + x_2I_2 + x_3I_1I_2) = f_r(\vec{\mathbf{q}})J_1 + f_g(\vec{\mathbf{q}})J_2 + f_b(\vec{\mathbf{q}})J_1J_2, \\ \vec{f}_{Ret}(\vec{\mathbf{r}}) &= \vec{f}_{Ret}(x_1I_1 + x_2I_2 + x_3I_1I_2) = f_y(\vec{\mathbf{q}}) + f_r(\vec{\mathbf{q}})J_1 + f_g(\vec{\mathbf{q}})J_2 + f_b(\vec{\mathbf{q}})J_1J_2,\end{aligned}$$

В перцептуальных алгебрах  $Alg_4^{Vis(u,v,w)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2, J_3)$  существует операция сопряжения

$$\bar{q} = \overline{y + rI_1 + gI_2 + bI_3} = y - rJ_1 - gJ_2 - bJ_3$$

Легко проверить, что

$$\bar{q}q = \|q\|_{\gamma_1, \gamma_2} = y^2 - J_1^2 r^2 - J_2^2 g^2 + J_3^2 b^2 = y^2 - \gamma_1 r^2 - \gamma_2 g^2 + \gamma_1 \gamma_2 b^2.$$

**Определение 22.** Квадратичная норма

$$N(q) = \bar{q}q = \|q\|_{\gamma_1, \gamma_2} = y^2 - \gamma_1 r^2 - \gamma_2 g^2 + \gamma_1 \gamma_2 b^2$$

называется псевдонормой обобщенного цветного кватерниона  $q$ . Если псевдорасстояние  $\rho_{\gamma_1, \gamma_2}(p, q)$  между двумя обобщенными цветными кватернионами  $p$  и  $q$  определить как модуль их разности

$$p - q = \omega = y - rJ_1 - gJ_2 - bJ_3:$$

$$\rho_{\gamma_1, \gamma_2}(p, q) = |p - q| = |\omega| = \sqrt{y^2 - \gamma_1 r^2 - \gamma_2 g^2 + \gamma_1 \gamma_2 b^2},$$

то алгебра  $Alg_4^{Vis(u,v,w)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2, J_3)$  трансформируется в 4-D псевдометрическое цветное пространство, обозначаемое как  $Geo_4^{Vis(\delta_1, \delta_2)}$ . Для разработки теории инварианного распознавания образов важно иметь математическую модель про-

странственных и перцептуальных искажений (преобразований) распознаваемых изображений.

**Определение 23.** Преобразования

$$q' \rightarrow q + p, \quad q' \rightarrow \lambda q, \quad \bar{q}' \rightarrow \bar{q} + \bar{p}, \quad \bar{q}' \rightarrow \lambda \bar{q},$$

называются *трансляциями и масштабными изменениями* 4-D и 3-D геометрий  $Geo_4^{Vis(\gamma_1, \gamma_2)}$  и  $Geo_3^{Vis(\gamma_1, \gamma_2)}$  соответственно. Они формируют группы *трансляций*  $\mathbf{Tr} (Geo_4^{Vis(\gamma_1, \gamma_2)})$ ,  $\mathbf{Tr} (Geo_3^{Vis(\gamma_1, \gamma_2)})$  и группы *масштабных преобразований*.

Обобщенные цветные кватернионы единичного модуля могут быть записаны в форме Эйлера

$$q = e^{\bar{u}\varphi} = \cos \varphi + \bar{u} \cdot \sin \varphi$$

где  $\varphi$  - угол вращения вокруг чисто векторного кватерниона  $\bar{u}$  единичного модуля (здесь  $\|\bar{u}\|=1$  и  $\bar{u}^2 = -1$ ).

**Теорема 13** [51]. Преобразования

$$q' = e^{\bar{u}_1\varphi_1/2} q, \quad q' = q e^{-\bar{u}_2\varphi_2/2}, \quad q' = e^{\bar{u}_1\varphi_1/2} q e^{-\bar{u}_2\varphi_2/2}$$

- суть вращения пространства  $Geo_4^{Vis(\gamma_1, \gamma_2)}$  и они формируют группы,  $\mathbf{Rot}_L (Geo_4^{Vis(\gamma_1, \gamma_2)})$ ,  $\mathbf{Rot}_R (Geo_4^{Vis(\gamma_1, \gamma_2)})$ ,  $\mathbf{Rot}_{LR} (Geo_4^{Vis(\gamma_1, \gamma_2)})$  левых, правых и двусторонних вращений, соответственно. В частности, преобразования

$$\bar{q}' = e^{\bar{u}_1\varphi_1/2} \bar{q} e^{-\bar{u}_1\varphi_1/2}$$

- суть вращения пространства  $Geo_3^{Vis(\gamma_1, \gamma_2)} = \text{Vec} \{ \text{Alg}_4^{Vis} \}$ , вокруг вектора  $\bar{u}$  в трехмерном (*rgb*)-пространстве и они формируют группу вращений  $\mathbf{Rot} (Geo_3^{Vis(\gamma_1, \gamma_2)})$ .

**Теорема 14** [51]. Преобразования

$$q' = e^{\bar{u}_1\varphi_1/2} q + p, \quad q' = q e^{-\bar{u}_2\varphi_2/2} + p, \quad q' = e^{\bar{u}_1\varphi_1/2} q e^{-\bar{u}_2\varphi_2/2} + p \quad (50)$$

формируют три группы левых, правых и двусторонних движений  $\mathbf{Mov}_L (Geo_4^{Vis(\gamma_1, \gamma_2)})$ ,  $\mathbf{Mov}_R (Geo_4^{Vis(\gamma_1, \gamma_2)})$ ,  $\mathbf{Mov}_{LR} (Geo_4^{Vis(\gamma_1, \gamma_2)})$ .

Формула (50) определяет, так называемое, спинорное представление группы  $\mathbf{Rot} (Geo_3^{Vis(\gamma_1, \gamma_2)})$ .

**Теорема 15** [51]. Каждое движение  $Geo_3^{Vis(\gamma_1, \gamma_2)}$ -пространства представимо в следующей форме

$$\bar{q}' = e^{\bar{u}\varphi/2} \bar{q} e^{-\bar{u}\varphi/2} + \bar{p}.$$

Как мы видим, алгебро-геометрические структуры физического и перцептуального пространств позволяет рассмотреть на едином алгебраическом языке

изометрические преобразования как в пространственной, так и в перцептуальной алгебрах, т.е. для всех 81 кватернионных моделей цветных и ретинальных изображений. Геометрические искажения 4-D- and 3-D-изображений описываются следующими пространственными преобразованиями:

- пространственными трансляциями  $\mathbf{q}' \rightarrow \mathbf{q} + \mathbf{p}$ ,  $\vec{\mathbf{r}}' \rightarrow \vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{p}}$ ,
- пространственными вращениями

$$\mathbf{q}' = e^{\vec{\mathbf{u}}\varphi_1/2} \mathbf{q} e^{-\vec{\mathbf{u}}\varphi_2/2}, \quad \vec{\mathbf{r}}' = e^{\vec{\mathbf{u}}\varphi_1/2} \vec{\mathbf{r}} e^{-\vec{\mathbf{u}}\varphi_2/2},$$

- пространственными масштабными преобразованиями:

$$\mathbf{q}' \rightarrow \lambda \mathbf{q}, \quad \vec{\mathbf{r}}' \rightarrow \lambda \vec{\mathbf{r}}.$$

Если  $\vec{f}_{rgb}(\vec{\mathbf{r}}), f_{Ret}(\vec{\mathbf{r}})$  и  $\vec{f}_{rgb}(\mathbf{q}), f_{Ret}(\mathbf{q})$  исходные 3-D- и 4-D- изображения, то

$$\begin{aligned} \vec{f}_{rgb}(\vec{\mathbf{r}}') &=_{\lambda, \vec{\mathbf{u}}, \varphi_1, \vec{\mathbf{p}}} \vec{f}_{rgb}(\vec{\mathbf{r}}) = \vec{f}_{rgb}(\lambda e^{\vec{\mathbf{u}}\varphi_1/2} \vec{\mathbf{r}} e^{-\vec{\mathbf{u}}\varphi_2/2} + \vec{\mathbf{p}}), \\ \vec{f}_{rgb}(\mathbf{q}') &=_{\lambda, \vec{\mathbf{u}}_1, \varphi_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \varphi_2, \mathbf{p}} \vec{f}_{rgb}(\mathbf{q}) = \vec{f}_{rgb}(\lambda e^{\vec{\mathbf{u}}_1\varphi_1/2} \mathbf{q} e^{-\vec{\mathbf{u}}_2\varphi_2/2} + \mathbf{p}), \\ f_{Ret}(\vec{\mathbf{r}}') &=_{\lambda, \vec{\mathbf{u}}, \varphi_1, \vec{\mathbf{p}}} f_{Ret}(\vec{\mathbf{r}}) = f_{Ret}(\lambda e^{\vec{\mathbf{u}}\varphi_1/2} \vec{\mathbf{r}} e^{-\vec{\mathbf{u}}\varphi_2/2} + \vec{\mathbf{p}}), \\ f_{Ret}(\mathbf{q}') &=_{\lambda, \vec{\mathbf{u}}_1, \varphi_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \varphi_2, \mathbf{p}} f_{Ret}(\mathbf{q}) = f_{Ret}(\lambda e^{\vec{\mathbf{u}}_1\varphi_1/2} \mathbf{q} e^{-\vec{\mathbf{u}}_2\varphi_2/2} + \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (51)$$

суть их геометрически искаженные версии. Аналогично цветные искажения цветных и ретинальных изображений описываются следующими перцептуальными преобразованиями:

- трансляциями  $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\vec{\mathbf{a}}' = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$
- вращениями  $\mathbf{q}' = e^{\vec{\mathbf{u}}_1\varphi_1/2} \mathbf{q} e^{-\vec{\mathbf{u}}_2\varphi_2/2}$ ,  $\vec{\mathbf{q}}' = e^{\vec{\mathbf{u}}\varphi/2} \vec{\mathbf{q}} e^{-\vec{\mathbf{u}}\varphi/2}$  и
- масштабными преобразованиями:  $\mathbf{q}' \rightarrow \lambda \mathbf{q}$ ,  $\vec{\mathbf{q}}' \rightarrow \lambda \vec{\mathbf{q}}$ .

Если  $\vec{f}_{rgb}(\vec{\mathbf{r}}), f_{Ret}(\vec{\mathbf{r}})$  и  $\vec{f}_{rgb}(\mathbf{q}), f_{Ret}(\mathbf{q})$  - исходные 3-D- и 4-D- изображения, то

$$\begin{aligned} \mu, \vec{\mathbf{u}}, \theta, \vec{\mathbf{p}} \vec{f}_{rgb}(\vec{\mathbf{r}}) &= \mu e^{\vec{\mathbf{u}}\theta/2} \vec{f}_{rgb}(\vec{\mathbf{r}}) e^{-\vec{\mathbf{u}}\theta/2} + \vec{\mathbf{p}}, \\ \mu, \vec{\mathbf{u}}, \theta, \vec{\mathbf{p}} \vec{f}_{rgb}(\mathbf{q}) &= \mu e^{\vec{\mathbf{u}}\theta/2} \vec{f}_{rgb}(\mathbf{q}) e^{-\vec{\mathbf{u}}\theta/2} + \vec{\mathbf{p}}, \\ \mu, \vec{\mathbf{u}}_1, \theta_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \theta_2, \mathbf{p} f_{Ret}(\vec{\mathbf{r}}) &= \mu e^{\vec{\mathbf{u}}_1\theta_1/2} f_{Ret}(\vec{\mathbf{r}}) e^{-\vec{\mathbf{u}}_2\theta_2/2} + \mathbf{p}, \\ \mu, \vec{\mathbf{u}}_1, \theta_1, \vec{\mathbf{u}}_2, \theta_2, \mathbf{p} f_{Ret}(\mathbf{q}) &= \mu e^{\vec{\mathbf{u}}_1\theta_1/2} f_{Ret}(\mathbf{q}) e^{-\vec{\mathbf{u}}_2\theta_2/2} + \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (52)$$

суть их перцептуально искаженные версии. Для геометрически и перцептуально искаженных версий мы имеем

$$\begin{aligned}
 \mu, \vec{u}, \theta, \vec{p} \vec{f}_{rgb}^{\vec{r}}(\vec{r}) &= \mu e^{\vec{u}\theta/2} \vec{f}_{rgb}^{\vec{r}} \left( \lambda e^{-\vec{u}\varphi/2} \vec{r} e^{-\vec{u}\varphi/2} + \vec{p} \right) e^{-\vec{u}\theta/2} + \vec{p}, \\
 \lambda, \vec{u}_1, \varphi_1, \vec{u}_2, \varphi_2, \vec{p} \vec{f}_{rgb}^{\vec{q}}(\mathbf{q}) &= \mu e^{\vec{u}\theta/2} \vec{f}_{rgb}^{\vec{r}} \left( \lambda e^{\vec{u}_1\varphi_1/2} \mathbf{q} e^{-\vec{u}_2\varphi_2/2} + \vec{p} \right) e^{-\vec{u}\theta/2} + \vec{p}, \\
 \mu, \vec{u}_1, \theta_1, \vec{u}_2, \theta_2, \vec{p} \vec{f}_{Ret}^{\vec{r}}(\vec{r}) &= \mu e^{\vec{u}_1\theta_1/2} \vec{f}_{Ret}^{\vec{r}} \left( \lambda e^{\vec{u}_1\varphi_1/2} \vec{r} e^{-\vec{u}_1\varphi_1/2} + \vec{p} \right) e^{-\vec{u}_2\theta_2/2} + \vec{p}, \\
 \vec{f}_{Ret}^{\vec{q}}(\mathbf{q}') &= \mu, \vec{u}_1, \theta_1, \vec{u}_2, \theta_2, \vec{p} \vec{f}_{Ret}^{\vec{q}}(\mathbf{q}) = \mu e^{\vec{u}_1\theta_1/2} \vec{f}_{Ret}^{\vec{r}} \left( \lambda e^{\vec{u}_1\varphi_1/2} \mathbf{q} e^{-\vec{u}_2\varphi_2/2} + \vec{p} \right) e^{-\vec{u}_2\theta_2/2} + \vec{p}.
 \end{aligned} \tag{53}$$

Теперь перед нами стоит задача найти абсолютные инварианты этих изображений по отношению к рассмотренным геометрическим и перцептуальным искажениям.

#### 4.7. Моменты и инварианты гиперспектральных изображений

Моменты ретинальных 4-D изображений

$$\begin{aligned}
 \vec{f}_{Ret}^{\vec{q}}(\mathbf{q}) &= \vec{f}_{Ret}^{\vec{r}}(x_0 + x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2) = f_y(x_0 + x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2) + \\
 &- f_r(x_0 + x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2) J_1 + f_g(x_0 + x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2) J_2 + f_b(x_0 + x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2) J_1 J_2 = \\
 &= f_y(\mathbf{q}_2) + f_r(\mathbf{q}) J_1 + f_g(\mathbf{q}_2) J_2 + f_b(\mathbf{q}) J_1 J_2
 \end{aligned}$$

определяются следующим образом

$$\begin{aligned}
 \mathring{\mathbf{M}}_p \{ \vec{f}_{Ret}^{\vec{q}} \} &= \\
 &= \int_{z \in \mathcal{A}_2^{Sp}} (x_0 + x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2)^p \cdot \vec{f}_{Ret}^{\vec{r}}(x_0 + x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \\
 &= \int_{z \in \mathcal{A}_2^{Sp}} \mathbf{q}^p \cdot \vec{f}_{Ret}^{\vec{q}}(\mathbf{q}) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \\
 &= \int_{z \in \mathcal{A}_2^{Sp}} \mathbf{q}^p \cdot (f_y(\mathbf{q}_2) + f_r(\mathbf{q}) J_1 + f_g(\mathbf{q}_2) J_2 + f_b(\mathbf{q}) J_1 J_2) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \\
 &= \int_{z \in \mathcal{A}_2^{Sp}} \mathbf{q}^p \cdot f_y(\mathbf{q}_2) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 + J_1 \int_{z \in \mathcal{A}_2^{Sp}} \mathbf{q}^p \cdot f_r(\mathbf{q}) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \\
 &+ J_2 \int_{z \in \mathcal{A}_2^{Sp}} \mathbf{q}^p \cdot f_g(\mathbf{q}_2) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 + J_1 J_2 \int_{z \in \mathcal{A}_2^{Sp}} \mathbf{q}^p \cdot f_b(\mathbf{q}) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \\
 &= \mathbf{M}_p \{ f_y \} + \mathbf{M}_p \{ f_r \} \cdot J_1 + \mathbf{M}_p \{ f_g \} \cdot J_2 + \mathbf{M}_p \{ f_b \} \cdot J_2 J_2
 \end{aligned} \tag{54}$$

где

$$\mathbf{M}_p \{ f \} = \int_{z \in \mathcal{A}_2^{Sp}} \mathbf{q}^p \cdot f(\mathbf{q}) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3$$

-  $Alg_4^{Sp(p,q,r)}$  - значный (кватернионно-значный) момент серого изображения.

Нетрудно видеть, что моменты

$$M_p \{f_{Ret}\}$$

принадлежат новой пространственно-перцептуальной алгебре

$$\begin{aligned} Alg_{16}^{VisSp} &= Alg_4^{Vis} \left( Alg_4^{Sp} (\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2) | 1, J_1, J_2, J_1 J_2 \right) := \\ &= Alg_4^{Sp} + Alg_4^{Sp} \cdot J_1 + Alg_4^{Sp} \cdot J_2 + Alg_4^{Sp} \cdot J_1 J_2. \end{aligned}$$

Таким образом, все операции под интегралом (54) можно проводить по законам  $Alg_{16}^{VisSp}$ -алгебры и поэтому моменты в этом выражении (54) являются  $Alg_{16}^{VisSp}$ -значными:

$$M_p \{f_{Ret}\} = M_p \{f_y\} + M_p \{f_r\} \cdot J_1 + M_p \{f_g\} \cdot J_2 + M_p \{f_b\} \cdot J_2 J_2$$

Выясним связь между моментами исходного изображения и его  $f_{Ret}(q)$  искаженной версией

$$f_{Ret}(\mathbf{q}') = \frac{\mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2}{\lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2} f_{Ret}(\mathbf{q}) = \mu e^{\bar{u}_1 \theta_1 / 2} f_{Ret}(\lambda e^{\bar{u}_1 \varphi_1 / 2} \mathbf{q} e^{-\bar{u}_2 \varphi_2 / 2}) e^{-\bar{u}_2 \theta_2 / 2}.$$

**Теорема 16.** Центральные моменты

$$M_p \{f_{Ret}\}$$

являются относительными  $Alg_{16}^{VisSp}$ -значными инвариантами по отношению к аффинным группам пространственных и перцептуальных преобразований с правыми  $e^{\bar{u}_2 \varphi_2 / 2} e^{-\bar{u}_2 \theta_2 / 2}$  и левыми  $\lambda^{-(p+4)} \mu e^{\bar{u}_1 \theta_1 / 2} e^{-\bar{u}_1 \varphi_1 / 2}$  мультипликаторами соответственно, то есть

$$\overset{\circ}{M}_p \left\{ \frac{\mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2}{\lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2} f_{Ret}(\mathbf{q}) \right\} = \lambda^{-(p+4)} \mu e^{\bar{u}_1 \theta_1 / 2} e^{-\bar{u}_1 \varphi_1 / 2} \overset{\circ}{M}_p \{f_{Ret}(\mathbf{q})\} e^{\bar{u}_2 \varphi_2 / 2} e^{-\bar{u}_2 \theta_2 / 2}, \quad (55)$$

где

$$\overset{\circ}{M}_p \{f_{Ret}\} \text{ и } \overset{\circ}{M}_p \left\{ \frac{\mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2}{\lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2} f_{Ret} \right\}$$

моменты исходного  $f_{Ret}$  и преобразованного изображений

$$\frac{\mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2}{\lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2} f_{Ret}(\mathbf{q}) = \mu e^{\bar{u}_1 \theta_1 / 2} f_{Ret}(\lambda e^{\bar{u}_1 \varphi_1 / 2} \mathbf{q} e^{-\bar{u}_2 \varphi_2 / 2}) e^{-\bar{u}_2 \theta_2 / 2}.$$

**Доказательство.** Для искаженной версии изображения имеем

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{M}_p \left\{ \frac{\mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2}{\lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2} f_{Ret}(\mathbf{q}) \right\} &= \int_{z \in \mathcal{A}_2^{Sp}} \mathbf{q}^p \cdot \frac{\mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2}{\lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2} f_{Ret}(\mathbf{q}) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \mu e^{\bar{u}_1 \theta_1 / 2} \left( \int_{z \in \mathcal{A}_2^{Sp}} \mathbf{q}^p \cdot f_{Ret}(\lambda e^{\bar{u}_1 \varphi_1 / 2} \mathbf{q} e^{-\bar{u}_2 \varphi_2 / 2}) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \right) e^{-\bar{u}_2 \theta_2 / 2}. \end{aligned}$$

После замена переменных  $\mathbf{q}' = \lambda e^{\bar{u}_1 \varphi_1 / 2} \mathbf{q} e^{-\bar{u}_2 \varphi_2 / 2}$  получаем

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{M}_p \left\{ \begin{matrix} \mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2 \\ \lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2 \end{matrix} f_{\text{Ret}}(\mathbf{q}) \right\} &= \int_{z \in \mathcal{A}_2^{Sp}} \mathbf{q}^p \cdot \begin{matrix} \mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2 \\ \lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2 \end{matrix} f_{\text{Ret}}(\mathbf{q}) dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \\
 &= \mu e^{\bar{u}_1 \theta_1 / 2} \left( \int_{z \in \mathcal{A}_2^{Sp}} \left( \lambda^{-1} e^{-\bar{u}_1 \varphi_1 / 2} \mathbf{q}' e^{\bar{u}_2 \varphi_2 / 2} \right)^p \cdot f_{\text{Ret}}(\mathbf{q}') \lambda^{-4} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \right) e^{-\bar{u}_2 \theta_2 / 2} = \\
 &= \lambda^{-(p+4)} \mu e^{\bar{u}_1 \theta_1 / 2} e^{-\bar{u}_1 \varphi_1 / 2} \left( \int_{z \in \mathcal{A}_2^{Sp}} (\mathbf{q}')^p \cdot f_{\text{Ret}}(\mathbf{q}') dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 \right) e^{\bar{u}_2 \varphi_2 / 2} e^{-\bar{u}_2 \theta_2 / 2} = \\
 &= \lambda^{-(p+4)} \mu e^{\bar{u}_1 \theta_1 / 2} e^{-\bar{u}_1 \varphi_1 / 2} \overset{\circ}{M}_p \left\{ f_{\text{Ret}}(\mathbf{q}) \right\} e^{\bar{u}_2 \varphi_2 / 2} e^{-\bar{u}_2 \theta_2 / 2},
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

К сожалению, избавиться от правых и левых мультипликаторов ранее использованными методами не представляется возможным. Поэтому мы перейдем к модулям моментов

$$\left| \overset{\circ}{M}_p \left\{ f_{\text{Ret}}(\mathbf{q}) \right\} \right|.$$

Для них имеем

$$\left| \overset{\circ}{M}_p \left\{ \begin{matrix} \mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2 \\ \lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2 \end{matrix} f_{\text{Ret}}(\mathbf{q}) \right\} \right| = \lambda^{-(p+4)} \mu \left| \overset{\circ}{M}_p \left\{ f_{\text{Ret}}(\mathbf{q}) \right\} \right|.$$

Очевидно,

$$\frac{\left| \overset{\circ}{M}_{p+1} \left\{ \begin{matrix} \mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2 \\ \lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2 \end{matrix} f_{\text{Ret}}(\mathbf{q}) \right\} \right|}{\left| \overset{\circ}{M}_p \left\{ \begin{matrix} \mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2 \\ \lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2 \end{matrix} f_{\text{Ret}}(\mathbf{q}) \right\} \right|} = \lambda^{-1} \frac{\left| \overset{\circ}{M}_{p+1} \left\{ f_{\text{Ret}}(\mathbf{q}) \right\} \right|}{\left| \overset{\circ}{M}_p \left\{ f_{\text{Ret}}(\mathbf{q}) \right\} \right|}$$

$$\frac{\left| \overset{\circ}{M}_1 \left\{ \begin{matrix} \mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2 \\ \lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2 \end{matrix} f_{\text{Ret}}(\mathbf{q}) \right\} \right|}{\left| \overset{\circ}{M}_0 \left\{ \begin{matrix} \mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2 \\ \lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2 \end{matrix} f_{\text{Ret}}(\mathbf{q}) \right\} \right|} = \lambda^{-1} \frac{\left| \overset{\circ}{M}_1 \left\{ f_{\text{Ret}}(\mathbf{q}) \right\} \right|}{\left| \overset{\circ}{M}_0 \left\{ f_{\text{Ret}}(\mathbf{q}) \right\} \right|}$$

Следовательно,

$$\frac{\left| \overset{\circ}{M}_{p+1} \left\{ \begin{matrix} \mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2 \\ \lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2 \end{matrix} f_{\text{Ret}} \right\} \right| \left| \overset{\circ}{M}_0 \left\{ \begin{matrix} \mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2 \\ \lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2 \end{matrix} f_{\text{Ret}} \right\} \right|}{\left| \overset{\circ}{M}_p \left\{ \begin{matrix} \mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2 \\ \lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2 \end{matrix} f_{\text{Ret}} \right\} \right| \left| \overset{\circ}{M}_1 \left\{ \begin{matrix} \mu, \bar{u}_1, \theta_1, \bar{u}_2, \theta_2 \\ \lambda, \bar{u}_1, \varphi_1, \bar{u}_2, \varphi_2 \end{matrix} f_{\text{Ret}} \right\} \right|} = \frac{\left| \overset{\circ}{M}_{p+1} \left\{ f_{\text{Ret}} \right\} \right| \left| \overset{\circ}{M}_0 \left\{ f_{\text{Ret}} \right\} \right|}{\left| \overset{\circ}{M}_p \left\{ f_{\text{Ret}} \right\} \right| \left| \overset{\circ}{M}_1 \left\{ f_{\text{Ret}} \right\} \right|}$$

**Теорема 17.** Нормализованные центральные моменты

$$\text{Inv}_{p>1} \{f_{\text{Ret}}\} = \frac{\left| \overset{\circ}{M}_{p+1} \{f_{\text{Ret}}\} \right| \left| \overset{\circ}{M}_0 \{f_{\text{Ret}}\} \right|}{\left| \overset{\circ}{M}_p \{f_{\text{Ret}}\} \right| \left| \overset{\circ}{M}_1 \{f_{\text{Ret}}\} \right|} \quad (56)$$

являются абсолютными  $\mathbf{R}$ -значными инвариантами по отношению к аффинной группе преобразований физического и перцептуального пространств.

## 5. Алгебраические модели $nD$ изображений

### 5.1. Алгебры Клиффорда и Кэли-Клейн геометрии

Многоканальные  $nD$  изображения

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_K(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{V}^K$$

обладают двумя атрибутами:  $n$ - $D$  физическим  $R^n$  и  $K$ - $D$  перцептуальным  $V^K$  пространствами. Мы предполагаем, что мозг оперирует гиперкомплексными числами, когда распознает наблюдаемые изображения, вычисляя гиперкомплексно-значные инварианты распознаваемого изображения. Для того, чтобы оперировать  $n$ - $D$  пространственными векторами  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$  и  $K$ - $D$  перцептуальными пикселями  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_K) \in V^K$  как числами, мы погружаем пространства  $R^n$  и  $V^K$  в пространственную  $\text{Alg}_{2^n}^{Sp}(R|1, I_1, \dots, I_{n-1})$  и перцептуальную  $\text{Alg}_{2^K}^{Vis}(R|1, J_1, \dots, J_{K-1})$  гиперкомплексные алгебры Клиффорда, соответственно:

$$R^n \rightarrow \text{Alg}_{2^n}^{Sp}(R|1, I_1, \dots, I_{n-1}), V^K \rightarrow \text{Alg}_{2^K}^{Vis}(R|1, J_1, \dots, J_{K-1})$$

где  $I_1, \dots, I_{n-1}$  и  $J_1, \dots, J_{K-1}$  - пространственные и перцептуальные мнимые единицы. Эти алгебры называются пространственной и перцептуальной алгебрами. Для одновременного обозначения обеих алгебр мы используем следующий символ  $\text{Alg}_{2^t}(R|1, B_1, \dots, B_t)$  или просто  $\text{Alg}_{2^t}$ , где  $B_1, \dots, B_t$  - пространственные или перцептуальные мнимые единицы в зависимости от того о какой алгебре идет речь, то есть

$$\text{Alg}_{2^t}(\mathbf{R}|1, B_1, \dots, B_{t-1}) = \begin{cases} \text{Alg}_{2^n}^{Sp}(\mathbf{R}|1, I_1, \dots, I_{n-1}), & \text{если } t = n, B_0 = I_0 \equiv 1, B_1 = I_1, \dots, B_{n-1} = I_{n-1}, \\ \text{Alg}_{2^K}^{Vis}(\mathbf{R}|1, J_1, \dots, J_{K-1}), & \text{если } t = K, B_0 = J_0 \equiv 1, B_1 = J_1, \dots, B_{K-1} = J_{K-1}. \end{cases}$$

Названные выше алгебры строятся следующим образом [51-52, 57-59]. Будем считать, что «малое»  $t$ - $D$  пространство  $R^t$  (физическое или перцептуальное)



натянута на  $t$  антикоммутирующих ( $B_i B_j = -B_j B_i$ ) гипермнимых единиц  $B_i, i=1, 2, \dots$  и обладающих следующим свойством

$$B_i^2 = \begin{cases} +1, & i = 1, 2, \dots, u, \\ -1, & i = u + 1, u + 2, \dots, u + v, \\ 0, & i = u + v + 1, \dots, u + v + w = t. \end{cases}$$

Теперь построим большое гиперкомплексное  $2^t$ -D пространство  $R^{2^t}$  в виде прямой сумм подпространств следующих размерностей  $C_t^0, C_t^1, C_t^2, \dots, C_t^t$  :

$$R^{2^t} = R^{C_t^0} \oplus R^{C_t^1} \oplus \dots \oplus R^{C_t^s} \oplus \dots \oplus R^{C_t^{t-1}} \oplus R^{C_t^t},$$

где подпространства  $R^{C_t^s}, s=0, 1, 2, \dots, s$  - натянуты на  $s$ -кратные произведения гипермнимых единиц  $B_{m_1}, B_{m_2}, \dots, B_{m_s} (m_1 < m_2 < \dots < m_s)$ . По определению  $B_0 \equiv 1$  - суть реальная единица и поэтому

$$R^{C_t^0} = \{a_0 B_0 \mid a_0 \in \mathbf{R}\},$$

$$R^{C_t^1} = \{a_1 B_1 + a_2 B_2 + \dots + a_t B_t \mid a_1, a_2, \dots, a_t \in \mathbf{R}\},$$

$$R^{C_t^2} = \{a_{1,2} B_1 B_2 + a_{1,3} B_1 B_3 + \dots + a_{t-1,t} B_{t-1} B_t \mid a_{1,2}, \dots, a_{t-1,t} \in \mathbf{R}\},$$

.....,

$$R^{C_t^t} = \{a_{1,2,3,\dots,t} B_1 B_2 \dots B_t \mid a_{1,2,3,\dots,t} \in \mathbf{R}\}.$$

В качестве примера рассмотрим три 1-, 2-, 3-D малых пространства  $R^t = R^1, R^2, R^3$ . Соответствующие им «большие» подпространства суть

$$R^{2^1} = R^2 = R^1 \oplus R^1 = R \cdot B_0 + R \cdot B_1,$$

$$R^{2^2} = R^4 = R^1 \oplus R^2 \oplus R^1 = R \cdot B_0 + \underbrace{[R \cdot B_1 + R \cdot B_2]}_{R^2} + R \cdot B_1 B_2,$$

$$\begin{aligned} R^{2^3} &= R^8 = R^1 \oplus R^3 \oplus R^3 \oplus R^1 = \\ &= R \cdot B_0 + \underbrace{[R \cdot B_1 + R \cdot B_2 + R \cdot B_3]}_{R^3} \oplus \underbrace{[R \cdot B_1 B_2 + R \cdot B_1 B_3 + R \cdot B_2 B_3]}_{R^3} \oplus R \cdot B_1 B_2 B_3. \end{aligned}$$

Каждый элемент из  $R^{2^t}$  имеет следующее представление. Пусть  $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \dots, b_t) \in B_2^t$  – произвольный  $t$ -битовый вектор, где  $b_i \in B_2 = \{0, 1\}$  и  $B_2^t$  –  $t$ -D булеан. Обозначим символом  $w(\mathbf{b})=b_1+b_2+\dots+b_t$  вес элемента  $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \dots, b_t) \in B_2^t$ . Введем в рассмотрение  $2^t$  гипермнимых единиц  $B^{\mathbf{b}} := B_1^{b_1} B_2^{b_2} \dots B_t^{b_t}$ , которые формируют базис  $2t$ -D пространства  $R^{2^t}$  и называются его полным множеством мнимостей. Мы полагаем, что  $B^0 := B_1^0 B_2^0 \dots B_t^0 = 1$ . Тогда произвольный элемент  $C \in R^{2^t}$  может быть представлен в виде линейной комбинации полного множества мнимостей:

$$C := \sum_{\mathbf{b} \in B_2^t} a_{\mathbf{b}} B^{\mathbf{b}} = \sum_{s=0}^K \sum_{w(\mathbf{b})=s} a_{\mathbf{b}} B^{\mathbf{b}} = \sum_{w(\mathbf{b})=0} a_{\mathbf{b}} B^{\mathbf{b}} + \left( \sum_{w(\mathbf{b})=1} a_{\mathbf{b}} B^{\mathbf{b}} + \sum_{w(\mathbf{b})=2} a_{\mathbf{b}} B^{\mathbf{b}} + \dots + \sum_{w(\mathbf{b})=s} a_{\mathbf{b}} B^{\mathbf{b}} + \dots + \sum_{w(\mathbf{b})=t} a_{\mathbf{b}} B^{\mathbf{b}} \right),$$

где выражение  $\text{Vec}^s(C) = \sum_{w(\mathbf{b})=s} a_{\mathbf{b}} B^{\mathbf{b}} \in R^{C_i^s} (s=0, 1, \dots, t)$  называется  $s$ -векторной

частью вектора  $C$ . В частности,  $Sc(C) = \sum_{w(\mathbf{b})=0} a_{\mathbf{b}} B^{\mathbf{b}} = a_0 B_0 \in R^{C_i^0}$  – его скалярная

часть,  $\text{Vec}^1 = \sum_{w(\mathbf{b})=1} a_{\mathbf{b}} B^{\mathbf{b}} \in R^{C_i^1}$  – чисто векторная часть (она совпадает с исход-

ным «малым» векторным пространством  $\text{Vec}^1 = R^t$ ), а  $\text{Vec}^2 = \sum_{w(\mathbf{b})=2} a_{\mathbf{b}} B^{\mathbf{b}} \in R^{C_i^2}$  –

бивекторная часть и так далее. Среди полного множества мнимостей мнимости единичного веса  $B^{\mathbf{b}} := B_1^{b_1} B_2^{b_2} \dots B_t^{b_t} (w(\mathbf{b})=1)$  называются *родительскими мнимостями* (то есть  $B_1 B_2 \dots B_t$ ), остальные называются *производными мнимостями*.

Для произвольных двух векторов  $A = \sum_{\mathbf{b} \in B_2^t} a_{\mathbf{b}} B^{\mathbf{b}}, B = \sum_{\mathbf{c} \in B_2^t} b_{\mathbf{c}} B^{\mathbf{c}}$  легко определяется их произведение

$$C = A \circ B := \left( \sum_{\mathbf{b} \in B_2^t} a_{\mathbf{b}} B^{\mathbf{b}} \right) \circ \left( \sum_{\mathbf{c} \in B_2^t} b_{\mathbf{c}} B^{\mathbf{c}} \right) = \left( \sum_{\mathbf{b} \in B_2^t} \sum_{\mathbf{c} \in B_2^t} a_{\mathbf{b}} b_{\mathbf{c}} B^{\mathbf{b} \oplus \mathbf{c}} \right) = \left( \sum_{\mathbf{b} \in B_2^t} \sum_{\mathbf{c} \in B_2^t} (-1)^{\langle \mathbf{b} | R | \mathbf{c} \rangle} a_{\mathbf{b}} b_{\mathbf{c}} B^{\mathbf{b} \oplus \mathbf{c}} \right) = \sum_{\mathbf{d} \in B_2^t} c_{\mathbf{d}} B^{\mathbf{d}}, \quad (57)$$

где

«Большое»  $c_{\mathbf{d}} = \sum_{\mathbf{b} \in B_2^t} (-1)^{\langle \mathbf{b} | R | \mathbf{d} \oplus \mathbf{b} \rangle} a_{\mathbf{b}} b_{\mathbf{d} \oplus \mathbf{b}}$ ,  $R := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  – рным произ-

ных мнимостей  $B^b := B_1^{b_1} B_2^{b_2} \dots B_t^{b_t}$ , в зависимости от свойств родительских мнимостей  $B_s^2 := +1, 0, -1, \forall s = 1, 2, \dots, t$ . Каждая возможность генерирует вполне определенную алгебру Клиффорда. Следовательно, на базе «большого пространства»  $R^{2^t}$  с  $3^t$  возможными правилами умножения (зависящими от свойств родительских мнимостей) можно сформировать  $3^t$  различных  $2^t$ -D алгебр Клиффорда  $Alg_{2^t}^{(u,v,w)}(R|1, B_1, \dots, B_t)$ , которые для краткости будем обозначать символом  $Alg_{2^t}$ , если родительские мнимости  $B_1, \dots, B_t$  и их алгебраические сигнатуры  $u, v, w$  фиксированы.

Заметим, что если  $(1, B_1, \dots, B_t) = (1, I_1, \dots, I_n)$ , то алгебра Клиффорда  $Alg_{2^t}^{(u,v,w)}(R|1, B_1, \dots, B_t)$  называется пространственной и обозначается как  $Alg_{2^t}^{Sp(p,q,r)}(R|1, I_1, \dots, I_n)$ . В этом случае  $t=n$  и  $(u, v, w) = (p, q, r)$ . Различных пространственных алгебр существует  $3^n$ . Если же  $(1, B_1, \dots, B_t) = (1, I_1, \dots, I_K)$  то алгебра  $Alg_{2^t}^{(u,v,w)}(R|1, B_1, \dots, B_t)$  называется перцептуальной. В этом случае  $t=K$ . Очевидно, что таких алгебр существует также в количестве  $3^K$ .

**Примечание 2.** Пространственная и перцептуальная алгебры могут иметь как одинаковые  $((u, v, w) = (p, q, r))$ , так и различные  $((u, v, w) \neq (p, q, r))$  алгебраические сигнатуры.

В алгебрах Клиффорда  $Alg_{2^t}$  имеет место операция гиперкомплексного сопряжения, которая отображает каждое гиперкомплексное число Клиффорда  $C := c_0 J_0 + \sum_{b \neq 0} c_b B^b$  в его сопряженного двойника  $\bar{C} := c_0 J_0 - \sum_{b \neq 0} c_b B^b$ . Произвольную алгебру Клиффорда  $Alg_{2^t}$  можно превратить в псевдометрическое пространство  $Geo_{2^t}$ , если ввести в ней псевдо-расстояние между любой парой чисел Клиффорда  $A$  и  $B$  стандартным образом

$$\rho(A, B) = |A - B| = \sqrt{(A - B)(\overline{A - B})} = |U| = \mathcal{U}\bar{\mathcal{U}} = \sqrt{\sum_{b \in B_2^t} (-1)^{w(b)} u_b (B^b)^2},$$

где

$$A - B = \mathcal{U} = \sum_{b \in B_2^t} u_b B^b.$$

В этом случае в «малом» пространстве  $R^t = \{x | x = \sum_{w(b)=1} c_b B^b = x_1 B_1 + \dots + x_t B_t\}$  индуцируется та же самая метрика и оно превращается в псевдо-метрическое пространство  $R^t \rightarrow Geo(R^t) = \langle\langle R^t, \rho(A, B) \rangle\rangle$ , которое называется пространством (геометрией) Кэли-Клейна [5-9]. Оказывается, что существует  $t$  неизоморфных метрических пространств  $Geo(R^t)$ . Очевидно,

$$\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{Geo}^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R}^n) = \langle\langle \mathbf{R}^n, \rho^{Sp(p,q,r)} \rangle\rangle, \quad \mathbf{V}^K \rightarrow \mathbf{Geo}^{Vis(u,v,w)}(\mathbf{V}^K) = \langle\langle \mathbf{V}^K, \rho^{Vis(u,v,w)} \rangle\rangle,$$

где  $\mathbf{Geo}^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R}^n)$  – пространственная геометрия Кэли-Клейна для физического пространства  $\mathbf{R}^n$  с метрикой  $\rho^{Sp(p,q,r)}$  и  $\mathbf{Geo}^{Vis(u,v,w)}(\mathbf{V}^K)$  – перцептуальная геометрия Кэли-Клейна для перцептуального пространства с метрикой  $\rho^{Vis(u,v,w)}$ .

Каждая алгебра  $\mathbf{Alg}_{2^t}$  сможет быть декомпозирована на две части

$$\mathbf{Alg}_{2^t} = {}^0\mathbf{Alg}_{2^t} + {}^1\mathbf{Alg}_{2^t} = \sum_{s=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \mathbf{Vec}^{2s} + \sum_{s=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \mathbf{Vec}^{2s+1},$$

где

$${}^0\mathbf{Alg}_{2^t} = \sum_{s=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \mathbf{Vec}^{2s} \text{ и } {}^1\mathbf{Alg}_{2^t} = \sum_{s=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} \mathbf{Vec}^{2s+1}$$

чётная и нечётная части, соответственно.

Оказывается, что все линейные изометрические преобразования  $\mathbf{Geo}(R^t) = \langle\langle R^t, \rho(A, B) \rangle\rangle$  находятся  ${}^0\mathbf{Alg}_{2^t}$ . Числа Клиффорда  $E \in {}^0\mathbf{Alg}_{2^t}$  единичного модуля представляют группу вращений пространства  $\mathbf{Geo}(R^t) = \langle\langle R^t, \rho(A, B) \rangle\rangle$ , которая называется *спинорной группой* и обозначается, как  $\mathbf{Spin}(\mathbf{Alg}_{2^t})$ . Пусть  $E_0 \in \mathbf{Spin}(\mathbf{Alg}_{2^t})$  – подобное число Клиффорда, тогда оно может быть записано в обобщенной форме Эйлера

$$E_0 = e^{U_0 \varphi} = \cos \varphi + U_0 \sin \varphi \in \mathbf{Spin}(\mathbf{Alg}_{2^t}),$$

где  $U_0 \in {}^0\mathbf{Alg}_{2^t}$  – подходящий бивектор

$$U = \sum_{k_1=1}^t \sum_{k_2=1}^t u_{k_1 k_2} B_{k_1} B_{k_2} = \sum_{w(b)=2} u_b B^b \in \mathbf{Vec}^2.$$

**Theorem 17** [51]. Все преобразования вида

$$\mathbf{x}' = e^{U_0 \varphi / 2} \cdot \mathbf{x} \cdot e^{-U_0 \varphi / 2}$$

формируют группу  $\mathbf{SO}(\mathbf{Geo}(R^t))$  изометрических вращений «малого» метрического пространства  $\mathbf{Geo}(R^t)$ .

**Theorem 18** [51]. Все множество движений пространства  $\mathbf{Geo}(R^t)$

$$\mathbf{z}' = e^{U_0 \varphi / 2} \cdot \mathbf{z} \cdot e^{-U_0 \varphi / 2} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{w} \in \mathbf{Geo}(R^t)$$

формирует группу  $\mathbf{Mov}(\mathbf{Geo}(R^t))$  движений этого пространства.

## 5.2. Алгебраические модели многоканальных изображений

В классическом подходе многоканальные изображения  $f(x)$  рассматриваются как  $n$ - $D$   $K$ -компонентные (векторно-значные) функции типа  $f(x) = (f_1(x), f_2, \dots, f_K) : R^n \rightarrow V^K$  со значениями в  $K$ - $D$  перцептуальном пространстве  $V^K$ , где  $x \in R^n, n=2,3, \dots$ . Мы интерпретируем многоканальное изображение  $f(x)$ , как  $Alg_{2^k}^{Vis(u,v,w)}(R|1, J_1, \dots, J_K)$ -значную функцию, зависящую от гиперкомплексной переменной  $Alg_{2^n}^{Sp(p,q,r)}(R|1, I_1, \dots, I_n)$  :

$$f(x) : Alg_{2^n}^{Sp(p,q,r)}(R|1, I_1, \dots, I_n) \rightarrow Alg_{2^k}^{Vis(u,v,w)}(R|1, J_1, \dots, J_K) .$$

В зависимости от того, каким образом оснащаются координатные оси мнимостями, существуют следующие варианты. Пространственные и гиперспектральные координатные оси оснащаются только родительскими мнимостями

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_1 I_1, x_2 I_2, \dots, x_n I_n) = \sum_{i=1}^n x_i I_i,$$

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_K) \rightarrow (f_1 J_1, f_2 J_2, \dots, f_K J_K) = \sum_{i=1}^K f_i J_i$$

В этом случае

$$R^n = \text{Vec}^1(Alg_{2^n}^{Sp(p,q,r)}(R|1, I_1, \dots, I_n)) = \text{Vec}^1 Alg_{2^n}^{Sp(p,q,r)} = I_1 R + I_2 R + \dots + I_n R,$$

$$V^K = \text{Vec}^1(Alg_{2^k}^{Vis(u,v,w)}(R|1, J_1, \dots, J_K)) = \text{Vec}^1 Alg_{2^k}^{Vis(u,v,w)} = J_1 R + J_2 R + \dots + J_K R.$$

Во втором варианте используется полное множество мнимостей

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \rightarrow (x_1 I_1, x_2 I_2, \dots, x_{2^l-1} I_{2^l-1}) = \sum_{b \in B_2^l} x_b I_b,$$

$$f = (f_0, f_1, \dots, f_{K-1}) \rightarrow (f_0 J_0, f_1 J_1, \dots, f_{2^m-1} J_{2^m-1}) = \sum_{b \in B_2^m} f_b J_b,$$

где  $n^l$  и  $K = 2^m$  для подходящих  $l$  и  $m$ . В соответствии с этими вариантами можно предложить четыре модели многоспектральных изображений.

**Первая модель:**  $f(x): \text{Vec}^1(\text{Alg}_{2^n}^{\text{Sp}(p,q,r)}) \rightarrow \text{Vec}^1(\text{Alg}_{2^k}^{\text{Vis}(u,v,w)})$ , в которой используются только родительские мнимости в физическом и перцептуальном пространствах, то есть

$$f(I_1 x_1 + I_2 x_2 + \dots + I_n x_n) = J_1 f_1(I_1 x_1 + I_2 x_2 + \dots + I_n x_n) + J_2 f_2(I_1 x_1 + I_2 x_2 + \dots + I_n x_n) + \dots + J_K f_K(I_1 x_1 + I_2 x_2 + \dots + I_n x_n)$$

**Вторая модель:**  $f(x): \text{Vec}^1(\text{Alg}_{2^n}^{\text{Sp}(p,q,r)}) \rightarrow \text{Alg}_{2^m}^{\text{Vis}(u,v,w)}(R|1, J_1, \dots, J_m)$ .

Здесь используются родительские мнимости в физическом пространстве и полное множество мнимостей – в перцептуальном:

$$f(I_1 x_1 + I_2 x_2 + \dots + I_n x_n) = J^0 f_0(I_1 x_1 + I_2 x_2 + \dots + I_n x_n) + J^1 f_1(I_1 x_1 + I_2 x_2 + \dots + I_n x_n) + \dots + J^{2^m-1} f_{2^m-1}(I_1 x_1 + I_2 x_2 + \dots + I_n x_n)$$

**Третья модель:**  $f(x): \text{Alg}_{2^l}^{\text{Sp}(p,q,r)}(R|1, I_1, \dots, I_n) \rightarrow \text{Vec}^1(\text{Alg}_{2^k}^{\text{Vis}(u,v,w)})$ , где

$$f(x_0 I^0 + x_1 I^1 + \dots + x_{2^l-1} I^{2^l-1}) = J_1 f_1(x_0 I^0 + x_1 I^1 + \dots + x_{2^l-1} I^{2^l-1}) + J_1 f_1(x_0 I^0 + x_1 I^1 + \dots + x_{2^l-1} I^{2^l-1}) + \dots + J_{2^m-1} f_{2^m-1}(x_0 I^0 + x_1 I^1 + \dots + x_{2^l-1} I^{2^l-1})$$

**Четвертая модель:**

$$f(x): \text{Alg}_{2^l}^{\text{Sp}(p,q,r)}(R|1, I_1, \dots, I_l) \rightarrow \text{Alg}_{2^m}^{\text{Vis}(u,v,w)}(R|1, J_1, \dots, J_m)$$

В этом случае в физическом и перцептуальном пространствах используются полные множества мнимостей:

$$f(x_0 I^0 + x_1 I^1 + \dots + x_{2^l-1} I^{2^l-1}) = J^0 f_1(x_0 I^0 + x_1 I^1 + \dots + x_{2^l-1} I^{2^l-1}) + J^1 f_2(x_0 I^0 + x_1 I^1 + \dots + x_{2^l-1} I^{2^l-1}) + \dots + J^{2^m-1} f_{2^m}(x_0 I^0 + x_1 I^1 + \dots + x_{2^l-1} I^{2^l-1})$$

В этом случае  $n=2^l, K=2^m$ , то есть  $f(x)$  является  $2^l$ -мерным  $2^m$ -канальным изображением.

**Пример 1.** Для серых 2-D изображения существуют только две модели

**Модель 1:**  $f(x_1, x_2) = f(x_1 I_1 + x_2 I_2): \text{Vec}^1\{\text{Alg}_{2^2}^{\text{Sp}(p,q,r)}(R|1, I_1, I_2)\} \rightarrow R$

**Модель 2:**  $f(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2 I_1): \text{Alg}_{2^1}^{\text{Sp}(p,q,r)}(R|1, I_1) \rightarrow R$

В зависимости от алгебраической сигнатуры  $p+q+r=2$  существует по три типа изображений для каждой модели:

**Модель 1**

**Тип 1.1:**  $f(x_1 I_1 + x_2 I_2): \mathbf{R}_2^{\text{Sp}(2,0,0)} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

**Тип 1.2:**  $f(x_1 I_1 + x_2 I_2): \mathbf{R}_2^{\text{Sp}(1,1,0)} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

**Тип 1.3:**  $f(x_1 I_1 + x_2 I_2): \mathbf{R}_2^{\text{Sp}(1,0,1)} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

**Модель 4**

**Тип 4.1:**  $f(x_1 + x_2 I_1): \mathbf{R}_2^{\text{Sp}(1,0,0)} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

**Тип 4.2:**  $f(x_1 + x_2 I_1): \mathbf{R}_2^{\text{Sp}(0,1,0)} \rightarrow \mathbf{R}$ ,

**Тип 1.3:**  $f(x_1 + x_2 I_1): \mathbf{R}_2^{\text{Sp}(0,0,1)} \rightarrow \mathbf{R}$ .

Поскольку в поле вещественных чисел отсутствует мнимая составляющая, в приведенном перечне отсутствуют модели 2 и 3. Типы характеризуются парой  $[\text{Vec}^1 \{ \text{Alg}_{2^2}^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R}|1, I_1, I_2) \} \rightarrow R]$  для первой модели и  $[\text{Alg}_{2^1}^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R}|1, I_1) \rightarrow R]$  – для второй. Каждая пара содержит область определения и область значений изображения. Метрические свойства этих областей зависят от их алгебраических сигнатур. Например, изображения типов

$$[\text{Alg}_{2^1}^{Sp(2,0,0)}(\mathbf{R}|1, I_1) \rightarrow R], [\text{Alg}_{2^1}^{Sp(1,1,0)}(\mathbf{R}|1, I_1) \rightarrow R], [\text{Alg}_{2^1}^{Sp(1,0,1)}(\mathbf{R}|1, I_1) \rightarrow R]$$

в качестве областей определения имеют Евклидову плоскость классических комплексных чисел, плоскость Минковского двойных чисел и плоскость Галилея дуальных чисел, что было рассмотрено в секции 2.

**Пример 2.** Для бихроматических 2-D изображений  $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$  имеют место все четыре модели:

**Модель 1:**

$$f(x_1 I_1 + x_2 I_2) : \text{Vec}^1 \{ \text{Alg}_{2^2}^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R}|1, I_1, I_2) \} \rightarrow \text{Vec}^1 \{ \text{Alg}_{2^2}^{Vis(u,w,v)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2) \},$$

**Модель 2:**

$$f(x_1 I_1 + x_2 I_2) : \text{Vec}^1 \{ \text{Alg}_{2^2}^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R}|1, I_1, I_2) \} \rightarrow \text{Alg}_{2^1}^{Vis(u,w,v)}(\mathbf{R}|1, J_1),$$

**Модель 3:**

$$f(x_1 + x_2 I_2) : \text{Alg}_{2^1}^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R}|1, I_1) \rightarrow \text{Vec}^1 \{ \text{Alg}_{2^2}^{Vis(u,w,v)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2) \},$$

**Модель 4:**

$$f(x_1 + x_2 I_1) : \text{Alg}_{2^1}^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R}|1, I_1) \rightarrow \text{Alg}_{2^1}^{Vis(u,w,v)}(\mathbf{R}|1, J_1).$$

В зависимости от алгебраических сигнатур физического и перцептуального пространств ( $p+q+r=2$  и  $u+w+v=2$ ) существует 1) 36 типов изображений для первой модели 2) по 18 типов изображений для второй и третьей моделей и 3) 9 типов для четвертой модели.

Например, для моделей 1 и 4 мы имеем:

**Модель 1**

**Тип 1.1:**  $f(x_1I_1 + x_2I_2) : \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Sp(2,0,0)}(\mathbf{R}|1, I_1, I_2) \right\} \rightarrow \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Vis(2,0,0)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2) \right\},$

**Тип 1.2:**  $f(x_1I_1 + x_2I_2) : \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Sp(0,2,0)}(\mathbf{R}|1, I_1, I_2) \right\} \rightarrow \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Vis(2,0,0)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2) \right\},$

**Тип 1.3:**  $f(x_1I_1 + x_2I_2) : \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Sp(0,0,2)}(\mathbf{R}|1, I_1, I_2) \right\} \rightarrow \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Vis(2,0,0)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2) \right\},$

**Тип 1.4:**  $f(x_1I_1 + x_2I_2) : \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Sp(1,1,0)}(\mathbf{R}|1, I_1, I_2) \right\} \rightarrow \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Vis(2,0,0)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2) \right\},$

**Тип 1.5:**  $f(x_1I_1 + x_2I_2) : \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Sp(1,0,1)}(\mathbf{R}|1, I_1, I_2) \right\} \rightarrow \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Vis(2,0,0)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2) \right\},$

**Тип 1.6:**  $f(x_1I_1 + x_2I_2) : \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Sp(0,1,1)}(\mathbf{R}|1, I_1, I_2) \right\} \rightarrow \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Vis(2,0,0)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2) \right\},$

**Тип 1.31:**  $f(x_1I_1 + x_2I_2) : \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Sp(2,0,0)}(\mathbf{R}|1, I_1, I_2) \right\} \rightarrow \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Vis(0,1,1)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2) \right\},$

**Тип 1.32:**  $f(x_1I_1 + x_2I_2) : \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Sp(0,2,0)}(\mathbf{R}|1, I_1, I_2) \right\} \rightarrow \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Vis(0,1,1)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2) \right\},$

**Тип 1.33:**  $f(x_1I_1 + x_2I_2) : \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Sp(0,0,2)}(\mathbf{R}|1, I_1, I_2) \right\} \rightarrow \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Vis(0,1,1)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2) \right\},$

**Тип 1.34:**  $f(x_1I_1 + x_2I_2) : \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Sp(1,1,0)}(\mathbf{R}|1, I_1, I_2) \right\} \rightarrow \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Vis(0,1,1)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2) \right\},$

**Тип 1.35:**  $f(x_1I_1 + x_2I_2) : \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Sp(1,0,1)}(\mathbf{R}|1, I_1, I_2) \right\} \rightarrow \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Vis(0,1,1)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2) \right\},$

**Тип 1.36:**  $f(x_1I_1 + x_2I_2) : \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Sp(0,1,1)}(\mathbf{R}|1, I_1, I_2) \right\} \rightarrow \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathit{Alg}_{2^2}^{Vis(0,1,1)}(\mathbf{R}|1, J_1, J_2) \right\},$

**Модель 4**

**Тип 4.1:**  $f(x_1 + x_2I_1) : \mathit{Alg}_{2^1}^{Sp(1,0,0)}(\mathbf{R}|1, I_1) \rightarrow \mathit{Alg}_{2^1}^{Vis(1,0,0)}(\mathbf{R}|1, J_1),$

**Тип 4.2:**  $f(x_1 + x_2I_1) : \mathit{Alg}_{2^1}^{Sp(0,1,0)}(\mathbf{R}|1, I_1) \rightarrow \mathit{Alg}_{2^1}^{Vis(1,0,0)}(\mathbf{R}|1, J_1),$

**Тип 4.3:**  $f(x_1 + x_2I_1) : \mathit{Alg}_{2^1}^{Sp(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, I_1) \rightarrow \mathit{Alg}_{2^1}^{Vis(1,0,0)}(\mathbf{R}|1, J_1),$

**Тип 4.4:**  $f(x_1 + x_2I_1) : \mathit{Alg}_{2^1}^{Sp(1,0,0)}(\mathbf{R}|1, I_1) \rightarrow \mathit{Alg}_{2^1}^{Vis(0,1,0)}(\mathbf{R}|1, J_1),$

**Тип 4.5:**  $f(x_1 + x_2I_1) : \mathit{Alg}_{2^1}^{Sp(0,1,0)}(\mathbf{R}|1, I_1) \rightarrow \mathit{Alg}_{2^1}^{Vis(0,1,0)}(\mathbf{R}|1, J_1),$

**Тип 4.6:**  $f(x_1 + x_2I_1) : \mathit{Alg}_{2^1}^{Sp(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, I_1) \rightarrow \mathit{Alg}_{2^1}^{Vis(0,1,0)}(\mathbf{R}|1, J_1),$

**Тип 4.7:**  $f(x_1 + x_2I_1) : \mathit{Alg}_{2^1}^{Sp(1,0,0)}(\mathbf{R}|1, I_1) \rightarrow \mathit{Alg}_{2^1}^{Vis(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, J_1),$

**Тип 4.8:**  $f(x_1 + x_2I_1) : \mathit{Alg}_{2^1}^{Sp(0,1,0)}(\mathbf{R}|1, I_1) \rightarrow \mathit{Alg}_{2^1}^{Vis(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, J_1),$

**Тип 4.9:**  $f(x_1 + x_2I_1) : \mathit{Alg}_{2^1}^{Sp(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, I_1) \rightarrow \mathit{Alg}_{2^1}^{Vis(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, J_1).$

Каждый тип изображения характеризуется определенными геометриями физического и перцептуального пространств. Вывод инвариантов для всех выше приведенных моделей изображений с формальной точки зрения полностью



повторяет аналогичный вывод для кватернионного случая. Поэтому мы опускаем его в данном разделе. Читатель в качестве тренировки может повторить его самостоятельно. Полное изложение этих результатов можно найти в наших работах [61-67].

### *Заключение*

Разработан новый алгебраический подход к математическим моделям многоканальных изображений, основанный на коммутативных и некоммутативных гиперкомплексных алгебрах. Наша цель состояла в том, чтобы показать, что гиперкомплексные алгебры являются адекватным математическим аппаратом для описания многоканальных изображений. Более того можно привести достаточное количество аргументов в пользу того, что мозг животных в процессе эволюции приобрел способность оперировать гиперкомплексными числами в процессе обработки и распознавания изображений. Поэтому мозг животных может рассматриваться как компьютер, работающий в некоторой гиперкомплексной алгебре.

### *Благодарности*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 17-07-00886.

### *Литература*

1. Hubel D.N. Eye, Brain and Vision. New York, W.H. Freeman Co. 1988, 240p.
2. Ingle D. The goldfish as a retinex animal. *Science*. 1985, 227, pp. 6-51.
3. Cronin T., Marschal N. A retina with at least ten spectral types of photoreceptors in a mantis shrimp. *Nature*. 1989, 339, pp. 137-140.
4. Luneburg, R.K. The metric methods in binocular visual space. *JOptSocAmer*. 1950, 40(10), pp. 627-642.
5. Агостон А. Теория цвета и ее применение в искусстве и дизайне. М., Мир, 1982, 181 с.
6. Соколов Е.Н., Измайлов Ч.А. Цветовое зрение. М., Изд. Московского университета, 1982, 175 с.
7. Malakara D. Color Vision and Colorimetry. Theory and Applications. Bellingham, Washington, SPIE, 2002, 164 p.
8. Newton Sir Isaac. Opticks. London, Sam Smith and Benjamin, Walford, 1704, Also: New York, N.Y. Dover Publications, Inc., 1952,
9. Goethe J. Q. Theory of colours, v.287, translated by Charles Lock Eastlake. Cambridge, MA, MIT Press, 1970.
10. Young T. On the theory of light and colours. *Philosophical Transactions*, 1908, v. 1, 12, pp. 12-48.
11. Helmholtz. H.L.F. On the theory of compound colours. *Philosophical Magazine Series*. 1852, v. 4, 28, pp. 519-534.

12. Maxwell J. C. On the theory of three primary colors. *Proceedings of the Royal Institute*. 1858–1862, v.3, pp. 37–375.
13. Munsell A.H. A color notation. New Winsor, NY, Munsell, 1905, 328 p.
14. Grassmann H. Zur Theorie der Farbenmischung. *Ann Phys Chem*. 1853, v.165, 5, pp.69-84.
15. Zeki S. A Vision of the Brain. London, Blackwell Scientific Publications, 1993, 384 p.
16. Pohl C., van Genderen J. L. Multisensor image fusion in remote sensing: Concepts, methods, and applications. *Int. J. Remote Sens*. 1998, v.19, 5, pp. 823–854.
17. Gat N., Subramanian S., Barhen J., Toomarian N. Spectral Imaging Applications: Remote Sensing, Environmental Monitoring, Medicine, Military operations, factory Automation and Manufacturing. *25th AIPR Workshop on Emerging Applications of Computer Vision*. 1996, SPIE, v. 2962, pp. 63-77.
18. Gat N., Barhen J., Gulati S., Steiner T.D. Hyperspectral Imaging for Target/Decoy Discrimination: Sensor and Algorithms. *Proc. Mtg. IRIS Specialty Group on Passive Sensors*. 1994, IRIA Publication, 128 p.
19. Labunets V.G. Clifford Algebras as Unified Language for Multicolor Image Processing and Pattern Recognition. *Computational Noncommutative Algebra and Applications*. NATO/Advanced Study Institute. 2003, pp.197-225.
20. Labunets V.G., Rundblad E., Astola, J. Is the Brain a Clifford algebra quantum computer? Applied Geometrical Algebras in Computer Science and Engineering. (L. Dorst, C. Doran, J. Lasenby, Editots), Birkhauser, 2002, pp. 486-495.
21. Rundblad E., Labunets V.G., Astola J. Is the Visual Cortex a Fast Clifford algebra quantum computer? *Clifford Analysis and Its Applications*, II. Mathematics, Physics and Chemistry, 2001, v. 25, NATO Science Series, pp. 173-183.
22. Labunets V.G., Rundblad E., Astola, J. Is the brain Clifford algebra quantum computer? *Proc. of SPIE Materials and Devices for Photonic Circuits*. 2001, v.4453, pp. 134-145.
23. Kantor L., Solodnikov A. S. Hypercomplex Numbers, an Elementary Introduction to Algebras. New York, Springer-Verlag, 1989, 179 p.
24. Wedderburn J. H. On hypercomplex numbers. *Proc. London math. soc.* 1908, v.6, 77 p.
25. Hestenes D., Sobczyk G. Clifford Algebra to geometric calculus. A unified language for mathematics and Physics. *American Journal of Physics*. 1985, v.53, 5, pp.7-32.
26. Sobczyk G. Hyperbolic number plane. *The college Mathematical Journal*. 1995. v.26, 4, 268 p.
27. Fjelstad P. Extending relativity via the perplex numbers. *Am. J. Phys.*, 1986, v.54, 5, pp. 4-16.
28. Catoni F., Cannata R., Catoni V., Zampetti P. Hyperbolic trigonometry in two dimensional space-time geometry. *N. Cim. B*. 2003, v.118, 475-492 p.

29. Catoni F., Cannata R., Catoni V. and Zampetti P. Two-dimensional hypercomplex numbers and related trigonometries and geometries. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 2004, v. 14, 1, 47 p.
30. Catoni F., Zampetti P. Two dimensional space-time symmetry in hyperbolic functions, *N. Cim. B*. 2000, v. 115, pp. 14-33.
31. Keller J. Complex, duplex and real Clifford algebras. *Advances in Applied Clifford Algebras*. 1994, v. 4, pp.132-156
32. Yang L., Albergsten F. Fast Computation of Invariant Geometric Moments: A New Methods giving correct results. *Proc. IEEE Int. Conf. on Image Proc.* 1994, pp. 43-58
33. Hu, M.K., Patter Recognition by moment invariants. *Proc. IRE*. 1961, v.49, pp. 14-28.
34. Hu M.K. Visual patter recognition by moment invariants. *IEEE Trans. on Information Theory*. 1962, IT-8, pp. 179-187.
35. Maitra S. Moment invariants. *Proc. IEEE*, 1979, v. 67, pp. 697-699.
36. Reeves A.P., The general theory of moments and the parallel implementation of moment operations. *Technical Report TR-EE*. 1981, v. 10, pp. 81-91.
37. Teague M. Image analyses via the general theory of moments. *J. Opt. Soc. Am.* 1980, v. 70, pp. 920-930.
38. Abu-Mustafa Y., Psaltis D. Recognitive aspects of the moment invariants. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 1984, v. 6, pp. 1698-1706.
39. Abu-Mustafa Y., Psaltis D. Image normalization by complex moments. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 1984, v. 7, pp. 46-55.
40. Lucas D., Moment techniques in picture analysis. *CVPR*. 1983, 4, pp. 178-187.
41. Morgan A. On the foundation of algebra. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 1343, v.1, 3, pp. 948-1254
42. Greaves Ch. On algebraic triplets. *Proc. Irish Acad.* 1847, v.3, pp. 51-54, 57-64, 80-84, 105-108
43. Olariu S. Complex Numbers in Three Dimensions. arXiv:math. CV/0008120 v.1, 16 Aug. 2000, 42 p.
44. Dubrovski A., Volkov G. Ternary numbers and algebras. arXiv:hep-th/0608073 v2 14 Aug 2006.
45. Kerner R. Ternary algebraic structures and their applications in physics. Proceedings of the Conference ICGTMP "Group-23", 2000, Dubna, Russia, math-ph/0011023.
46. Lipatov L. N., Trautenberg M. R., Volkov G. G. On the ternary complex analysis and its Applications. arXiv:0711.0809v1 [math-ph] 6 Nov 2007.
47. Hamilton R.W. On Quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy. 1847, Nov.11, v.3, pp.1-16.
48. Hamilton W.R. Lectures on quaternions. Dublin, 1853, 886 p.
49. Hamilton W. R. Elements of Quaternions. New York, Chelsea Pub. Com.,

1969, 626 p.

50. Baez J. Octonions. Bull. Amer. Math. Soc. 2002, pp. 145-205.

51. Van der Varden B.L. Algebra. Berlin, New York, Springer, Verlag, 1968, 457 p.

52. Toppan F. Division algebras and Physics. Preprint-CBPF-MO-002/01.

53. Ward P. Quaternions and Cayley Numbers: Algebra and Applications. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997, 237 p.

54. Ablamowicz R., Sobczyk G. Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications. Basel, Birkhauser, 2004, 188 p.

55. Angulo, J.: Quaternion colour representations and derived total orderings for morphological operators. Proc. of the CGIV. 2008, pp. 417–422.

56. Clifford N.K. Mathematical papers. N.Y., 1968, 320 p.

57. L. Kantor and A. S. Solodnikov, Hypercomplex Numbers, an Elementary Introduction to Algebras. New York: Springer-Verlag, 1989, 128 p.

58. Wedderburn J. H. On hypercomplex numbers. Proc. London math. soc. 1908, v.6, pp. 77-118

59. Hestenes D., Sobczyk G. Clifford Algebra to geometric calculus. Reidel, Dordrecht, 1984, 224 p.

60. Громов Н.А. Контракции классических и квантовых групп. М. Физматлит. 2012, 318 с.

61. Rundblad E., Nikitin I., Labunets V. Unified Approach to Fourier-CliffordPrometheus Sequences, Transforms and Filter Banks. Computational Noncommutative Algebra and Applications, NATO/Advanced Study Institute, July 6-19, 2003, 389-400

62. Labunets V.G., Rundblad E.V., Astola, J. Fast invariant recognition of color 3D images based on spinor-valued moments and invariants. Proc. SPIE «Vision Geometry X». 2001, v. 4476, pp. 22-33.

63. Labunets V.G., Maidan A., Rundblad-Labunets E., Astola J. Colour tripletvalued wavelets and splines. Image and Signal Processing ana Analysis ISPA'01, June 19-21, Pula, Croatia. 2001, pp. 535-541.

64. Labunets V.G., Maidan A., Rundblad-Labunets E.V., Astola J. Colour tripletvalued wavelets, splines and median filters. Spectral Methods and Multirate Signal Processing, SMMSP'2001, June 16-18, Pula, Croati, 2001, pp. 61-70.

65. Labunets-Rundblad E.V. Fast Fourier-Clifford Transforms Design and Application in Invariant Recognition. PhD thesis. Tampere University Technology, Tampere, Finland, 2001, 262 p.

66. Rundblad-Labunets E.V., Labunets V.G. Astola J., Egiazarian K. Polovnev S.V. Fast invariant recognition of color images based on Triplet-Fourier-Gauss transform. Proc. of Int. Conf. Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, 2001, pp. 265-268.

67. Rundblad-Labunets E.V., Labunets V.G. Fast invariant recognition of multicolor images based on Triplet-Fourier-Gauss transform. Second Int. Workshop

on Transforms and Filter Banks. 1999, Tampere, Finland, TICSP Series. 4, 405-438.

***Is the brain a computer in Clifford algebra?***

Labunets V.G., Chasovskikh V.P.

Doctors of Technical Sciences, Ural State Economic University,  
Yekaterinburg, Russia

e-mail: vlabunets05@yahoo.com, u2007u@ya.ru

**Abstract.** We propose a new approach for processing multidimensional and multicomponent images, based on the theory of hypercomplex algebras, generalizing the algebra of complex numbers. They contain hypercomplex numbers, which are a linear combination of several imaginary units. The main goal of the work is to show that hypercomplex numbers can be used in the processing of multichannel images in a natural and efficient manner. In this work, we assume that animal brains operate with hypercomplex numbers when processing the multichannel images that appear on the retina of the eye. In our approach, each multichannel pixel is considered not as a K-dimensional (K-D) vector, but as a K-D hypercomplex number, where K is the number of different optical channels. This creates an effective mathematical basis for various functional-numeric transformations of multichannel images and invariant pattern recognition. This work should be seen as an invitation to readers to move away from their usual “hard vector-matrix” beliefs and thus join an algebraic hypercomplex understanding of what vision and recognition mean.

**Keywords:** multichannel images, hypercomplex algebras, image processing, pattern recognition, quantum computing.

**References**

1. Hubel D.N. Eye, Brain and Vision. New York, W.H. Freeman Co. 1988, 240 p.
2. Ingle D. The goldfish as a retinex animal. *Science*.1985, 227, pp. 6-51.
3. Cronin T., Marschal N. A retina with at least ten spectral types of photoreceptors in a mantis shrimp. *Nature*.1989, 339, pp. 137–140.
4. Luneburg, R.K. The metric methods in binocular visual space. *JOptSocAmer*.1950, 40(10), pp. 627–642.
5. Agoston A. Teoriya tsveta I eye primeneniye v iskusstve I dizaine [Color theory and its application in art and design]. M., Mir, 1982, 181 p.6.
6. Sokolov E.N., Izmailov Ch.A. Tsvetovoe zreniye [Color vision]. M., Ed. Moscow University, 1982, 175 p.
7. MalakaraD.ColorVision and Colorimetry. Theory and Applications. Bellingham, Washington, SPIE, 2002, 164 p.
8. Newton Sir Isaac. Opticks. London, Sam Smith and Benjamin, Walford, 1704, Also:New York, N.Y. Dover Publications, Inc., 1952,
9. Goethe J. Q. Theory of colours, v.287, translated by Charles Lock Eastlake. Cambridge, MA, MIT Press, 1970.
10. Young T. On the theory of light and colours.*Philosophical Transactions*, 1908, v. 1, 12, pp. 12-48.
- 11.Helmholtz. H.L.F. On the theory of compoundcolours. *Philosophical Magazine Series*.1852, v. 4, 28, pp. 519–534.
12. Maxwell J. C.On the theory of three primary colors. *Proceedings of the Royal Institute*.1858–1862, v.3, pp. 37–375.
13. Munsell A.H. A color notation. New Winsor, NY, Munsell, 1905, 328 p.

14. Grassmann H. Zur Theorie der Farbenmischung. *Ann Phys Chem.*1853, v.165, 5, pp.69-84.
15. Zeki S. A Vision of the Brain. London, Blackwell Scientific Publications, 1993, 384 p.
16. Pohl C., van Genderen J. L. Multisensor image fusion in remote sensing: Concepts, methods, and applications. *Int. J. Remote Sens.*1998, v.19, 5, pp. 823–854.
17. Gat N., Subramanian S., Barhen J., Toomarian N. Spectral Imaging Applications: Remote Sensing, Environmental Monitoring, Medicine, Military operations, factory Automation and Manufacturing. *25th AIPR Workshop on Emerging Applications of Computer Vision.* 1996, SPIE, v. 2962, pp. 63-77.
18. Gat N., Barhen J., Gulati S., Steiner T.D. Hyperspectral Imaging for Target/Decoy Discrimination: Sensor and Algorithms. *Proc. Mtg. IRIS Specialty Group on Passive Sensors.*1994, IRIA Publication, 128 p.
19. Labunets V.G. Clifford Algebras as Unified Language for Multicolor Image Processing and Pattern Recognition. *Computational Noncommutative Algebra and Applications.*NATO/Advanced Study Institute. 2003, pp.197-225.
20. Labunets V.G., Rundblad E., Astola, J. Is the Brain a Clifford algebra quantum computer? Applied Geometrical Algebras in Computer Science and Engineering. (L. Dorst, C. Doran, J. Lasenby, Editots), Birkhauser, 2002, pp. 486-495.
21. Rundblad E., Labunets V.G., Astola J. Is the Visual Cortex a Fast Clifford algebra quantum computer? *Clifford Analysis and Its Applications*, II. Mathematics, Physics and Chemistry, 2001, v. 25, NATO Science Series, pp. 173-183.
22. Labunets V.G., Rundblad E., Astola, J. Is the brain Clifford algebra quantum computer? *Proc. of SPIE Materials and Devices for Photonic Circuits.*2001, v.4453, pp. 134-145.
23. Kantor L., Solodnikov A. S. Hypercomplex Numbers, an Elementary Introduction to Algebras. New York, Springer-Verlag, 1989, 179 p.
24. Wedderburn J. H. On hypercomplex numbers. *Proc. London math. soc.* 1908, v.6, 77 p.
25. Hestenes D., Sobczyk G. Clifford Algebra to geometric calculus. A unified language for mathematics and Physics. *American Journal of Physics.* 1985, v.53, 5, pp.7-32.
26. Sobczyk G. Hyperbolic number plane. *The college Mathematical Journal.* 1995. v.26, 4, 268 p.
27. Fjelstad P. Extending relativity via the perplex numbers. *Am. J. Phys.*, 1986, v.54,5, pp. 4-16.
28. Catoni F., Cannata R., Catoni V., Zampetti P. Hyperbolic trigonometry in two dimensional space-time geometry. *N. Cim. B.*2003, v.118, 475-492 p.
29. Catoni F., Cannata R., Catoni V. and Zampetti P. Two-dimensional hypercomplex numbers and related trigonometries and geometries. *Advances in Applied Clifford Algebras.* 2004, v. 14, 1, 47 p.
30. Catoni F., Zampetti P. Two dimensional space-time symmetry in hyperbolic functions, *N. Cim. B.* 2000, v. 115, pp. 14-33.
31. Keller J. Complex, duplex and real Clifford algebras. *Advances in Applied Clifford Algebras.* 1994, v. 4, pp.132-156
32. Yang L., Albergsten F. Fast Computation of Invariant Geometric Moments: A New Methods giving correct results. *Proc. IEEE Int. Conf. on Image Proc.* 1994, pp. 43-58
33. Hu, M.K., Patter Recognition by moment invariants. *Proc. IRE.* 1961, v.49, pp. 14-28.
34. Hu M.K. Visual patten recognition by moment invariants. *IEEE Trans. on Information Theory.*1962, IT-8, pp. 179-187.
35. Maitra S. Moment invariants. *Proc. IEEE,* 1979, v. 67, pp. 697-699.
36. Reeves A.P., The general theory of moments and the parallel implementation of moment operations. *Technical Report TR-EE.*1981, v. 10, pp. 81-91.

37. Teague M. Image analyses via the general theory of moments. *J. Opt. Soc. Am.* 1980, v. 70, pp. 920-930.
38. Abu-Mustafa Y., Psaltis D. Recognitive aspects of the moment invariants. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 1984, v. 6, pp. 1698-1706.
39. Abu-Mustafa Y., Psaltis D. Image normalization by complex moments. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 1984, v. 7, pp. 46-55.
40. Lucas D., Moment techniques in picture analysis. CVPR. 1983, 4, pp. 178-187.
41. Morgan A. On the foundation of algebra. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, 1343, v.1, 3, pp. 948-1254
42. Greaves Ch. On algebraic triplets. *Proc. Irish Acad.* 1847, v.3, pp. 51-54, 57- 64, 80-84, 105-108
43. Olariu S. Complex Numbers in Three Dimensions. arXiv:math. CV/0008120 v.1, 16 Aug. 2000, 42 p.
44. Dubrovski A., Volkov G. Ternary numbers and algebras. arXiv:hep-th/0608073 v2 14 Aug 2006.
45. Kerner R. Ternary algebraic structures and their applications in physics. Proceedings of the Conference ICGTMP "Group-23", 2000, Dubna, Russia, math-ph/0011023.
46. Lipatov L. N., Trautenberg M. R., Volkov G. G. On the ternary complex analysis and its Applications. arXiv:0711.0809v1 [math-ph] 6 Nov 2007.
47. Hamilton R.W. On Quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy. 1847, Nov.11, v.3, pp.1-16.
48. Hamilton W.R. Lectures on quaternions. Dublin, 1853, 886 p.
49. Hamilton W. R. Elements of Quaternions. New York, Chelsea Pub. Com., 1969, 626 p.
50. Baez J. Octonions. *Bull. Amer. Math. Soc.* 2002, pp. 145-205.
51. Van der Varden B.L. Algebra. Berlin, New York, Springer, Verlag, 1968, 457 p.
52. Toppan F. Division algebras and Physics. Preprint-CBPF-MO-002/01.
53. Ward P. Quaternions and Cayley Numbers: Algebra and Applications. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997, 237 p.
54. Ablamowicz R., Sobczyk G. Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications. Basel, Birkhauser, 2004, 188 p.
55. Angulo, J.: Quaternion colour representations and derived total orderings for morphological operators. Proc. of the CGIV. 2008, pp. 417-422.
56. Clifford N.K. Mathematical papers. N.Y., 1968, 320 p.
57. L. Kantor and A. S. Solodnikov, Hypercomplex Numbers, an Elementary Introduction to Algebras. New York: Springer-Verlag, 1989, 128 p.
58. Wedderburn J. H. On hypercomplex numbers. *Proc. London math. soc.* 1908, v.6, pp. 77-118
59. Hestenes D., Sobczyk G. Clifford Algebra to geometric calculus. Reidel, Dordrecht, 1984, 224 p.
60. Gromov N.A. Kontraktsii klassicheskikh i kvantovikh grupp [Contractions of classical and quantum groups]. M. Fizmatlit. 2012, 318 p.
61. Rundblad E., Nikitin I., Labunets V. Unified Approach to Fourier-Clifford-Prometheus Sequences, Transforms and Filter Banks. Computational Noncommutative Algebra and Applications, NATO/Advanced Study Institute, July 6- 19, 2003, 389-400
62. Labunets V.G., Rundblad E.V., Astola, J. Fast invariant recognition of color 3D images based on spinor-valued moments and invariants. Proc. SPIE «Vision Geometry X». 2001, v. 4476, pp. 22-33.
63. Labunets V.G., Maidan A., Rundblad-Labunets E., Astola J. Colour triplet-valued wavelets and splines. Image and Signal Processing and Analysis ISPA'01, June 19-21, Pula, Croatia. 2001,

pp. 535-541.

64. Labunets V.G., Maidan A., Rundblad-Labunets E.V., Astola J. Colour tripletvalued wavelets, splines and median filters. Spectral Methods and Multirate Signal Processing, SMMSP'2001, June 16-18, Pula, Croati, 2001, pp. 61-70.

65. Labunets-Rundblad E.V. Fast Fourier-Clifford Transforms Design and Application in Invariant Recognition. PhD thesis. Tampere University Technology, Tampere, Finland, 2001, 262 p.

66. Rundblad-Labunets E.V., Labunets V.G. Astola J., Egiazarian K. Polovnev S.V. Fast invariant recognition of color images based on Triplet-Fourier-Gauss transform. Proc. of Int. Conf. Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, 2001, pp. 265-268.

67. Rundblad-Labunets E.V., Labunets V.G. Fast invariant recognition of multicolor images based on Triplet-Fourier-Gauss transform. Second Int. Workshop on Transforms and Filter Banks. 1999, Tampere, Finland, TICSP Series. 4, 405-438.



## **Что сегодня понимается под искусственным интеллектом**

Жданов А.А.

*Институт точной механики и вычислительной техники  
имени С. А. Лебедева РАН, Москва, a.zhdanov@mail.ru*

**Аннотация.** В работе изложены основные идеи предложенной и развиваемой автором биологически инспирированной теории «автономного адаптивного управления» (ААУ), которая описывает логически вынужденное представление о принципе действия, составе, структуре и алгоритме работы нервной системы (и мозга) любого живого организма, как управляющей системы (УС), помещенной внутрь объекта управления (ОУ), в свою очередь помещенного в среду с малоизвестными ему при рождении свойствами. Механизм, предлагаемый теорией ААУ, состоит в следующем. Мозг или другая управляющая система (УС), распознав текущую ситуацию в виде набора распознанных образов, обращается к своей памяти (базе знаний), находит там список возможных в этой ситуации действий и их следствий и выбирает для реализации то из них, которое приведёт к новой результирующей ситуации с максимальными из возможных здесь эмоциональных оценок. Для успешного функционирования такого механизма принятия решений необходимо постоянное самообучение - формирование новых образов, формирование их качественных (эмоциональных) оценок, формирование новых действий, формирование новых знаний, и формирование самих процедур такого формирования. Само функционирование УС по необходимости сводится к текущему параллельному решению двух задач - принятию оптимальных решений в текущей ситуации (оптимизационный алгоритм) и постоянному накоплению добываемых знаний (гносеологический алгоритм). Настоящие интеллектуальные системы, которые мы видим в природе, и не только у человека, но и у животных, работают, как считает автор, по этому принципу.

Но под системами ИИ сегодня понимают, в основном, автоматические системы анализа данных, к каковым относятся активно разрабатываемые сегодня нейросетевые системы классификации, системы распознавания образов, системы поиска корреляций (deep learning, big data, data mining), а также использование рефлекторной формы организации управления.

Перечисленное, как показано в работе, — лишь незначительная часть механизма ААУ и поэтому не может считаться полноценным интеллектом.

Биологический мозг по представлению автора является реализацией описанного принципа ААУ, предполагается, что его реализация в основных чертах возможна также в технических системах. Теория ААУ формализована до уровня, позволяющего программировать на ее основе системы управления с автономным поведением, в работе приведены примеры реально функционирующих прикладных систем. Важной отличительной чертой систем ААУ является наличие в них «аппарата эмоций» — многофункциональная подсистема качественного оценивания информации и мотивации управления. Аппарат эмоций является системообразующей подсистемой в любой нервной системе и должен быть таковой в системах ИИ. Основные задачи аппарата эмоций решены в теории ААУ и реализовывались во всех разработанных примерах.

**Ключевые слова:** алгоритмы, нервная система, рефлекс, аппарат эмоций, распознавание образов, поиск корреляций, автономные системы управления.

Сегодня тема искусственного интеллекта (ИИ) переросла научно-техническую сферу и распространилась даже в социальную область. Налицо два бы-

стро развивающихся аспекта этой темы – первый это научно-технические проблемы, над решением которых работают многие коллективы специалистов, и второй аспект – практическое использование средств ИИ. При этом второй аспект сильно обгоняет первый, то есть начинается бурное использование некоторых фрагментов ИИ, применение которых может дать уже не только сугубо экономические, но и иные социальные результаты. Целесообразно на текущем этапе определить состояние проблемы ИИ, чтобы было понятно, куда следует двигаться и чего можно ожидать в этой отрасли далее.

Под системами ИИ сегодня понимают, в основном, автоматические системы анализа данных, к каковым относятся активно разрабатываемые сегодня системы классификации, системы распознавания образов (сегодня мода на нейросетевые системы распознавания, которые едва ли не вытеснили иные) и системы поиска корреляций (*data mining*). При этом даже отошли на второй план системы поддержки принятия решений, экспертные системы, нечеткие системы, генетические алгоритмы. Можно ли считать эти системы ИИ действительно интеллектуальными? Если отталкиваться от определения, что интеллектуальными называются системы, выполняющие функции, которые ранее мог выполнять только человек, то ответ положительный. Если же смотреть на задачу с точки зрения того, соответствуют ли решаемые сегодня системами ИИ задачи тому комплексу задач, которые постоянно решает человек, осуществляя управление самим собой или чем-то другим, то ответ явно отрицательный, потому что все перечисленные выше задачи являются только частью этого комплекса задач, составляющих естественный интеллект. Да, человек постоянно решает задачи классификации, задачи распознавания и поиска корреляций. Но это отнюдь не все задачи, необходимые для управления, в обязательном порядке должны решаться еще некоторые задачи, и более того, все эти задачи должны быть объединены в один логичный взаимообусловленный комплекс. А о таком комплексе сегодня практически никогда не говорится, и создается впечатление, что он остается неосознанным большинством разработчиков систем ИИ.

Как же создатели систем ИИ могут говорить об интеллекте и об интеллектуальном управлении, если ими решены только частные задачи интеллекта? А это происходит по следующей причине. Существует множество полезных практических применений у каждой из частных задач искусственного интеллекта. Например, можно построить некоторые системы управления на базе только системы распознавания, если все остальные подзадачи не нужны, они как-то обойдены, и остается только распознать предъявленную ситуацию. Так работают, например, системы управления на базе искусственных нейронных сетей (ИНС). Можно управлять на основе экспертной системы, если решены все остальные задачи, а остается только обратиться к формализованному опыту эксперта. И тому подобное.

Итак, первое, на что мы хотим обратить внимание этой статьей – это то, что существует комплекс задач, которые в целом составляют алгоритм адаптив-

ного управления, логически вынужденно реализуемый мозгом человека и любого живого существа при управлении. Этот комплекс взаимообусловленных задач описан в нашей биологически инспирированной теории «автономного адаптивного управления» (ААУ) и представлен во многих публикациях (например, см. [1-3]). Теория ААУ описывает логически вынужденное представление о принципе действия, составе, структуре и алгоритме работы нервной системы (и мозга) любого живого организма, как управляющей системы (УС), помещенной внутрь объекта управления (ОУ), в свою очередь помещенного при рождении в среду с малоизвестными ему свойствами. Если предположить, что мы видим все эти исходные условия, в которых развивается жизнь, то единственная возможность выживания такого объекта в таких условиях связана с целесообразным управлением, основанном на знаниях, которые приходится добывать непосредственно в процессе жизни. Здесь требуется вполне определенная организация самообучаемого управления, которое может быть описано в терминах теории анализа данных и управления. Биологический мозг является формой реализации этого алгоритма, но его, по-видимому, можно реализовать в основных чертах и в технических системах. Если же мы видим не все условия (существует Бог, или некие надиндивидуальные системы управления, неконтролируемые пока нами связи передачи информации и другое), то и в этом случае, положения теории ААУ должны оставаться верными, но применимыми, как минимум, к «индивидуальной» части управления, либо под объектом управления следует понимать не индивида, а, например, популяцию и тому подобное, что не меняет существа принципа адаптивного управления. Рассмотрим лишь основные положения теории ААУ.

Мозг является информационной машиной и управляющей системой (УС), призванной обеспечить выживание тела за счет целесообразного управления, под которым нужно понимать управление, учитывающее реальные свойства системы «среда-тело-мозг». Эти свойства мозг должен выявить в потоке дискретной информации в процессе взаимодействия со средой через свои датчики и исполнители (интерфейс между преимущественно дискретным мозгом и аналоговым внешним миром), отразить в виде информационных структур – «знаний» и запомнить в соответствующем разделе памяти. Алгоритм работы мозга должен состоять из решения двух задач – добывания «знаний» и их использования для управления. «Знания» можно представить себе в виде структурированной коллекции «элементарных знаний», описываемых выражением

$$(\{O_i(t)\} \& D_j(t+1)) \rightarrow \{O_k(t+2)\} \rightarrow \{Z_k(t+3)\}. \quad (1)$$

Здесь  $t$  – это текущий момент времени упорядочивающего события в причинно-следственном отношении.

$\{O_i(t)\}$  – это множество представляющих текущее состояние распознанных образов, из тех, которые умеет распознавать система распознавания УС.

$D_j(t+1)$  – это одно из множества альтернативных действий, которые согласно эмпирическим знаниям УС может совершить при данных распознанных образах;

$\{O_k(t+2)\}$  – это образы результатов, которые будут получены, если УС выберет и совершит действие  $D_j(t+1)$ , согласно эмпирическому опыту, либо другим знаниям, хранящимся в памяти БЗ;

$\{Z_k(t+3)\}$  – это совокупность качественных оценок от аппарата эмоций, которые будут получены как следствие распознавания образов  $\{O_k(t+2)\}$ , что также основано на опыте или на других знаниях.

Смысл выражения (1) в том, что, распознав текущую ситуацию в виде множества распознанных образов  $\{O_i(t)\}$ , УС обращается к своей памяти (БЗ), находит там список возможных в этой ситуации действий  $D_j(t+1)$  и их следствий, и выбирает для реализации то из них, которое приведёт к результирующей ситуации  $\{O_k(t+2)\}$  с максимальными из возможных здесь эмоциональных оценок  $\{Z_k(t+3)\}$ . Это действие и выбирается УС для совершения.

Одна запись вида (1) в памяти УС есть *элементарное знание*, а их структурированная совокупность составляет *базу знаний* (БЗ).

Настоящие интеллектуальные системы, которые мы видим в природе, и не только у человека, но и у животных, работают, насколько мы понимаем, именно по этой формуле. Подробно этот принцип действия и основанная на нем наша концептуальная модель нервной системы, описаны в работах, например, [2, 3] и других. Здесь поясним его совсем коротко.

Очевидно, что принимать решения на основе такого рода знаний можно, если такие знания есть в памяти. Поэтому одновременно стоит задача о добывании этих знаний. И эти знания никто не приносит организму в полном объеме перед началом жизни в виде некой «обучающей выборки»! Эти знания мозгу приходится добывать в основном самостоятельно и в течение всей жизни. Следовательно, управление в природе состоит из параллельного решения 2-х основных задач – 1) принятия субоптимального решения в условиях распознаваемой ситуации и на множестве имеющихся знаний, и 2) добывание, структуризация и накопление знаний, необходимых для управления, то есть гносеологическая задача. Знания в виде структурированных записей вида (1) хранятся в памяти мозга, которую можно назвать базой знаний (БЗ). Мозг — это адаптивная (самообучаемая) система управления, поскольку постоянно происходят: формирование новых образов, формирование их качественных (эмоциональных) оценок, формирование новых действий, формирование новых знаний, и формирование самих процедур такого формирования. При этом под формированием понимаются процедуры обучения (самообучения, обучения с учителем, обучения путем формального вывода, а также дообучения и переобучения). Для выживания основное значение имеет именно самостоятельное добывание зна-

ний, а не получение их в каком-то виде (готовых знаний или обучающих выборок) извне, поэтому мозг можно назвать автономной адаптивной системой управления.

Рассмотрим 1-ю задачу. Для принятия текущего субоптимального решения в каждый текущий момент времени  $t$  УС распознает текущую ситуацию с помощью своей системы распознавания, результатом чего является множество распознанных образов  $\{O_i(t)\}$ . Далее УС должна принять решение о том, какое из известных ей действий  $D_j(t+1)$ , совершение которых доступно ей в текущей ситуации, следует выбрать для реализации в следующий момент времени  $(t+1)$ . Выбор оптимального действия производится по критерию максимизации суммарной качественной оценки от множества индивидуальных качественных оценок  $\{Z_k(t+3)\}$  тех образов  $\{O_k(t+2)\}$ , множество которых ожидается распознать в результате реализации выбранного действия. Обоснованность ожиданий получения именно этих результатов от совершения данного действия обусловлена тем, что в БЗ попадают только надежные, статистически обоснованные знания вида (1), добытые либо эмпирически собственным опытом, либо полученные из надежных источников (от учителей, из вербализованных знаний предков и тому подобное). Глубина просмотра БЗ при принятии решения ограничена временем, отведенным на принятие решений, которое, как указано в [1], является функцией от текущего общего «эмоционального» (качественного) состояния УС.

Помимо этого, в алгоритме принятия решений имеются средства, обеспечивающие случайный элемент при выборе, обязательно необходимый для УС, как будет указано ниже. В этом, коротко, состоит алгоритм принятия субоптимального текущего решений.

2-я задача состоит в добывании знаний, которыми наполняется БЗ, так как при отсутствии знаний никакое управление невозможно. Проблеме поиска знаний посвящен раздел философии, называемый гносеологией. Основным результатом гносеологии можно считать алгоритм поиска новых знаний, который, коротко, состоит из следующих шагов:

1) обобщи имеющиеся данные и сделай прогноз о содержании будущих данных с указанием вероятностного интервала их возможных значений, то есть сформируй набор гипотез и критерий их правильности;

2) проведи последовательную практическую проверку этих гипотез;

3) найди ту из проверенных гипотез, которая больше других удовлетворяет принятым критериям, проведи ее всестороннюю проверку и уточнение с целью повышения коэффициента ее подтвержденности, объясненности, простоты формализации, и убедись, что эта гипотеза может быть переведена в ранг законов природы;

4) добавь эти новые данные в множество имеющихся данных;

5) возвращайся к шагу 1 и продолжай в этом же порядке.

Отметим здесь, что генерация гипотез на шаге 1 осуществляется с участием некоторого элемента случайности, поскольку, если бы была полная детерминированность в прогнозировании, то гипотезы были бы не нужны. А это позволяет говорить о применении метода «проб и ошибок» при поиске новых знаний.

Можно предполагать (но не утверждать), что все элементы знаний, участвующие в формуле (1), являются результатами поиска, следовательно, настоящая система, соответствующая по свойствам живому интеллекту, должна быть самообучаемой, то есть адаптивной в смысле ее способности к автоматическому приспособлению за счет поиска новых знаний. А именно, автоматически управляющей системой должны быть найдены: образы  $O_i$  и  $O_k$  – с помощью самообучаемой (преимущественно – без учителя) системы распознавания; действия  $D_j$ , и качественные («эмоциональные») оценки  $Z_k$ , как определенные информационные элементы, тоже формируются автоматически методами кластеризации. Указанные в (1) закономерные, статистически неслучайные причинно-следственные связи между этими элементами тоже могут быть найдены автоматически методами поиска закономерностей в данных.

В сущности, формула (1) и представляет собой формулу интеллектуального управления, а его алгоритм коротко описан выше. Тем не менее, то, что сегодня называется системами ИИ, не реализуют ни эту формулу, ни этот алгоритм. Все развитие ИИ сегодня дошло только до автоматизации решения всего двух элементов формулы (1) и построенном на них примитивном алгоритме управления. А именно. Сегодня большие успехи достигнуты в теории и практическом построении систем распознавания (СР), которые способны распознавать образы  $O_i$  и  $O_k$ , соответствующие первому и предпоследнему элементам формулы (1). Это системы распознавания (СР): детерминированные (геометрические), вероятностные, логические, структурные, комбинированные (АВО), а также ИНС, которые можно отнести к геометрическим или вероятностным СР. При этом даже задача распознавания образов решена, практически, только наполовину, так как в львиной своей доле это не самообучаемые СР, а СР, обучаемые с учителем, то есть требующие предварительного обучения на обучающих выборках (это хорошо известно и тем, кто использует модные нынче «нейросети глубокого обучения» *deep learning*). СР, обучаемые с учителем, должны быть обучены по имеющейся обучающей выборке прецедентов до момента начала их использования в рабочем режиме, а после этого любое дообучение или переобучение такой СР уже запрещено, так как при этом обученная нейросетевая СР может забыть все свои навыки. Очевидно, во-первых, что это совершенно не соответствует свойствам мозга, который обучается не «предварительно», а постоянно, всю свою жизнь и в одном рабочем процессе с распознаванием и управлением, при этом непрерывно дообучаясь и переобучаясь.

На основе системы распознавания образов, обучаемой с учителем, конечно, можно решать много практических полезных задач. Можно научить СР автома-

тически распознавать (классифицировать) какие-то объекты, процессы, ситуации - рукописные тексты, голос, номера машин, фигуры и лица людей, и тому подобное, инциденты, нарушения, аварийные или предаварийные ситуации и тому подобное, и можно также аппроксимировать функции. Собственно, это всё. Да, распознавание — это интеллектуальная операция. Но составляет ли она интеллект? Нет, конечно! Потому что в природе интеллектуальные системы не просто что-то классифицируют и распознают, но используют это для управления. Мало что-то распознать, надо еще понимать, что с этим делать дальше. На эти вопросы особо продвинутых ответов не предлагается. Живой пример с последней эпидемией. Первая важная задача – научиться распознавать вирус. Она была решена. Найдены тесты, распознающие наличие вируса. Но достаточно ли этого для управления ситуацией? Отнюдь нет! Потому что дальше было необходимо понять, а что следует делать при распознавании вируса? Эту задачу – задачу принятия решения - решали долго, и она гораздо более сложная, чем решение задачи распознавания. Эта задача также решалась в процессе поиска закономерных причинно-следственных цепочек, и решалась путем анализа данных, выдвижения гипотез и их последовательной проверки, то есть по указанному выше гносеологическому алгоритму. Если бы мы послали робот-зонд на другую планету, то он должен был бы автономно решать обе этих задачи – и научиться распознавать вирус, и научиться бороться с ним. Для этого такому роботу была бы нужна система ААУ, а не рефлекторная ИНС, хоть и *deep learning*. Но есть еще и третья задача – задача формирования целей и критериев качественного оценивания образов и действий. Подход *reinforcement learning* – это лишь очень простое частное решение.

Одна группа предлагаемых сегодня ответов на вопрос о том, как строить систему управления, связана с предложением искать корреляции разных событий – это то, что называется *big data* (например, удалось выяснить, что молодые отцы вместе с памперсами покупают обычно и пиво). Безусловно, из таких корреляций можно извлечь определенную пользу, но назвать это интеллектуальным принципом управления все же никак нельзя.

Вторая группа ответов связана с предложением использовать результаты распознавания в управлении по принципу рефлексов: если распознана такая-то ситуация, то делай строго назначенное действие, а если распознана другая ситуация, то делай строго назначенное другое действие, то есть предлагают рефлекторную и реактивную формулу управления в виде формулы рефлекса *стимул* → *реакция*:

$$O_i(t) \rightarrow D_j(t+1). \quad (2)$$

Эта формула управления типична для всей нашей цивилизации и воплощает нашу мечту об обладании рабами, на сей раз – техническими, которые без усталости и точно выполняют наши приказания: распознал стимул (команду, ситуацию или тому подобное) – делай то действие (реакцию), которому тебя научили по воле хозяина. Почему при распознавании данного стимула надо делать имен-

но это действие? Потому, что так хочет хозяин, это действие является наилучшим именно для хозяина, даже если оно вредно для выживания ОУ, и, чтобы заставить управляющую систему реагировать на данный стимул именно так, как этого хочется хозяину, придумано «обучение с подкреплением» - раба (или робота) поощряют за совершение желаемого действия и наказывают за совершение любого другого варианта действия. Желания и потребности самого исполнителя (УС, робота и т.п.) в расчет могут не приниматься. Рефлекторная формула управления реактивна, то есть, УС начинает работать, реагировать, только тогда, когда получит толчок – стимул. Очевидно, что рефлекторное поведение не имеет отношения к интеллекту. Однако, практически, все современные автоматические системы управления построены именно на этой формуле. Таковы системы на основе классической ТАУ, нечеткие системы управления, нейросетевые системы, системы с подкрепляющим обучением. И все это сегодня уже называют системами искусственного интеллекта, хотя от интеллекта это еще довольно далеко, как следует из сравнения формулы (2) с формулой (1).

Несмотря на то, что современные, так называемые, системы ИИ работают по формуле (2) и еще весьма далеки от воспроизведения принципа управления, присущего настоящему интеллекту (1), можно предположить, что все технические и теоретические проблемы реализации формулы (1) будут решены в недалеком будущем, и появятся системы, действительно сравнимые по своим свойствам с естественным интеллектом. Следует ли тогда праздновать победу? На наш взгляд – отнюдь нет, так как именно в этот момент мы и выйдем на главную и, как сейчас представляется, неразрешимую проблему. А именно, это проблема автоматической генерации качественных оценок  $Z_k$ , образов в формуле (1). В природе эту задачу решают эмоциональные системы живых организмов. Каждый организм в природе имеет эмоциональную систему, благодаря которой он чувствует и различает приятные и неприятные ощущения, стремится к получению первых и бежит от последних. Возможно, именно с наличием этой системы можно связать библейские слова о том, что бог вдохнул душу в живое. Подробно про аппарат эмоций мы писали в работах [4, 5, 3], где показано, что аппарат эмоций является системообразующей подсистемой в любой нервной системе, и должен быть таковой в системах ИИ.

Не будем здесь глубоко рассматривать проблему формирования алгоритмов оценивания качественных (эмоциональных) характеристик состояний ОУ и совершаемых им действий. Выскажем только несколько положений.

1. Прежде всего, очевидно, что указанные выше целевые функции мозга и его модели – системы ААУ – а) выживание и б) накопление знаний, это целевые функции, которыми, по-видимому, руководствовался создатель таких ОУ, как живые организмы, или некий процесс, который играет его роль. Так, если бы мы создавали робота для исследования другой планеты, то мы заложили бы в него именно эти целевые функции, и заложили бы их не просто в алгоритм принятия решений, но и во всю конструкцию робота и его программного обеспече-



ния. Однако, непосредственно в алгоритм принятия решений пришлось бы закладывать редуцированные, замаскированные, скрытые целевые функции, например, максимизация некоторых количественных качественных оценок, определяемых некоторым явным вычислительным способом. В природе, таким замаскированным способом задания целевых функций является аппарат эмоций с его упорядоченной шкалой эмоциональных оценок, реализованных с помощью неких нейронных конструкций, раздражение которых ближе к одному краю этой структуры «неприятно» живому организму, а ближе к другому краю – «приятно». Такую простую конструкцию можно зашить в бортовой компьютер даже самого простого организма. Тем самым, наличествует некая иерархическая система целевых функций, часть из которых понятна мозгу, а часть из них может быть ему непонятна, зато она понятна тому, кто играл или играет роль создателя этих организмов.

2. Соответствие модальных «приятных» и «неприятных» оценок с объективно полезными и вредными для организма состояниями может осуществляться, как минимум, посредством естественного отбора, при котором организмы с неправильными соответствиями погибают по очевидным причинам. Такие образы и их оценки могут являться базовыми, отражать находки всего эволюционного пути развития вида, и передаваться новорожденному организму по наследству, в качестве его априорной информации. Качественные (эмоциональные) оценки для неочевидных случаев, новых образов, находятся уже путем поиска корреляций с базовыми состояниями.

3. Такая конструкция аппарата эмоций предусматривает простую, легко программируемую мотивацию поведения любого мозга – это стремление к как можно более «приятным» состояниям. Эта непосредственная «целевая функция», скрывающая, редуцирующая, но и реализующая истинные цели создателя ОУ, понятная любому живому организму, даже самому простому. Средством достижения такой цели являются действия, вызывающие состояния, понимаемые в виде распознаваемых образов и привязанных к ним качественных оценок.

4. Качественные, «эмоциональные» оценки возможных состояний, образов – это наиболее важная вещь в управлении! Именно эти оценки определяют выбор действий при принятии решений. Любой организм выбирает то направление, которое он по какой-либо причине, как объективной, так и ложной, считает наилучшим. Важнейший способ управления в обществе – это сформировать систему качественных оценок, внушить людям «что такое «хорошо» и что такое «плохо»» (В. Маяковский), и сделать это так, как необходимо тому, кто хочет вести управление. Трудно заставлять людей силой идти туда, куда кто-то хочет. Но если он внушит им, где «хорошо», а где «плохо», то люди сами пойдут туда, где «хорошо». Что делают при обучении нейросетевой системы управления при ее обучении с помощью какого-нибудь алгоритма *reinforcement learning*? – обучают систему управления направлять объект управления туда, куда нужно этому заказчику. Для другого заказчика, «хорошим» может оказаться совсем другая

целевая точка. То есть вопрос о качественных критериях управления – самый важный! В человеческой цивилизации вопросы о том, что такое «хорошо» и что такое «плохо», решались веками. Веками формировались качественные оценки во всех разделах жизни – в законах, в политике, в религии, в экономике, в военном деле, в быту, в производстве, в медицине, в кулинарии, в строительстве и так далее и так далее. Система этих оценок и формирует основное богатство и достижение цивилизации. Что такое «гуманизм»? – это система качественных оценок, результат мучительного процесса их многовекового формирования. А их применение – очень конкретно, реально и практично, – например, при принятии решения в суде – виновен или не виновен, казнить или помиловать? Кого поощрить, а кого наказать, кого убить, а кого оставить в живых и так далее. В отношении как отдельных людей, так и всех их групп, дел и процессов. Но в человеческом обществе консенсуса в этом вопросе до сих пор нет! К сожалению, даже в самых базовых вопросах. Поэтому предложить какие-то формальные процедуры выработки таких оценок нельзя! То есть отдать вопрос о формировании ответов на вопрос «что такое «хорошо» и что такое «плохо»» системам ИИ категорически нельзя! Другими словами, даже если все проблемы с созданием высокоэффективных систем распознавания и систем принятия решений будут решены, то, все равно, систем ИИ построить будет нельзя в силу неразрешимости вопроса о выработке качественных критериев.

В целом состав и структура системы ААУ, как концептуальной модели нервной системы, может быть представлена схемой (рис. 1), на которой указаны все основные необходимые для осуществления автономного адаптивного управления подсистемы и разделы памяти. Описание схемы и принципа действия было дано выше, более подробное описание можно найти в [3]. Отметим еще раз, что мозг должен иметь два основных контура работы. Один контур работает с "гносеологической целевой функцией добывания и накопления знаний", он работает в фоновом режиме и не торопясь, анализируя хранящуюся в памяти архивную информацию о процессе управления, из которой путем определенной ее обработки извлекаются необходимые закономерные элементы знаний и сохраняются в соответствующих разделах памяти. Другой контур работает с целевой функцией «выживания». Это быстродействующий контур, он работает, осуществляя управление в реальном времени, осуществляя принятие субоптимальных решений с использованием тех знаний, которые уже накоплены в соответствующих разделах памяти мозга.

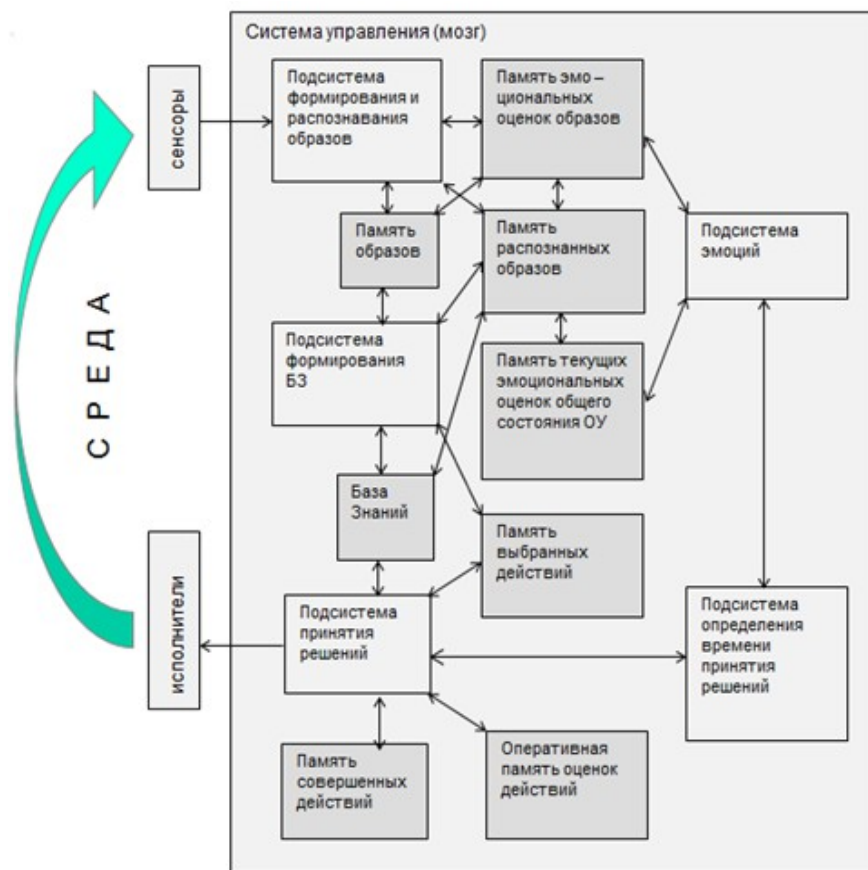


Рис. 1. Схема системы ААУ – концептуальной модели нервной системы и мозга.

Отметим, что мы большое внимание уделили способам реализации систем ААУ. В общем виде, представленном на рис.1, системы ААУ можно собирать из подходящих решений для отдельных указанных ее подсистем, объединяя все в указанную систему. Особый интерес вызывает способ конструирования систем ААУ на основе нейронных конструкций. Поскольку нас совершенно не устраивает понимание нейрона в модели Маккалока-Питтса как порогового сумматора, а мы утверждаем, что нейрон сам по себе является уже самообучаемой системой распознавания, то нами разработаны собственные модели нейрона [9]. Оказалось, что на базе таких нейронов можно построить все подсистемы системы ААУ. Попытки построить систему ААУ на базе известных ИНС до сих пор успехом не увенчались из-за эффекта «катастрофического забывания», демонстрируемого ИНС при попытке их дообучать или переобучать. Интересное решение, найденное нами, состояло в том, что один наш нейрон ААУ удалось воспроизвести 9-слойной сетью из нейронов Маккалока-Питтса [10], что открывает возможность построить и всю систему ААУ на основе ИНС.

Необходимо сказать еще о следующем аспекте любого адаптивного управления. Известно, что у любого метода самообучения есть некоторая мощность, определяющая возможности его самообучения. Она определяется в любом случае числом тех гипотез, которые такая система может проверить и отобрать

одну из них на основе заданного критерия. Но ни сами гипотезы, ни критерий отбора удачных из них, никакая самообучаемая система сформировать не может (если только это тоже не будет задано разработчиком в виде набора). Например, распознающая мощность СР определяется заданным алфавитом классов (списком распознаваемых образов), либо, если это самообучаемая СР – то теми правилами формирования образов, которые в нее заложены. В разных реализациях СР это конкретизируется значениями разных заранее заданных параметров (например, в ИНС – числом слоев нейросети, числом нейронов, числом входов и выходов, видом активационных функций и т.п.). Так же и в природном мозге – число нейронов, имеющиеся межнейронные связи, способность формировать эти новые связи и другие тому подобные признаки определяют способность мозга к формированию образов, знаний и действий. Не говоря уж обо всем остальном «аппаратном и программном обеспечении». Поэтому никогда не удастся обучить, например, муху читать и тому подобное. Все эти параметры СР, необходимые для ее построения и определяющие ее «мощность самообучения», являются априорными по отношению к данной СР. Они должны быть откуда-то взяты и кем-то заданы. Вместе с тем они должны быть максимально оптимизированными для данного ОУ. Откуда же они берутся, если только не заданы неким Создателем? Можно утверждать, что, во всяком случае, в большой мере они являются результатом поиска тоже некоторой поисковой адаптивной системы, но принадлежащей некоторому более общему уровню создания и эволюционной оптимизации вида таких объектов. В природе это, например, механизмы эволюционного формирования видов посредством мутаций, генетической наследственности и естественного отбора.

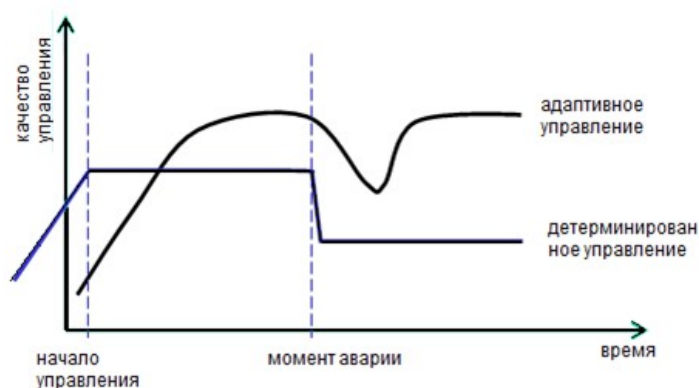
Тем самым, формирование и функционирование ОУ и его системы управления выглядит как работа многоуровневой адаптивной системы. На одном адаптивном уровне в результате поиска определяются параметры, которые станут априорной информацией для поисковой адаптивной системы управления на другом уровне и так далее.

Отметим также, что любая адаптивная машина имеет не только ограниченную «мощность адаптации», но и ограниченную память, для хранения результатов своего поиска. Так, в самом исходном своем состоянии новые знания содержатся в виде информационных записей в памяти. В живом – это, возможно, веса синапсов. В технике – это информация в памяти компьютера. Но долго хранить ни то, ни другое нельзя. Нужно освобождать память адаптивной машины. Адаптивную информационную машину можно уподобить некоему землепроходческому снаряду, у которого есть проходческая головка, грызущая породу неизвестного, и некоторая небольшая буферная память для складирования добытых материалов. Но дальше добытые знания нужно изымать из этого ценного проходческого снаряда, освобождая его. Таким инструментом активного познания в живом является мозг. Накопленные им знания надо выводить из него, освобождая место для новой работы. Можно думать, что наиболее надежные

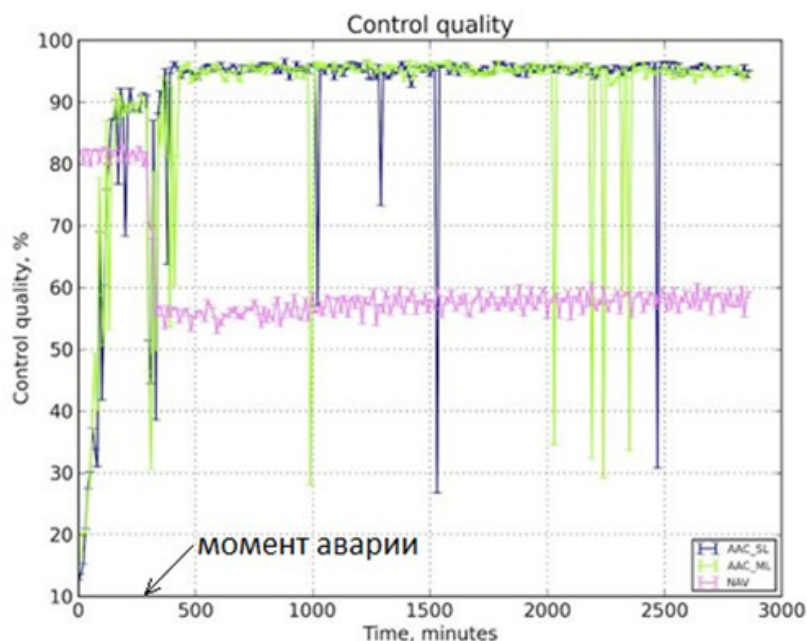
знания, уже не требующие знания вариантов и раздумий о том, какой вариант следует выбирать, выводятся из мозга в форме рефлексов и переводятся в спинной мозг, в периферическую нервную систему. При этом ресурсы мозга высвобождаются для поиска новых знаний. Но и периферическая нервная система имеет не беспредельные ресурсы памяти, поэтому рефлекторные знания следует выводить и оттуда тоже. Как минимум, частично такие знания переводятся уже в само «железо» ОУ, в его *hardware*, в его тело. Например, какие-то способы поведения в среде вначале находились мозгом как программы для управления имеющимися приводами, затем они оптимизировались и уже в виде рефлексов переписывались в спинной мозг, а затем овеществлялись уже в самой структуре приводов. Например, есть гипотеза, что моржи произошли от древних медведей (семейство моржовых (*Odobenidae*) состоит в родстве с медвежьими (*Ursidae*) и происходит от общих с последними предков). Тогда, можно думать, эти древние медведи учились нырять за кормом в прибрежную воду, находя способ использовать предназначенные для ходьбы лапы для гребли в воде. Затем эти навыки закрепились в рефлекторной форме, а затем на каком-то этапе перешли уже в форму ласт. То есть тело само по себе безусловно является памятью, в материализованном виде сохраняющем приобретенные некогда данным видом знания (я говорю не о наследовании приобретенных особью навыков). Из сказанного здесь следует, что мозг, как машина познания, обладает большими, но ограниченными возможностями для познания, и требует своевременной выгрузки из него накопленных знаний в более долговременные формы их хранения. Указанный путь перевода надежных знаний в форму рефлексов, а затем и в тело, не единственный. Следует ожидать, что возможна и непосредственная выгрузка знаний из мозга в какие-то, например, распределенные системы памяти [6]. Принципиально такой механизм вполне возможен, хотя его конкретные составляющие в живой природе сегодня пока только нащупываются. Было бы странно, если бы такая возможность не была реализована в природе.

С точки зрения задачи построения биологически подобных систем ИИ сказанное должно убедить нас в том, что помимо чисто технических проблем – разработки адаптивных программ и машин, существует еще проблема многоуровневой иерархической оптимизации таких машин. При этом некоторые уровни таких оптимизационных технологий реализуются на очень долговременных масштабах и на материале эволюционирующих видов. Надо понимать, что человек, вместе с его мозгом, как интеллектуальная система, есть не только результат его самообучения в пост- и пренатальной фазе его жизни, но и результат конкретной жизни и отбора всех его бесчисленных предков, как и результат эволюционной оптимизации всего вида *homo sapiens*. В человеке оптимизировано всё – не только его тело, и не только физиологическое устройство его мозга, но и программы, по которым работает его мозг, в том числе априорные правила формирования образов и знаний, эмоциональных оценок и многое другое. Кроме того, оптимизированными в течение многих веков являются и сформирован-

ные образы, вошедшие в основы той или иной культуры или цивилизации, различные информационные шаблоны, структуры и тому подобное (например, в Африке существует племя, где сформировалась совсем отличная от европейской система классификации цветов, и они не отличают красного от зеленого не потому, что дальтоники). Про многовековую выработку качественных оценок «хорошо-плохо» мы уже говорили. Итак, даже разработав мощные адаптивные алгоритмы, мы не сможем получить систему ИИ, хоть как-то сравнимую с человеческой, без длительной эволюционной оптимизации всей системы.



а)



б)

Рис. 2. Сравнение динамики качества управления, обеспечиваемого системой ААУ и детерминированной системой управления; а) общий вид, б) скриншот реального эксперимента.

Если даже удастся заменить многовековую эволюцию быстрооптимизирующейся ее моделью на неких суперкомпьютерах, то велика ли надежда на то, что рожденный в этой модельной эволюции ИИ будет способен дружелюбно

взаимодействовать с человеком? И, хотя, сегодня под ИИ понимаются еще только самые простые, обычно даже не адаптивные системы распознавания, которым еще далеко до управления и до всех описанных выше свойств, полезно уже сегодня задумываться над этими вопросами [7].

В заключение скажем несколько слов о возможностях построения искусственных нервных систем на основе кратко изложенного выше биологически-инспирированного принципа «автономного адаптивного управления» (ААУ).

Описанный выше алгоритм ААУ имеет достаточно полную математическую формализацию [3, 8], позволяющую программировать системы управления на основе метода ААУ для прикладных объектов управления. Для оценивания полученных результатов необходимо еще раз отметить основные свойства таких реализаций, на которые следует обращать внимание.

1. Все прикладные системы управления ААУ созданы не на основе традиционного подхода, связанного с построением математических моделей ОУ в виде дифференциальных уравнений и решений по ним «обратных задач». Этот подход не использовался совсем. Использовались инструменты из теоретико-множественных подходов над множествами информационных объектов, и другие способы, необходимые для поиска статистических корреляций и записи информационных структур в памяти.

2. Априорная информация используется для определения начального пространства признаков и начального множества действий, обеспечивающих выполнение принципов наблюдаемости и управляемости, для описания правил формирования образов и знаний, а также для задания качественных критериев, соответствующего целям данного приложения. Обучающие выборки в общем случае не используются. При традиционных подходах к управлению, априорная информация, в частности, обучающие выборки, используется для тотального обучения системы управления еще до начала управления в рабочем режиме, после чего обучаться уже, как правило, нельзя.

3. Управление с использованием системы ААУ может начинаться как при пустой начальной базе знаний, так и при частично заполненной. Самообучение, дообучение и переобучение системы ААУ осуществляется непосредственно в процессе управления. При традиционных (детерминированных) подходах система управления обучается еще до начала управления до состояния, когда она обеспечивает максимально возможное качество управления.

4. При использовании системы ААУ качество управления повышается по мере наполнения БЗ эмпирическими знаниями (рис. 2) и в некоторый момент достигает уровня качества управления традиционной системы управления и превышает его за счет адаптации к реальным и актуальным свойствам ОУ. Дообучение происходит до тех пор, пока не будут исчерпаны ресурсы системы ААУ – объемы памяти и тому подобное.

5. Если в процессе управления что-то случается (авария), и свойства ОУ или окружающей среды меняются в допустимых пределах, то качество управле-

ния, обеспечиваемое детерминированной системой управления, падает. Но система ААУ может переобучиться и снова обеспечить высокое качество управления (рис. 2). Нами разработано достаточно много прототипов прикладных машин и систем с адаптивным управлением на основе метода ААУ. Все они демонстрируют перечисленные выше свойства. Приведем несколько примеров.

### *Адаптивное управление угловым движением космического аппарата*

По мере самообучения система ААУ учится управлять угловым движением спутника, например, стабилизировать его [11, 12]. Качество управления постепенно растет и в прототипной модели в 7 раз превосходило качество управления, обеспечиваемое традиционной системой управления (рис. 3).

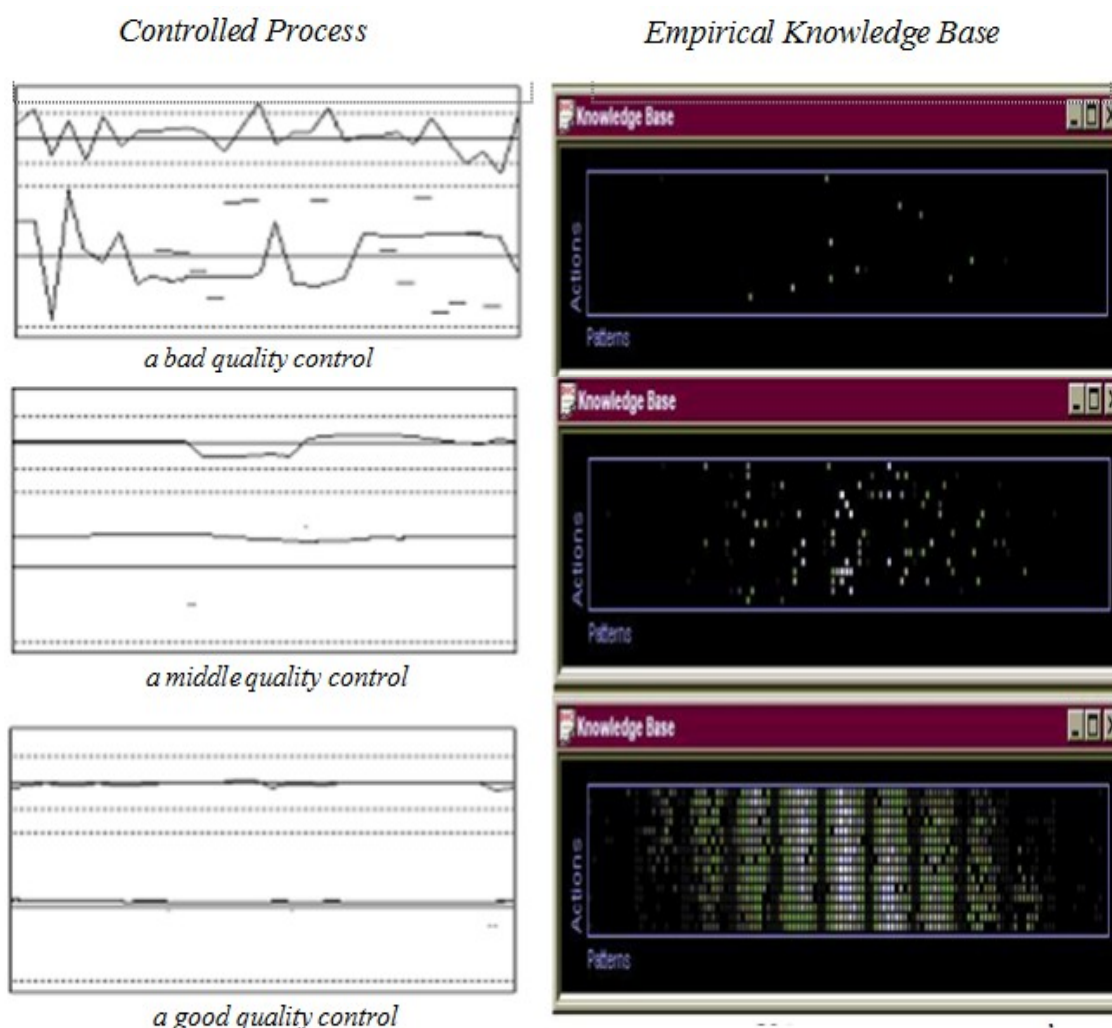
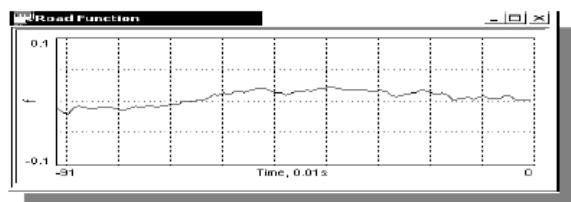


Рис. 3. Скриншот имитационной программы, демонстрирующей адаптивное управление угловым движением космического аппарата. Слева разброс угловой скорости и углового ускорения, которые следует научиться держать возле нулевого значения. Справа база знаний. Три последовательных во времени (сверху вниз) эпизода. Видно, что в результате самообучения достигнуто высокое качество управления.

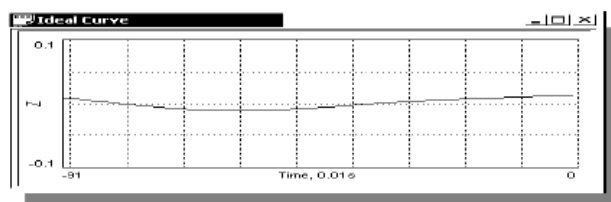


### Адаптивное управление активной подвеской автомобиля

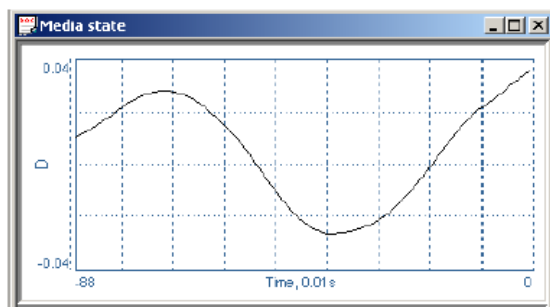
В этом прототипе [13] была отработана возможность применения системы ААУ для адаптивного управления активной подвеской транспортного средства. Показано, что при наличии соответствующих активных или пассивных приводов в подвеске, возможно самообучение системы управления, приспособляющейся к текущим свойствам транспортного средства и дорожного полотна, в результате чего можно существенно увеличить управляемость и качество движения автомобиля. На рисунке 4 показаны графики эпизода моделирования, показывающие текущий профиль дороги, движение поддрессоренной массы (корпуса автомобиля) без системы управления, вычисленное желаемое движение и приближенное к нему движение поддрессоренной массы при управлении системой ААУ. Видно, что, в частности, плавность движения корпуса автомобиля с такой системой гораздо выше, чем у обычного автомобиля.



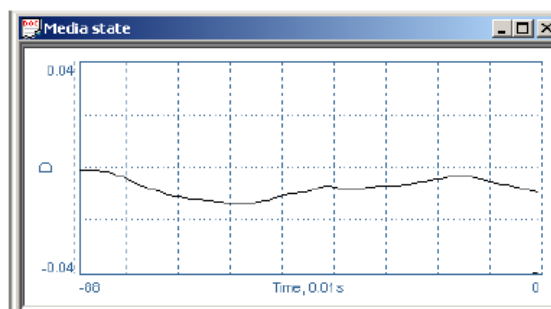
а) Текущий профиль дороги



в) Желаемая траектория вертикального движения корпуса



б) Вертикальное движение корпуса без управления



г) Вертикальное движение корпуса под управлением системы ААУ

Рис. 4. Применение системы ААУ для адаптивного управления активной подвеской транспортного средства. Адаптировавшись к автомобилю и дороге, система увеличивает комфортность, устойчивость и управляемость автомобиля.

### Адаптивное обучение «водителя» мобильного робота

Система ААУ, которая заменяла водителя мобильного робота, запущенного в комнату с препятствиями (рис. 5), самообучалась так управлять рулем, чтобы вовремя объезжать замеченные препятствия, приспособляясь к текущим габаритам

ритам и углам поворота данного робота [14, 15]. Количество соударений (в единицу времени) постепенно падало, по мере наполнения базы знаний (рис. 6а), и, тем самым, качество управления росло (рис. 6б). Робот вел себя подобно новорожденному ребенку, который впервые учится ползать по комнате, постепенно учась вовремя и правильно избегать соударений с предметами.

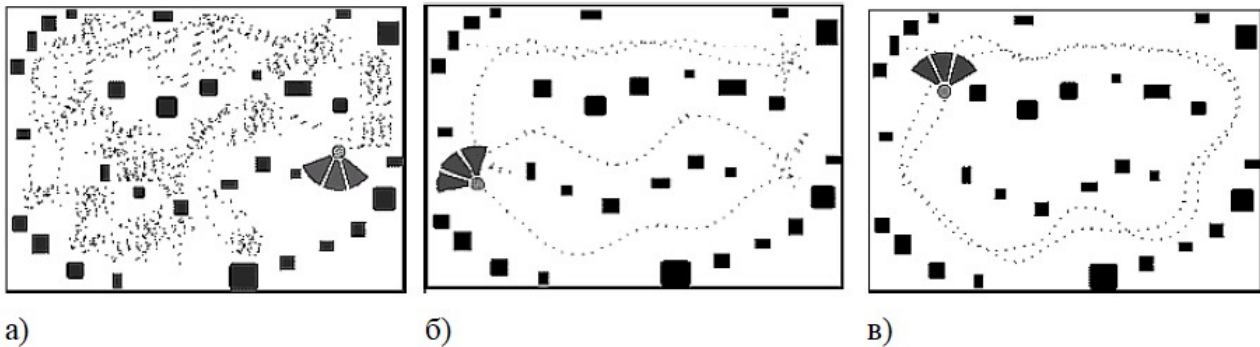


Рис. 5. Адаптивный робот с системой ААУ учится объезжать препятствия, подобно новорожденному ребенку, который учится ползать по квартире. Постепенно столкновений с препятствиями становится все меньше.

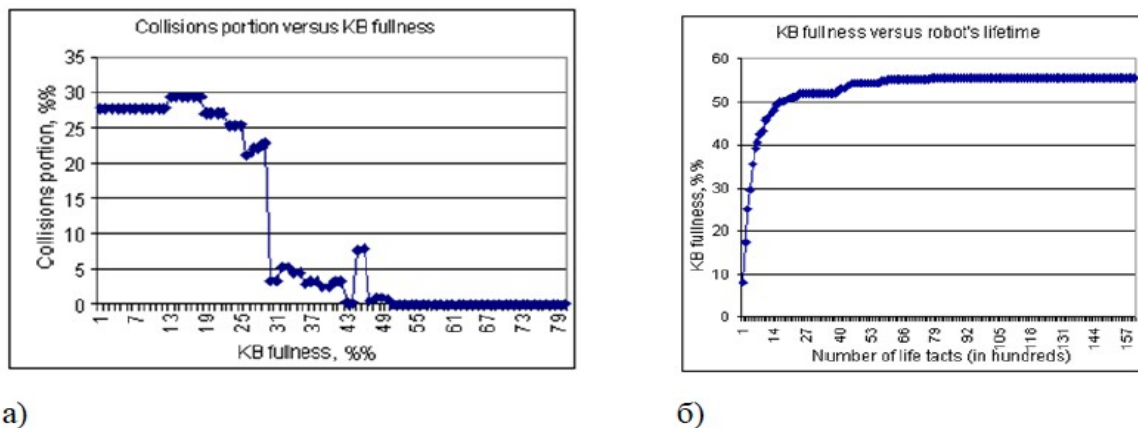


Рис. 6. Частота наезда на препятствия (а) адаптивным роботом падает, а качество управления (б) растет по мере накопления знаний его системой управления.

Проведены сравнительные эксперименты такого робота и новорожденной мыши в аналогичных лабиринтах [16]. Оба объекта –робот с системой ААУ и биологическая мышь (рис. 7), демонстрировали очень схожее поведение, а именно, в начале эксперимента они часто натыкались на препятствия и застревали в углах, но по мере накопления знаний о том, как надо себя вести при наблюдении препятствий (вибрисами у мыши и системой технического зрения у робота), они оба начинали все увереннее преодолевать препятствия – вовремя обходить препятствия, не сталкиваясь с ними и не застревать в углах. Речь идет не о запоминании лабиринта, а о выработке стереотипов поведения в локальном видимом пространстве.

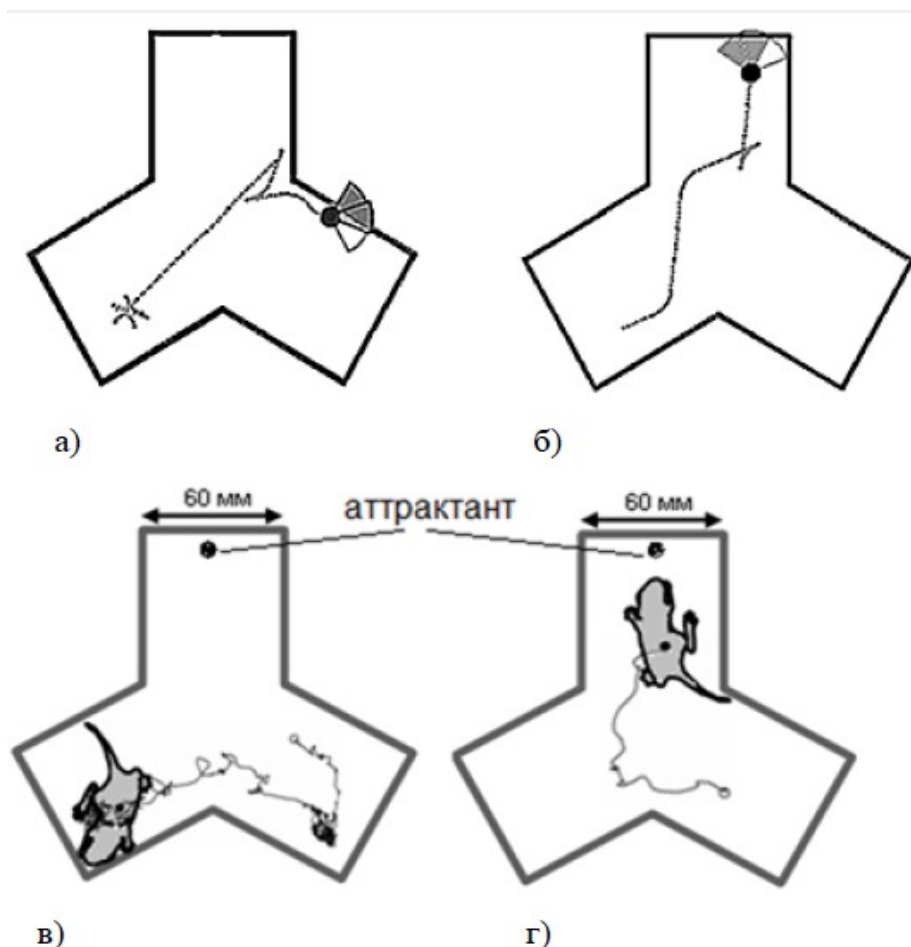


Рис. 7. Сравнение поведения мобильного робота с системой ААУ и новорожденной мыши. В начале и робот (а) и мышь (в) часто натываются на препятствия и застревают в углах. По мере обучения и робот (б) и мышь (г) все реже сталкиваются с препятствиями и перестают застревать в углах.

Мобильный робот Гном №9 (рис. 8) демонстрировал не только способность учиться обходить препятствия, но и выполнять такую полезную работу, как сбор мусора определенного цвета. Самообучение происходило в течение около 20 минут.

Общее качество управления постепенно росло и обогнало качество управления конкурентной детерминированной системой управления (рис. 9а). Был продемонстрирован эффект аварии – при плановом обслуживании перепутали выводы от левого и правого тактильного датчика.

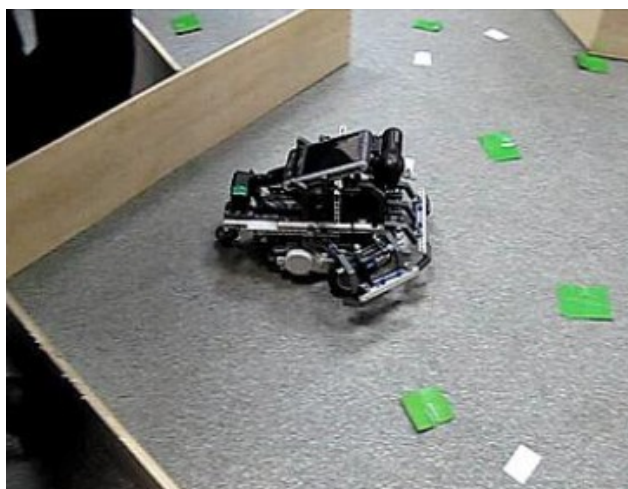


Рис. 8. Мобильный адаптивный робот Гном №9 с многоуровневой системой ААУ самообучался не только обходить препятствия, но и собирать мусор определенного цвета.

Детерминированная система перестала управлять, а система ААУ быстро переучилась (рис. 9б).

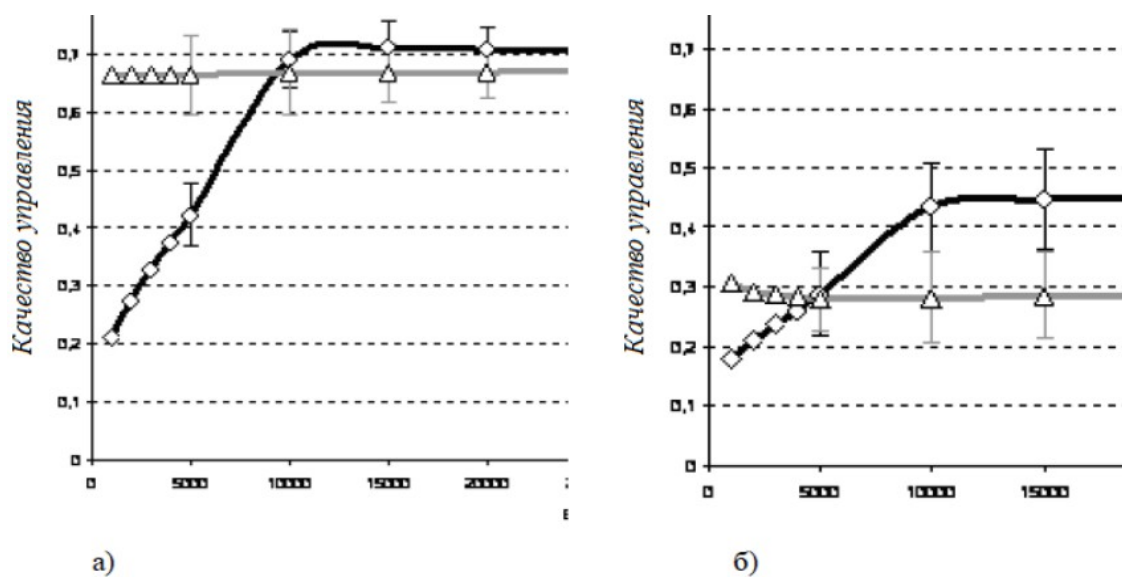


Рис. 9. Скриншот изменения качества управления во времени. Черная кривая – система ААУ, серая – детерминированная система управления, а) – до аварии, б) – после аварии. Видно, что система ААУ способна переобучиться и продолжить управление объектом.

Мобильный робот Гном №10 (рис. 10), в частности, демонстрировал умение самообучаться и переобучаться держать заданную траекторию при изменении свойств шасси и рулевого управления.



*Рис. 10. Экспериментальный мобильный робот Гном №10 демонстрировал различные эффекты самообучения и переобучения непосредственно в процессе управления.*

### ***Адаптивное управление БПЛА с помощью системы ААУ***

БПЛА, как известно, имеют много возможностей целесообразного применения адаптивных методов управления, поскольку точно формализовать все необходимые законы управления трудно, можно начинать их список с задачи настройки ПИД-регуляторов, управления типовыми маневрами и т.д.

Нами система ААУ успешно применялась, в частности, в виртуальных экспериментах для самообучения коптеров выполнению таких миссий, как выработка умений облетать препятствия, преследование ведущего коптера и удержание его в заданном секторе обзора, а также для адаптивного управления групповых миссий. В качестве примера покажем (рис. 11), как ведомый коптер с системой ААУ самообучался держать ведущий коптер в заданном секторе обзора.

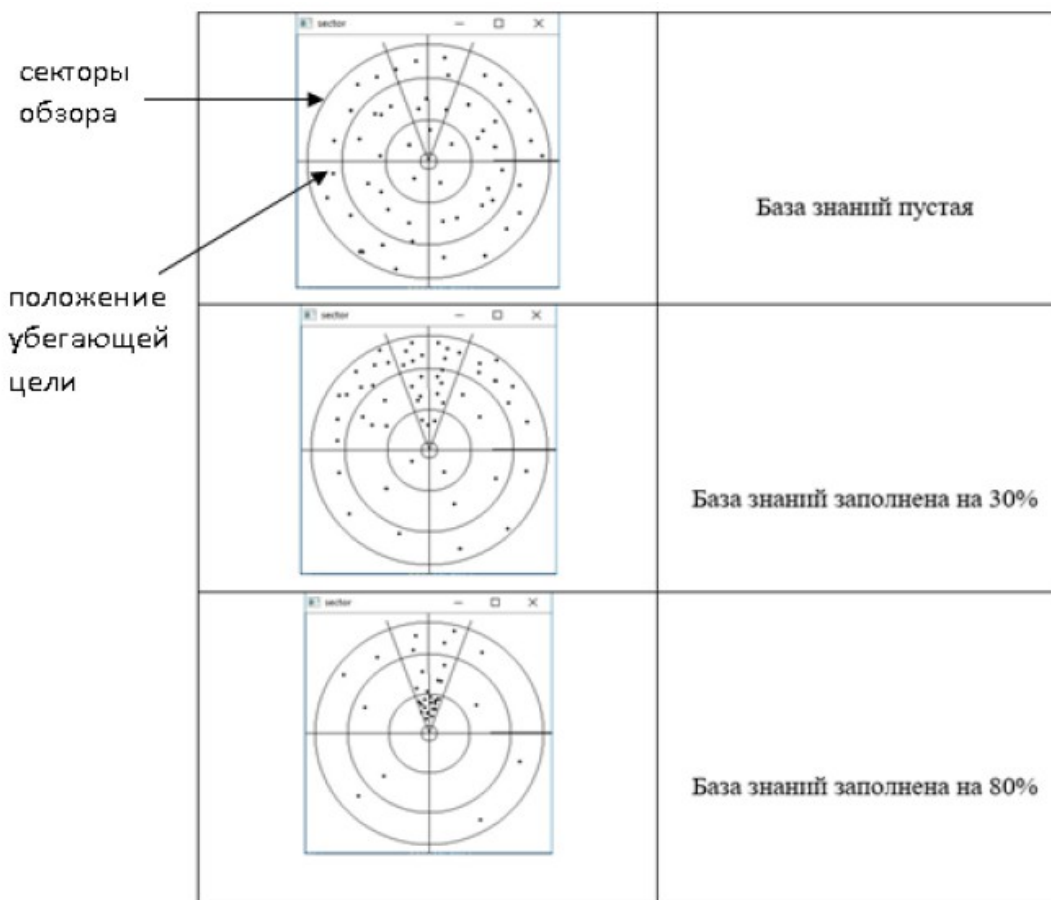


Рис. 11. Демонстрация того, как ведомый коптер непосредственно в полете самообучается держать ведущий коптер в заданном секторе обзора. Моделирование в программной среде (ведущий программист Сергей Смирнов, АО «Интеллект»).

### ***Использование системы ААУ при групповом управлении***

В работе [17] мы показали, что индивидуальные робототехнические комплексы, оснащенные системами ААУ, способны самообучаться выдерживанию своего локального места в группе, за счет чего возможно поддержание общего порядка группы. Результат был показан на модельном примере с группой наноспутников, предназначенных для проведения зондирования ионосферы Земли. Показано, что в результате самообучения группировка наноспутников способна выдерживать заданный порядок в группе при наличии сил, возмущающих этот порядок.

Мы можем утверждать, что эти и другие разработанные модельные и прототипные прикладные системы ААУ демонстрируют все описанные выше свойства метода ААУ, и, поскольку принцип ААУ появился в результате попыток описания логически вынужденного представления о принципах работы биологических нервных систем, представляют собой простые примеры объектов с ис-

кусственными нервными системами, демонстрирующими базовые принципы адаптивного управления, присущего всем живым организмам. В данной статье мы не рассмотрели такие важные полученные нами результаты, как технологию создания систем ААУ на основе разработанных нами моделей нейронов, языковые процессы в системах ААУ и некоторые другие аспекты метода ААУ.

### *Литература*

1. Жданов А.А., Кантор Г.Я., Эфрон А.Б., Новикова И.Г. Построение гомеостатического автомата с конечным количеством входных переменных. (депонированная работа) ВИНТИ "Депонирован-е научные работы", 1984, №2, стр.108, 336. 17 с.
2. Жданов А.А., Метод автономного адаптивного управления. *Известия Академии Наук. Теория и системы управления*, 1999, № 5, с. 127-134
3. Жданов А.А. Автономный искусственный интеллект. М., БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008, (монография), 359 с.
4. Жданов А.А. Аппарат эмоций как системообразующий фактор. Сб. научн. тр. Всероссийской научн.-техн. конференции Нейроинформатика-2004, М.: МИФИ. С. 85-93.
5. Жданов А.А., Сиденко С.В.. Аппарат эмоций – системообразующий фактор естественных систем управления. Труды международных научно-технических конференций «Интеллектуальные системы (IEEE AIS'04)» и «Интеллектуальные САПР» (CAD-2004). Научн. Изд. В 3-х томах. М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004. Т.2.- 468 с. – ISBN 5-9221-0531-0. С. 273 – 285.
6. Луговской В.М.. Супермозг человечества. М., Народный Пушкинский Фонд, 2009 г.
7. Жданов А.А. Угрозы искусственного интеллекта. *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*. 2020. Т. 22. № 4. С. 12–18. DOI: 10.18127/j19998554-202004-03.
8. Жданов А.А. Принцип автономного адаптивного управления. Докторская диссертация, 1995 г. М., ВЦ РАН.
9. Zhdanov A.A., A.V. Ryadovikov. Neuron Models in the Autonomous Adaptive Control Method, *Optical Memory and Neural Network*, Allerton Press, Inc., Vol. 9, No 2, 2000, pp. 115-132.
10. Пономарев Д.Ю., Жданов А.А., Чернодуб А.Н. Нейросетевая реализация формальной модели нейрона, используемого в методе "Автономного адаптивного управления". *Нейрокомпьютеры: разработка, применение*, № 1, 2007 г., с. 64 - 75.
11. Жданов А.А., Б.Б. Беляев, В.В. Мамаев. Использование принципа автономного адаптивного управления в системе угловой стабилизации космического аппарата "Спектр РГ". Сборник "Информационная бионика и моделирование" (под ред. акад.Лупичева Л.Н.), Изд-во ГосИФТП, 1995, с.87-114. 27 стр.

12. Жданов А.А., Земских Л.В., Беляев Б.Б. Система стабилизации углового движения космического аппарата на основе нейроноподобной системы автономного адаптивного управления. *Космические Исследования*, 2004, т. 42, №3, М., 2004. С. 1-15.

13. Жданов А.А., Липкевич Д.Б., AdCAS - система автономного адаптивного управления активной подвеской автомобиля. Труды Института системного программирования: Том 7, Новые подходы в нейроноподобных и основанных на знаниях системах. Под ред. А.А. Жданова, М.: ИСП РАН, 2004. УДК 519.7, С. 119-159.

14. Жданов А.А., Крыжановский М.В., Преображенский Н.Б. Бионическая интеллектуальная автономная адаптивная система управления мобильным роботом (часть 1), *Мехатроника. Автоматизация. Управление*, 2004, №1, С. 21-30.

15. Жданов А.А., Крыжановский М.В., Преображенский Н.Б. Бионическая интеллектуальная автономная адаптивная система управления мобильным роботом (часть 2), *Мехатроника. Автоматизация. Управление*, 2004, №2, С.17-22.

16. Анохин К.В., Жданов А.А., Зарайская И.Ю., Кондуков А.М. Исследование формирования поведенческих стратегий в биолого-кибернетических экспериментах, Сб. научн. тр. Всероссийской научно-технической конференции "Нейроинформатика-2007", часть 3, стр. 61-67.

17. Жданов А.А., Романов А.А., Романов А.А., Семенов С.С. Применение метода автономного адаптивного управления для группы робототехнических устройств на примере модели кластера наноспутников. *Мехатроника, автоматизация, управление*, Том 17, №1, 2016, с. 11-18,

### *What is understood today under artificial intelligence*

**Zhdanov A.A.**

*Institute of Precision Mechanics and Computer Science  
named after S.A. Lebedev RAS, Moscow, a.zhdanov@mail.ru*

**Abstract.** The paper presents the main ideas of the biologically inspired theory of "autonomous adaptive control" (AAU), proposed and developed by the author, which describes the logically forced idea of the principle of action, composition, structure and algorithm of the nervous system (and brain) of any living organism as a control system (CS), placed inside a control object (OU), in turn placed in an environment with properties little known to him at birth. The mechanism proposed by the AAU theory is as follows. The brain or other control system (CS), recognizing the current situation in the form of a set of recognized images, turns to its memory (knowledge base), finds there a list of possible actions in this situation and their consequences, and chooses for implementation the one that will lead to a new one the resulting situation with the maximum emotional assessments possible here.

For the successful functioning of such a decision-making mechanism, constant self-learning is necessary - the formation of new images, the formation of their qualitative (emotional) assessments, the formation of new actions, the formation of new knowledge, and the formation of



the very procedures for such formation. The very functioning of the CS is, of necessity, reduced to the current parallel solution of two problems - making optimal decisions in the current situation (optimization algorithm) and the constant accumulation of acquired knowledge (epistemological algorithm). The real intellectual systems that we see in nature, and not only in humans, but also in animals, work, according to the author, according to this principle.

But today AI systems are understood mainly as automatic data analysis systems, which include the actively developed neural network classification systems, pattern recognition systems, correlation search systems (deep learning, big data, data mining), as well as the use of a reflex form of organization of management.

The above, as shown in the work, is only an insignificant part of the AAU mechanism and therefore cannot be considered a full-fledged intelligence.

According to the author, the biological brain is the implementation of the described AAU principle, it is assumed that its implementation in its basic features is also possible in technical systems. The theory of AAU is formalized to a level that allows programming on its basis control systems with autonomous behavior, the work provides examples of actually functioning applied systems. An important distinguishing feature of AAU systems is the presence in them of the "apparatus of emotions" - a multifunctional subsystem for the qualitative assessment of information and management motivation. The apparatus of emotions is a system-forming subsystem in any nervous system and should be so in AI systems. The main tasks of the apparatus of emotions were solved in the theory of AAU and were implemented in all the developed examples.

**Keywords:** algorithms, nervous system, reflex, emotion apparatus, pattern recognition, search for correlations, autonomous control systems

### **References**

1. Zhdanov A.A., Kantor G.Ya., Efron A.B., Novikova I.G. Postroenie gomeostazisnogo avtomata s konechnim kolichestvom vhodnikh peremennikh [Construction of a homeostasis automaton with a finite number of input variables]. (deposited work) VHITI "Deposited scientific works", 1984, N2, pp. 108, 336. 17 p.
2. Zhdanov A.A. Metod avtonomnogo adaptivnogo upravleniya [Method of autonomous adaptive control]. *Bulletin of the Academy of Sciences. Theory and control systems*, 1999, No. 5, pp. 127-134
3. Zhdanov A.A. Avtonomniy iskusstvenniy intellekt [Autonomous artificial intelligence]. M., BINOM. Knowledge Laboratory, 2008 (monograph), 359 p.
4. Zhdanov A.A. Apparat emotsiy kak sistemoobrazuyushiy faktor [The apparatus of emotions as a system-forming factor]. Sat. scientific. tr. All-Russian scientific and technical. conferences Neuroinformatics-2004, Moscow: MEPhI. pp. 85-93.
5. Zhdanov A.A., Sidenko S.V. Apparat emotsiy – sistemoobrazuyushiy faktor estestvennikh sistem upravleniya [The apparatus of emotions is a system-forming factor of natural control systems]. Proceedings of International Scientific and Technical Conferences "Intelligent Systems (IEEE AIS'04" and "Intelligent CAD" (CAD-2004). Scientific Publishing. In 3 volumes. Moscow: Publishing House of Physics and Mathematics Literature, 2004. Vol. .2.- 468 p. - ISBN 5-9221-0531-0. pp. 273 – 285.
6. Lugovskoy V.M. Supermozg cheloveka [Superbrain of mankind]. M., People's Pushkin Fund, 2009
7. Zhdanov A.A. Ugrozi iskusstvennogo intellekta [Artificial Intelligence Threats]. *Neurocomputers: development, application*. 2020. Vol. 22. No. 4. P. 12–18.
8. Zhdanov A.A. Printsip avtonomnogo adaptivnogo upravleniya [The principle of autonomous adaptive control]. Doctoral dissertation, 1995 M., Computing Center of the Russian

Academy of Sciences.

9. Zhdanov A.A., A.V. Ryadovikov. Neuron Models in the Autonomous Adaptive Control Method, *Optical Memory and Neural Network*, Allerton Press, Inc., Vol. 9, No 2, 2000, pp. 115-132.

10. Ponomarev D.Yu., Zhdanov A.A., Chernodub A.N. Neurosetevaya realizatsiya formalnoi modeli neirona ispolzuemogo v metode "Avtonomnogo adaptivnogo upravleniya" [Neural network implementation of a formal model of a neuron used in the "Autonomous adaptive control" method]. *Neurocomputers: development, application*, No. 1, 2007, p. 64 – 75.

11. Zhdanov A.A. Ispolzovanie printsipa avtonomnogo adaptivnogo upravleniya v sisteme uglovoy stabilizatsii kosmicheskogo apparata Spektr RG [Using the principle of autonomous adaptive control in the angular stabilization system of the Spektr RG spacecraft]. Collection "Information Bionics and Modeling" (under the editorship of Academician Lupichev LN), GosIFTP Publishing House, 1995, pp. 87-114. 27 pages

12. Zhdanov A.A., Zemskikh L.V., Belyaev B.B. Sistema stabilizatsii uglovogo dvizheniya kosmicheskogo apparata na osnove neiropodobnoy sistemi avtonomnogo adaptivnogo upravleniya [A system for stabilizing the angular motion of a spacecraft based on a neuron-like system of autonomous adaptive control]. *Space Research*, 2004, vol. 42, No. 3, M., 2004. pp. 1-15.

13. Zhdanov AA, Lipkevich D.B. AdCAS — sistema avtonomnogo adaptivnogo upravleniya aktivnoy podveskoy avtomobilya [AdCAS - a system of autonomous adaptive control of the active suspension of the car]. *Proceedings of the Institute for System Programming: Volume 7, New Approaches in Neuron-Like and Knowledge-Based Systems*. Ed. A.A. Zhdanova, M.: ISP RAS, 2004. UDC 519.7, pp. 119-159.

14. Zhdanov A.A., Kryzhanovsky M.V., Preobrazhensky N.B. Bionicheskaya intellektualnaya avtonomnaya adaptivnaya sistema upravleniya mobilnim robotom, 1 [Bionic intelligent autonomous adaptive mobile robot control system (part 1)], *Mechatronics. Automation. Management*, 2004, No. 1, pp. 21-30.

15. Zhdanov A.A., Kryzhanovsky M.V., Preobrazhensky N.B. Bionicheskaya intellektualnaya avtonomnaya adaptivnaya sistema upravleniya mobilnim robotom, 2 [Bionic intelligent autonomous adaptive mobile robot control system (part 2)], *Mechatronics. Automation. Management*, 2004, No. 2, P.17-22.

16. Anokhin K.V., Zhdanov A.A., Zaraiskaya I.Yu., Kondukov A.M. Issledovanie formirovaniya povedencheskikh strategiy v boi-kiberneticheskikh eksperimentakh [Study of the formation of behavioral strategies in biological-cybernetic experiments], *Sat. scientific. tr. All-Russian scientific and technical conference "Neuroinformatics-2007"*, part 3, pp. 61-67.

17. Zhdanov A.A., Romanov A.A., Romanov A.A., Semenov S.S. Primenenie metoda avtonomnogo adaptivnogo upravleniya dlya gruppi robototekhnicheskikh ustroystv na primere modeli klastera nanospudnikov [Application of the method of autonomous adaptive control for a group of robotic devices on the example of a model of a cluster of nanosatellites]. *Mechatronics, automation, control*, Volume 17, No. 1, 2016, pp. 11-18,

## *Системная организация психической деятельности мозга*

**Юматов Е.А.**

*НИИ Нормальной Физиологии имени П.К. Анохина, РАН.  
Москва. eayumatov@mail.ru*

***Аннотация.** В обзорной статье рассматривается происхождение субъективного состояния человека. Впервые показано, что субъективные состояния человека можно дистанционно объективно регистрировать. Установлено существование «психогенного поля», отражающего субъективное состояние головного мозга человека. Показано дистанционное влияние субъективного состояния человека на физико-химические показатели крови. Описано взаимодействие нейрофизиологических и субъективных процессов в системной организации целенаправленного поведения. Представлена принципиальная схема формирования субъективного состояния мозга, основанная на обратном влиянии психогенного поля на нейронные молекулярные процессы (самоиндукция в мозге). Предложена «Психогенная теория сознания», рассматривающая происхождение субъективного состояния и возможность существования уникальных для живого мозга физических явлений и мозговых полей.*

***Ключевые слова:** психика, сознание, субъективное состояние, мозг, психогенное поле, парадигма происхождения субъективного.*

### *Проблема психической деятельности мозга*

Сознание, мысли, чувства, эмоции характеризуют психическую деятельность головного мозга, проявляющуюся в субъективном восприятии человеком самого себя и окружающего мира. Головной мозг является уникальной организацией в живой природе, обладающей способностью к самовосприятию, к самоощущению, - всё то, что называется субъективным, психическим состоянием, выражающим отношение к себе, к чему-нибудь или к кому-нибудь [1 - 6].

Рассматривая проблему субъективной деятельности мозга, К. Поппер (2008) писал: «Мы живём в мире физических тел и сами являемся физическими телами. Но когда я с вами говорю, я обращаюсь не к вашим телам, а к вашему сознанию. И здесь возникает вопрос о взаимоотношениях между этими двумя мирами, миром физических состояний или процессов и миром психических состояний или процессов. Этот вопрос и есть психофизическая проблема» [7].

По мнению С.Л. Рубинштейна (1957, 2003) существуют три основных взгляда на эту психофизическую проблему: психофизический параллелизм, психофизическое взаимодействие и психофизическое единство [8,9]. Сам С.Л. Рубинштейн придерживался представления о единстве психического и физического, и не противопоставлял материальное идеальному. «Мир един,

его единство состоит в материальности, и поэтому не следует выводить психические функции за пределы материального мира».

Субъективное реально существует. В этом смысле субъективное тоже объективно, однако оно имеет место быть только в живой организации материи. Всё, что мы можем обнаружить, зарегистрировать, - мы считаем материальным, а всё, что ощущаем сами в себе, в своём состоянии – это субъективное. На самом деле – это единые, взаимосвязанные процессы в особой уникальной организации, какой является живой мозг. Поэтому рассуждения о материальности или нематериальности субъективной функции мозга ничего не дают её для понимания.

В условиях саморазвития жизни наличие субъективного состояния является абсолютно необходимыми для эволюции и существования высших живых организмов.

Возникновение субъективных состояний явилось важнейшим фактором эволюции живых существ, определяющим саморазвитие жизни. С помощью субъективного состояния происходит оценка биологической или социальной значимости всей поступающей через органы чувств информации; выбирается наиболее эффективная целенаправленная деятельность, ведущая к удовлетворению биологически или социально значимой мотивации.

Выбор «цели» осуществляется в постоянно меняющихся условиях, в которых оказывается живой организм, при различных вероятностных обстоятельствах, из широкого набора поведенческих реакций.

Субъективное состояние является мощным внутренним стимулом к активным действиям для достижения цели. Они стали своего рода направляющей силой в выживании и самосохранении животного, и в целом вида. В главном своём проявлении субъективное состояние отражает вектор стремления: избежать всё, что вредное, и достичь полезное.

Первоначально субъективные состояния появились в мозге в виде ощущений, эмоций, которые стали своего рода «пеленгом» существующих в организме жизненно важных потребностей и их удовлетворения. На более поздних этапах развития мозга к ним добавились мыслительные процессы, отражающие внешние связи в окружающей среде. В дальнейшем на базе этой мыслительной функции мозга развилось и закрепилось самое мощное средство приспособления и выживания - разумная, интеллектуальная деятельность.

Формирование наиболее простых форм поведения, закреплённых на генетическом уровне, происходит без участия субъективного состояния, так как в нём нет никакой необходимости. Эти инстинкты строятся по рефлекторному принципу в виде фиксированных действий, жёстко привязанных к определённым стимулам и условиям.

Более сложные формы поведения, допускающие свободу выбора, стали возможными, благодаря появлению субъективного состояния, обеспечивающего стратегическое направление деятельности в постоянно меняющихся условиях.

Без становления субъективного самовосприятия себя и окружающего мира был бы невозможен дальнейший эволюционный прогресс. ***Наличие субъективной оценки внешней ситуации и внутреннего состояния стало решающим фактором эволюции.***

В литературе много публикаций по проблеме психической деятельности мозга. Среди них: философские статьи; психологические, в которых описываются внешние формы психической деятельности; клинические работы, рассматривающие нарушения психических функций при различных заболеваниях; нейрофизиологические, в которых авторы пытаются выявить корреляты и коды ментальных когнитивных, сенсорных функций мозга, в том числе и с помощью функциональной МРТ. Однако среди них нет работ по изучению природы (происхождения) психической деятельности мозга. Ряд исследователей отмечают, что психическая деятельность мозга является одной из тайн природы, а некоторые из них считают, что эта проблема является непознаваемой.

В настоящее время существует целый ряд косвенных методов регистрации психофизиологического состояния человека, основанных на записи соматовегетативных показателей: АД, ЭКГ, ЧСС, частоты дыхания, КГР и прочего, которые отражают функции отдельных органов [10]. При этом, как таковое, субъективное внутреннее состояние организма не регистрируется.

Особо следует отметить различие между внутренними субъективными состояниями и их физиологическими проявлениями. Например, эмоции относятся к субъективному состоянию, а эмоциональные реакции – это физиологические проявления эмоций в виде различных поведенческих, голосовых и соматовегетативных реакций, которые могут быть зарегистрированы.

В деятельности мозга имеет место двойственность: с одной стороны, существуют нейрофизиологические процессы; с другой стороны, возникают связанные с ними субъективные состояния, характеризующие все грани мироощущения в жизни [11,12]. Безусловно, эти две сути деятельности мозга взаимосвязаны между собой и составляют единое целое.

Огромные достижения современной нейрофизиологии, основанные на структурно-морфологических, электрофизиологических, нейрохимических, молекулярных, генетических исследованиях, компьютерной томографии и прочем, сами по себе не позволяют раскрыть духовные функции головного мозга. Какие бы в мозге не регистрировались процессы: электроэнцефалограмма (ЭЭГ), нейронная активность, нейрохимические и молекулярные реакции и так далее, в них невозможно увидеть внутренние переживания: мысли, эмоции, чувства и прочее.

Функциональная магниторезонансная томография (МРТ) в настоящее время позволяет прижизненно видеть активность и участие практически всех структур мозга при различных формах психической деятельности. Тем не

менее, столь скрупулёзные аналитические исследования мозга человека не позволяют понять происхождение психической деятельности мозга. Даже, если представить высочайшую разрешающую способность функциональной МРТ, с помощью которой можно было бы видеть активность каждого из миллиардов нейронов мозга, то и в этом случае, мы бы всё равно не смогли бы понять, как же зарождается субъективное в деятельности мозга.

Используя компьютерную томографию мозга, картирование экспрессии генов в разных структурах мозга, многоканальную запись нейронной активности, полиграфическую регистрацию электроэнцефалограммы, можно выявить лишь участие и взаимодействие различных структур мозга в организации поведения, обучения, памяти, эмоций, мышления. Однако эти исследования нисколько не приближают нас к пониманию происхождения самих субъективных состояний. Мы не можем объяснить, каким образом из кодов нервных импульсов, из взаимодействия различных структур мозга в электрофизиологических процессах и прочего зарождается самоощущение субъективного состояния.

В деятельности мозга присутствуют две стороны: видимая, характеризующаяся регистрируемыми нейрофизиологическими параметрами; и скрытая, - субъективная, проявляющаяся в восприятии индивидуума самого себя и окружающего мира. Когда мы изучаем мозг, мы видим только «внешнюю, надводную часть айсберга, внутренняя, подводная субъективная часть» остаётся недоступной для исследования нейрофизиологическими методами.

Опираясь только на нейрофизиологические методы, в принципе невозможно объяснить происхождение психической деятельности мозга. Можно считать глубоким заблуждением, когда исследователи утверждают, что, регистрируя электрофизиологические процессы: активность нейронов, ЭЭГ, они раскрывают природу мысли, чувства и других субъективных состояний.

По этому поводу Н.П. Бехтерева (1990) писала: «...вряд ли полный код мыслительных процессов будет раскрыт только за счёт импульсной активности нейронов и нейронных популяций... Решение задачи лежит не только в сфере прижизненной физиологии и биохимии, но и в наиболее тонкой ветви биохимии – биологии молекулярных процессов» [13].

Рассматривая проблему происхождения субъективного, Т. Нагель (2002) отмечал существование огромного «*провала*» между описанием психических явлений, - «субъективной реальности» и нейрофизиологическими процессами. Он писал: «Параллельное описание нейрофизиологических процессов и ментальных состояний, ими вызываемых (?) или им сопутствующих (?) никак не помогает ответить на вопрос, *как* поведение нейронной сети порождает субъективные состояния, чувства, рефлексию и другие феномены высокого порядка. Без смены фундаментальных представлений о сознании такой провал в объяснении, преодолён быть не может» [14].

Выдающийся психолог А.Н. Леонтьев (1975) полагал, что «Никакое прямое соотнесение между собой психических и мозговых физиологических процессов проблемы ещё не решает» [15]. Психофизиология, призванная изучать происхождение психических процессов в деятельности мозга, по существу ограничивается либо регистрацией внешних поведенческих и соматовегетативных проявлений психической деятельности, либо рассматривает участие и взаимодействие тех или иных структур мозга в корреляции с субъективными состояниями.

В среде нейрофизиологов сложилось скептическое отношение к непосредственному изучению субъективной деятельности мозга, вызванное тем, что, опираясь на современные нейрофизиологические методы, невозможно рассматривать происхождение субъективного, и все рассуждения на эту тему являются не продуктивными и не имеющими никакого отношения к пониманию природы субъективного. Более того, можно видеть явное непонимание этой фундаментальной проблемы и чуть ли не вынос её из сферы научных исследований. Субъективная деятельность мозга оказалась за гранью научных исследований, и для нейрофизиологии она, как бы, не существует. По этому поводу Лауреат Нобелевской премии Ф. Крик и С. Кох писали: «В среде нейрофизиологов любые попытки разговоров о сознании воспринимались как первые признаки приближающегося старческого слабоумия» [16].

Вопрос о том, каким же образом мозг порождает внутренний субъективный мир, остаётся одной из величайших загадок природы. В настоящее время в науке не существуют даже гипотетических, логических конструкций, объясняющих происхождение субъективных состояний в нейрофизиологических процессах.

Оптимистичное мнение о возможности познания субъективной деятельности мозга высказывали И.П. Павлов (1951), R.W. Sperry (1952), П.К.Анохин (1968), Н.П.Бехтерева (1990), К.В.Судаков (2010), которые настоятельно призывали изучать происхождение такой уникальной функции мозга, как субъективная, психическая деятельность [1, 13, 17-20]. И.П. Павлов (1951) писал: «Наступает и наступит, осуществится естественное и неизбежное сближение и, наконец, слитие психологического с физиологическим, субъективного с объективным – решится фактически вопрос, так долго тревоживший человеческую мысль! И всяческое дальнейшее способствованию этому слитию есть большая задача ближайшего будущего науки» [1]. Эта же мысль прозвучала и в обращении Лауреата Нобелевской премии Р. Сперри (1952): «Изгоняемые из научного объяснения в течение долгого времени субъективные состояния и свойства должны, образно говоря, занять водительское сидение в теории мозговой деятельности как венца эволюции» [17].

По этому поводу П.К. Анохин (1968) писал: «Конкретные механизмы рождения субъективного сознания не поддаются пока аналитическому

описанию, однако их точная информационная связь с исходными параметрами объективного мира не может быть подвергнута сомнению» [18]. Такого же мнения придерживается К.В.Судаков (2010), который считает, что субъективные состояния индивидуумов отражают реальные психофизиологические процессы [19,20].

Огромный разрыв между современными знаниями в области нейрофизиологии мозга и представлениями о его психических функциях связан с тем, что при изучении мозга всегда использовались методы: морфологические, физические, химические, основанные на знаниях, явлениях, законах физики и химии, открытые в неживой природе.

В живом организме и, в частности, в мозге могут возникать такие физические явления и процессы, которых в принципе нет, и не может быть в неживой природе. Этот тезис имеет принципиальное значение для понимания сути субъективной деятельности мозга.

***Субъективное состояние присуще только живой организации и отсутствует в неживой природе. Поэтому невозможно объяснить происхождение психических функций мозга, опираясь только на законы неживой природы.***

В наших исследованиях мы пытаемся найти принципиальные другие научные методы и подходы для изучения происхождения субъективной деятельности мозга. ***Общей целью наших исследований является раскрытие психофизических и молекулярных механизмов психической деятельности мозга*** [21-23]. При этом мы исходим из сформулированного нами методологического принципа, что ***«субъективные процессы можно непосредственно регистрировать и изучать только с помощью и при участии живых структур»*** [21-24].

### ***Дистанционно-полевые проявления субъективного состояния человека***

Для регистрации субъективного состояния человека в качестве биологического субстрата мы использовали кровь, которая является универсальной многокомпонентной жидкостью, содержащей клеточные элементы и белково-коллоидные, электролитные растворы.

При проведении этих серий опытов был поставлен вопрос, возможно ли дистанционное влияние субъективного состояния испытателя непосредственно на кровь и, в частности, на скорость оседания эритроцитов (СОЭ)?

Регистрация СОЭ производилась по стандартной методике Панченкова. В клинических условиях у здоровых мужчин брались 2 мл крови с добавлением антикоагулянта ЭДТА.

В первый штатив помещался капилляр с кровью, не подвергнутой нами каким-либо субъективным влияниям (***контрольный тест***). Во втором штативе находился капилляр с кровью, к которому подходил испытатель в нейтральном



субъективном состоянии (*нейтральный тест*). Нейтральный контроль необходим был для того, чтобы исключить какие-либо возможные посторонние влияния испытателя на СОЭ крови, например, связанные с движением и подходом испытателя к штативу, с тепловым, электромагнитным, электростатическим воздействием одежды испытателя и так далее. К третьему штативу, содержащему капилляр с кровью, подходил испытатель, находившийся в выраженном субъективном состоянии (*субъективный тест*), которое провоцировал одним из описанных нами способов [21,25]. При выполнении этого теста испытатель полностью сосредотачивал и концентрировал своё внимание на чём-то эмоционально значимом, и тем самым вызывал у себя выраженное эмоциональное напряжение.

В экспериментах испытатель подходил последовательно пять раз подряд ко второму штативу (*нейтральный тест*), а затем пять раз к третьему штативу (*субъективный тест*) с интервалом несколько секунд. В отдельных исследованиях число подходов к штативам колебалось от одного до десяти. Во время субъективного воздействия штатив с капиллярами находился в горизонтальном положении и был ориентирован таким образом, чтобы верхний конец капилляров был направлен в сторону испытателя.

Все три теста проводились в одних и тех же условиях, в одно и то же время, и с одной и той же кровью человека. Постановка штативов в вертикальное положение производилась одновременно. Снятие показаний СОЭ выполнялось через один час. Сравнивались результаты показаний СОЭ в трёх разных капиллярах: один, из которых отражал результаты «контрольного теста»; второй, - «нейтрального теста», - без субъективного воздействия; и третий, «субъективного теста», - под влиянием выраженного субъективного состояния испытателя. Достоверность результатов устанавливалась по критерию Стьюдента. Результаты исследования представлены на рис. 1.

Полученные результаты демонстрируют достоверные различия СОЭ между контрольным, нейтральным и субъективным тестами [26, 27]. Под влиянием субъективного состояния СОЭ всегда снижалась до значений от 1.5 мм до 2.5 мм и, чем выше была исходная величина СОЭ в контрольном тесте у данного человека, тем больше были различия СОЭ между контрольным тестом и субъективным тестом. Вместе с тем, не выявлены достоверные различия между показателями СОЭ в контрольном и нейтральном тестах. Это указывает на отсутствие влияния на кровь нейтрального субъективного состояния испытателя. Уменьшение СОЭ под влиянием субъективного состояния наблюдалось при нахождении испытателя на расстоянии не более одного метра от штатива. В наших исследованиях мы не обнаружили изменения СОЭ при воздействии выраженного субъективного состояния испытателя на кровь больного человека и на собственную кровь испытателя.

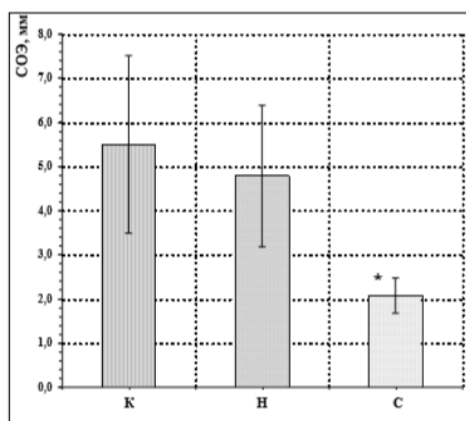


Рис. 1. Изменение скорости оседания эритроцитов (СОЭ) крови человека после дистанционного влияния на кровь субъективного состояния испытуемого. СОЭ в мм. **К** – контрольный тест, **Н** - нейтральный тест, **С** - субъективный тест. Достоверные различия \* -  $p \leq 0,05$  между тестами **С** и **К**, **Н**.

Полученные нами данные указывают на существование неких молекулярных факторов крови, дистанционно реагирующих на психическое состояние человека.

Следующей задачей было исследовать дистанционное влияние выраженного субъективного состояния человека на СОЭ в резус-положительной и резус-отрицательной крови [28].

Были проведены две серии экспериментов.

В первой серии субъективному воздействию непосредственно подвергалась кровь, находящаяся в капиллярах штатива Панченкова.

Во второй серии опытов субъективное воздействие осуществлялось на кровь, находящуюся в пробирке. Предварительно кровь разделялась на равные порции в две пробирки, одна из них была контрольная, другая – опытная. Так же, как и в первой серии при проведении опытных тестов испытуемый пять раз подряд, в течение 30 сек. подходил к пробирке с кровью в выраженном субъективном состоянии. При этом контрольная пробирка находилась в другом помещении. После этого кровь из опытной и контрольной пробирок забиралась в капилляры, которые отдельно устанавливались в штативы для последующего определения СОЭ. При заборе крови из пробирок в капилляры кровь неизбежно перемешивалась. Все тесты проводились в одних и тех же условиях, в одно и то же время, и с одной и той же кровью человека.

В первой серии сравнивались результаты показаний СОЭ в контрольных и в опытных тестах в капиллярах с кровью в разных штативах. Достоверность результатов устанавливалась по критерию Стьюдента.

Полученные результаты (рис. 2) демонстрируют высоко достоверные ( $p < 0,0001$ ) различия СОЭ между опытными и контрольными тестами по всей совокупности данных. В отдельных тестах эти различия были 2-х и более кратными.

Оказалось, что достоверные различия СОЭ между контрольными и опытными тестами проявляются независимо от групп крови.

Дистанционное влияние выраженного субъективного состояния вызывает высоко достоверные разнонаправленные изменения СОЭ в резус-положительной и в резус-отрицательной крови (рис. 2). Обнаружена 100% корреляция между резус-фактором и направлением изменения СОЭ в опытных тестах по сравнению с контрольными. Этот факт указывает на существование двух различных механизмов реагирования крови на дистанционное воздействие субъективного состояния человека. Первый механизм, вызывающий снижение СОЭ, проявляется при наличии резус-фактора, находящегося в эритроцитах. Второй механизм, вызывающий увеличение СОЭ, наблюдается при отсутствии резус-фактора.

Высоко достоверные однонаправленные эффекты изменения СОЭ были обнаружены во второй серии опытов с перемешиванием крови после субъективного воздействия. В этой серии опытов увеличение СОЭ проявилось как в резус-положительной, так и в резус-отрицательной крови. Снижение СОЭ, характерное для не перемешанной резус-положительной крови, исчезло (рис. 3).

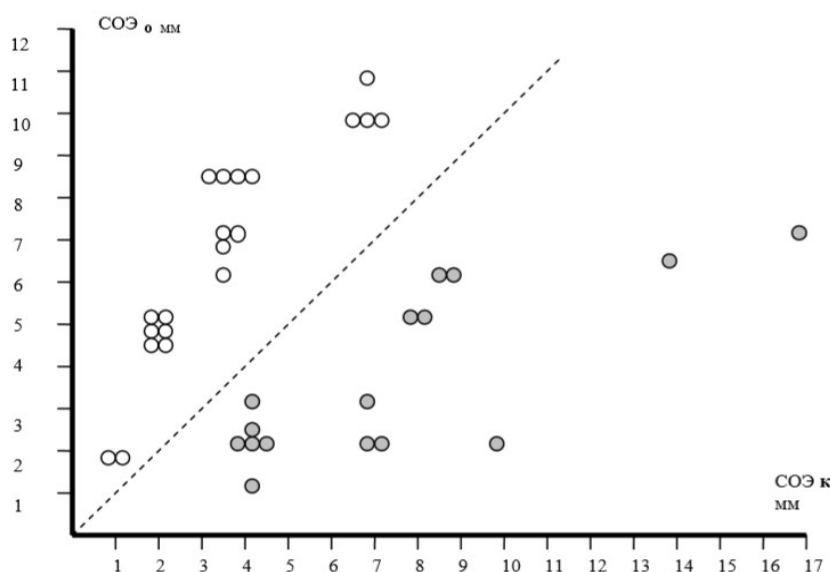


Рис.2. Изменение скорости оседания эритроцитов (СОЭ) после выраженного субъективного дистанционного влияния испытуемого на кровь в капиллярах штатива Панченкова

Обозначения: ось абсцисс – исходные величины СОЭ<sub>к</sub> (мм) в каждом отдельном тесте в контроле; ось ординат – опытные значения СОЭ<sub>о</sub> (мм) в каждом отдельном тесте после субъективного воздействия, по отношению к исходной величине в контроле — СОЭ<sub>к</sub>.  $n$  – суммарное число измерений СОЭ<sub>к</sub> + СОЭ<sub>о</sub> = 86. Кровь: Rh - ○, Rh + ●

Достоверность различий между СОЭ в контроле и после субъективного воздействия по группе Rh +  $p < 0,0001$ , по группе Rh -  $p < 0,0001$ , — условная

линия, на которой находились бы опытные значения -  $COЭ_0$  при их равенстве контрольным значениям -  $COЭ_к$ :  $COЭ_к = COЭ_0$ . Сверху линии:  $COЭ_0 > COЭ_к$ , Снизу линии:  $COЭ_0 < COЭ_к$ .

Из этого следует, что после перемешивания крови исчезли те эффекты воздействия субъективного состояния человека, которые могли быть связаны с определенным взаимодействием и ориентацией эритроцитов и белков крови. Можно полагать, что дистанционное воздействие субъективного состояния человека по-разному действует на белки эритроцитов и плазмы крови.

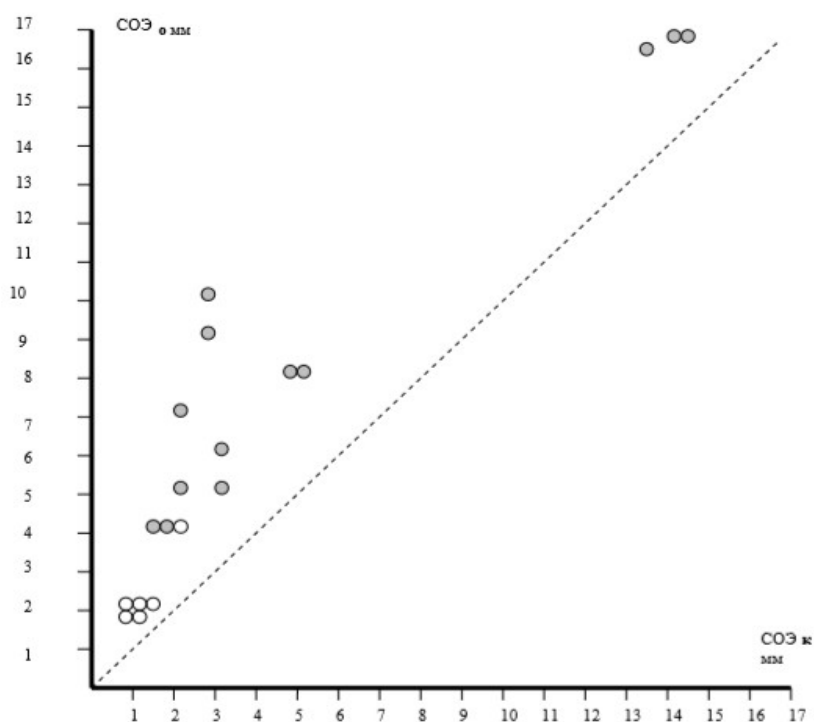


Рис.3. Изменение скорости оседания эритроцитов ( $COЭ$ ) после выраженного субъективного дистанционного влияния испытуемого на кровь в пробирке

Обозначения: ось абсцисс – исходные величины  $COЭ_к$  (мм) в каждом отдельном тесте в контроле; ось ординат – опытные значения  $COЭ_0$  (мм) в каждом отдельном тесте после субъективного воздействия, по отношению к исходной величине в контроле -  $COЭ_к$ .

$n$  – суммарное число измерений  $COЭ_к + COЭ_0 = 49$ .

Кровь: Rh -  $\circ$  , Rh +  $\bullet$  .

Достоверность различий между  $COЭ$  в контроле и после субъективного воздействия по группе Rh +  $p < 0,0001$ , по группе Rh -  $p < 0,001$ , — условная линия, на которой находились бы опытные значения -  $COЭ_0$  при их равенстве контрольным значениям -  $COЭ_к$ :  $COЭ_к = COЭ_0$ . Сверху линии:  $COЭ_0 > COЭ_к$ .

Главным итогом этой серии является обнаруженный факт, что после перемешивания крови не исчезают эффекты дистанционного субъективного влияния человека на СОЭ. В молекулярных структурах крови после её перемешивания сохраняются изменения, вызванные предшествующим влиянием выраженного субъективного состояния человека.

Мы видим различные проявления дистанционного влияния дистанционное воздействие выраженного субъективного состояния человека на СОЭ при наличии и при отсутствии резус-фактора крови (рис. 2, 3).

***В проведённых нами исследованиях впервые достоверно установлено, что выраженное субъективное состояние мозга человека оказывает влияние на физико-химические свойства крови [26-28].***

Результаты проведённых исследований убедительно доказывают существование дистанционно-полевого эффекта выраженного субъективного состояния человека. Бесконтактное дистанционное влияние субъективного состояния может осуществляться только посредством поля, создаваемого самим биологическим объектом – мозгом человека. Это мозговое поле названо нами ***«психогенным полем»***, поскольку оно отражает психическое, субъективное состояние человека [21-23, 29,30].

В работах Ю.В. Гуляева с соавт. (1984); А.Г. Гурвич (1944); В.П. Казначеева с соавт. (1981,2004); А. Сент-Дьердьи, (1971) показано, что живой организм излучает множество электромагнитных полей различного спектра: инфракрасное поле, электрическое, магнитное, ультрафиолетовые лучи [31--35].

Как известно, поле – это вид материи. Как и всякая материя, поле обладает своим свойством. Природа, характер поля определяется его проявлениями. Доказательством наличия любого поля служит его дистанционное действие на какие-либо процессы или физические тела. Например, гравитационное поле – притяжением масс, электрическое поле – движением заряженных частиц и так далее. На существование психогенного поля указывают, представленные в этой статье достоверные данные, дистанционного влияния выраженного субъективного состояния человека на СОЭ крови. Возможно, есть и иные свойства этого поля, о которых мы ещё пока ничего не знаем. При всём этом, вряд ли кто-нибудь будет утверждать, что все поля, известные в науке, уже открыты и других больше нет в природе.

Материя такова, - какая она есть. Мы не можем объяснить, почему она имена такая. – Почему электрон заряжен, и что придаёт ему заряд? Говоря о природе поля, возможно, только знать и указать на источник поля. Мы пока не знаем, что является источником психогенного поля.

### *Эволюционные истоки дистанционного взаимодействия особей*

Можно представить существование двух каналов связи между субъектами.

Первый канал - визуально-голосовой. У человека он проявляется речью, мимическими выражениями и жестикуляцией. Он позволяет на определённое расстояние передавать информацию друг другу. Обязательный способ обмена информацией на расстояние у человека практически отсутствует. С помощью аудио—видеотехники дистанцию визуально-голосовой передачи сигнала можно увеличивать.

У животных в природе таких технических средств нет. Дистанция коммуникации их между собой ограничена биологическими возможностями. В особенности, это касается животных, стоящих на низших уровнях эволюционного развития.

На первый план у них выходят способы химической передачи с помощью летучих биологических веществ, и, возможно, другие способы, дистанционно-полевой передачи простых сигналов, необходимых для выживания и размножения, - таких сигналов, как: полезно, вредно, опасно и тому подобное.

Этот вид дистанционно-полевой коммуникации в эволюционном развитии «дошёл» до человека, однако в значительно ослабленном виде, поскольку на первый план вышли высокоэффективные способы визуально-речевой коммуникации. Более ранний, древний дистанционно-полевой способ взаимодействия между особями может индивидуально проявляться у человека только при каких-то экстремальных обстоятельствах. Поэтому он не может быть всегда воспроизведён в эксперименте.

Вышедшие на первый план у человека визуально-речевые коммуникации «заглушили» межличностные дистанционно-полевые взаимодействия. В общественно-социальных взаимоотношениях людей эти влияния оказались бы нецелесообразными, так как были бы помехой, - шумовым полевым фоном, исходящим от различных людей.

В отношении такого рода дистанционно-полевых психогенных влияний со стороны других людей в мозге человека сформировался своего рода защитный барьер.

При этом осталось достоверное влияние психогенного поля человека на относительно простые живые структуры, в частности, кровь.

Вместе с тем, в самом мозге человека сохранились и получили развитие полевые механизмы психической деятельности мозга, обеспечивающей сознание, эмоции, обучение и субъективное восприятие себя и окружающего мира.

### *Экспериментальная модель дистанционно-полевого взаимодействия крыс*

В представленных нами исследованиях показано дистанционно-полевое влияние выраженного психоэмоционального состояния человека на физико-химические свойства крови [26-28]. При этом остаётся открытым вопрос, как действует «психогенное поле» на мозг, на какие структуры, каким образом?

Для выявления дистанционно-полевого взаимодействия животных и для изучения действия «психогенного поля» на мозговые когнитивные функции нами предложена экспериментальная модель дистанционно-полевого взаимодействия крыс.

Процедура экспериментов заключается в следующем.

В первой части эксперимента происходит обучение взаимодействию крыс – «жертв» с крысами – «партнёрами».

Эксперименты проводятся в первом боксе, который состоит из трёх отдельных отсеков.

Первый отсек имеет электрофицированный пол для электро-кожного раздражения крыс. К нему примыкает второй, - тёмный «домашний» отсек, в которой также имеется электрофицированным пол.

В перегородке между этими отсекам есть отверстия для обмена воздуха, запахов и прохождения звуков. Со вторым отсеком связан третий, ярко освещённый отсек, в который могут свободно переходить крысы из второго тёмного отсека в светлый отсек.

В отдельных отсеках бокса находятся две группы крыс, изолированных перегородкой между собой.

В первый отсек бокса помещаются крысы – «жертвы», которые подвергаются электро-кожному раздражению, в том случае, если крысы – «партнёры», находятся во втором – тёмном отсеке. Как только крысы – «партнёры» переходят в менее предпочитаемый ими светлый отсек, прекращается электро-кожное раздражение крыс – «жертв». Для ускорения обучения на первоначальном этапе крысы – «партнёры» одновременно с крысами – «жертвами» также подвергаются электро-кожному раздражению, что является дополнительным стимулом для их перехода в светлый отсек. По мере их обучения электро-кожное раздражение уменьшается, и, в конце концов, полностью отменяется. Для проведения экспериментов желательно использовать крыс близких родственников.

Крысы – «партнёры» в результате обучения научаются переходить из тёмного в светлый отсек при электро-кожном раздражении крыс – «жертв», тем самым, избавляют их от болевого воздействия.

Эмоционального взаимодействия крыс было названо П.В. Симоновым (1982), как «эмоциональный резонанс», и на этой основе нами был разработан оригинальный метод тестирования крыс - «садистов и - «альтруистов» (Е.А. Юматов, О.А. Мещерякова, 1988, 1990).

Таким образом, эмоциональные реакции крыс – «жертв» определяет поведение крыс – «партнёров». После проведённого в первой части экспериментов обучения это состояние крыс – «жертв» можно использовать во второй части для тестирования дистанционно-полевого взаимодействия крыс. Для этой цели необходим отдельный второй бокс с электрофицированным полом, в который помещаются крысы – «жертвы».

Бокс устанавливается на удалении, в другом помещении, при этом обеспечивается не проникновение внешних запахов и звуков.

В этом боксе проводят электрическое раздражение крыс – «жертв», вызывая у них характерные эмоциональные реакции, и одновременно наблюдают поведение крыс – «партнёров» в первом боксе. Если в это время крысы – «партнёры» переходят из темного отсека бокса в светлый, то это означает, что они дистанционно восприняли сигнал от крыс – «жертв».

### *Теории о природе психической деятельности мозга*

Во всей проблеме субъективной деятельности мозга существует основной вопрос, - каким же образом в уникальной, живой организации, какой является мозг, в принципе может возникать субъективное состояние в виде самоощущения? Иначе говоря, какая должна быть психофизическая организация, которая способна воспроизводить субъективное отношение к самой себе?

А.М.Иваницкий предложил теорию «Информационного синтеза», согласно которой психические явления возникают в результате возврата возбуждения к местам первоначальных проекций, сравнения и синтеза в коре новой информации с той, которая извлекается из памяти и поступает от центров мотиваций [12].

Вряд ли на основе движения возбуждений по нервным цепям можно понять и раскрыть природу психической деятельности мозга. Об этом писала Н.П. Бехтерева [13].

В своей работе S. Hameroff (2007) гипотетически связывает возникновение субъективной активности мозга со структурой и функцией нейронных микротрубочек. Автор высказывает предположение, что субъективное состояния мозга возникает на квантовом уровне его организации, и мозг является квантовым компьютером [36].



По мнению автора: «мозг создаёт своё субъективное состояние в деятельности нейронов на уровне цитоскелета микротрубочек».

Однако эти теоретические взгляды автора не подкреплены экспериментальными исследованиями и не представлены доказательства их связи с субъективной деятельностью мозга. Ни что не указывает и на то, что мозг является квантовым компьютером.

К.В. Анохин в своих многочисленных лекциях и выступлениях [37] выдвигает «Гиперсетевую теорию сознания», в которой указывает, что любой мозг – это сетевая структура, обладающая когнитивной гиперсетевой функцией – когнитомом; любой разум - это гиперсетевая структура мозга [38].

Хорошо известно, что нейронные образования мозга образуют за счёт связей нейронные сети. Добавление к известному представлению о нейронной сети приставку «гипер-» ничего не даёт для понимания природы психической деятельности мозга.

Несомненно, нейронная сеть есть, но вопрос, каким же образом в ней формируется психика, остаётся открытым. Констатация существования гиперсетевой структуры мозга ничего не даёт для понимания природы психической деятельности мозга. Для этого необходимо раскрыть, каким образом в гиперсетевой структуре мозга формируется психика.

Как я уже отмечал, ссылаясь на Н.П. Бехтереву [13], : «...вряд ли полный код мыслительных процессов будет раскрыт только за счёт импульсной активности нейронов и нейронных популяций...», и на Т. Нагель [14]: «Параллельное описание нейрофизиологических процессов и ментальных состояний, ими вызываемых (?) или им сопутствующих (?) никак не помогает ответить на вопрос, *как* поведение нейронной сети порождает субъективные состояния, чувства, рефлексию и другие феномены высокого порядка».

Таким образом, все эти представления не позволяют понять, как же мозг, в отличие от компьютеров и прочих неживых систем, создаёт своё внутреннее субъективное состояние, то есть сам себя ощущает?

Для понимания природы субъективного состояния необходимо представить себе принципиальную схему мозговой организации, способной воспроизводить в себе субъективные самоощущения.

Для появления психического состояния мозга необходим своего рода «экран» на который проецируется вся информация о внутреннем состоянии организма и о внешней среде.

Этот «экран» самоощущения отражает во всей совокупности субъективное «Я», то есть психику.

Для наглядности приведу пример. В кинотеатре изображение отбрасывается на экран. Однако этот экран сам себя, своё состояние не воспринимает, он лишь отражает свет.

Поэтому у этого экрана нет субъективного состояния. В мозге «экран» не только воспринимает весь комплекс информации, возникшей в нейрофизиологических процессах, но и меняет своё состояние под влиянием этих процессов.

Это состояния «экрана» и есть психика.

Вопрос в том, что является в мозге «психическим экраном» и что на него воздействует?

По нашему мнению, мозговая организация должна создавать в своей молекулярной структуре специфические полевые процессы, вторично воздействующие на нейрофизиологические механизмы, являющиеся «психическим экраном».

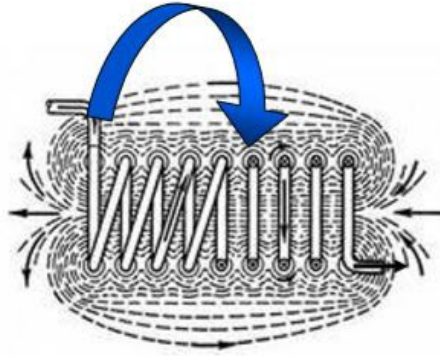
Опираясь на представления Э.Х. Ленца (1833), М. Фарадея (1834) о физической самоиндукции и И. Тасаки (1957) об электротоническом действии поля на возбудимые клетки [39], мы предложили принципиальную схему формирования субъективного состояния мозга (рис. 4), основанную на замкнутых полевых эффектах [40].

Известно «обратное действие» электромагнитного поля на процессы возникновения и проведения возбуждения в возбудимых клетках: в нейронах, в нервах, мышцах.

На примере деятельности нейрона или мышцы можно видеть, что первично возникающие мембранные ионные токи, генерируют потенциал действия, синаптический потенциал, которые посредством распространяющегося поля (электротонический эффект) воздействуют на близлежащие электровозбудимые структуры, последовательно вызывая в них процессы распространения возбуждения.

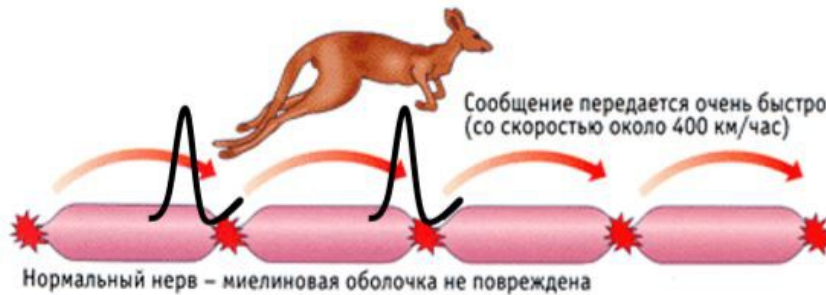
Полевое электротоническое воздействие способно влиять на возбудимость нервных клеток.

Электромагнитная самоиндукция



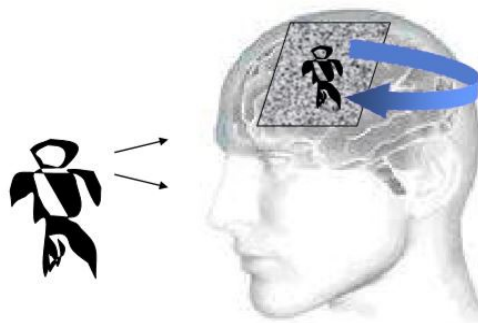
Э. Х. Ленц (1833), М. Фарадей (1834)

Полевой электротонус



И. Тасаки (1957)

В этих процессах можно видеть «обратное действие» поля, порождённого нервной тканью.



*Рис.5. Самоиндукция в мозге. Гипотетическая принципиальная схема формирования субъективного состояния мозга. Обратное влияние психогенного поля на нейронные молекулярные процессы.*

По нашему мнению генерируемое мозгом психогенное поле оказывает обратное вторичное влияние на нейронные молекулярные процессы, вызывая в деятельности всего мозга субъективное состояние. Нейронные структуры головного мозга являются «генератором» специфического мозгового поля и одновременно «экраном», на которое воздействует это поле. Это характеризует замкнутый цикл само восприятие процессов, происходящих в нейронных структурах мозга (рис. 5). По аналогии с физикой можно назвать обратное влияние поля на структурно-молекулярные процессы в мозге, как «самоиндукция мозга».

В предстоящих исследованиях перед нами стоит вопрос, какие молекулярные структуры мозга являются источником психогенного поля и какие молекулярные образования воспринимают это поле?

### ***Системное взаимодействие нейрофизиологических и субъективных процессов в деятельности мозга***

Теория функциональных систем, разработанная П.К. Анохиным (1968), и широко представленная в работах К.В. Судакова (1984), В.Б. Швыркова (1978) указывает на узловое нейрофизиологические механизмы в деятельности мозга, с которыми связано формирование целенаправленного поведения и происхождение эмоциональных и мыслительных процессов [2, 41,42].

Однако в центральной архитектуре поведенческого акта отражена только нейрофизиологическая составляющая мозговых процессов и не представлена организация субъективных процессов. Субъективное остаётся как бы «за кадром», только подразумевается, что оно существует.

Функциональная система целенаправленного поведения имеет две взаимосвязанных и объединённых в единое целое подсистем: ***нейрофизиологической и субъективной*** [22,24, 29]. Единство не исключает системное взаимодействие нейрофизиологических и субъективных процессов в деятельности мозга (рис. 6).

Структурно-нейрофизиологический компонент функциональной системы не может осуществлять свою результативную деятельность без участия субъективной сферы, равно как и субъективная подсистема формируется на основе нейрофизиологических процессов.

Нейрофизиологический уровень является основой для восприятия окружающей среды и внутреннего состояния организма; для реализации различных форм поведения и регуляции жизнедеятельности организма.

На нейрофизиологическом уровне осуществляется восприятие всех сенсорных потоков возбуждения от органов чувств, формируются биологические мотивации, компоненты памяти, связанные с запоминанием и хранением информации, эфферентные, командные программы, управляющие

движением и поведением, все соматические и вегетативные реакции, происходит оценка полученного результата.

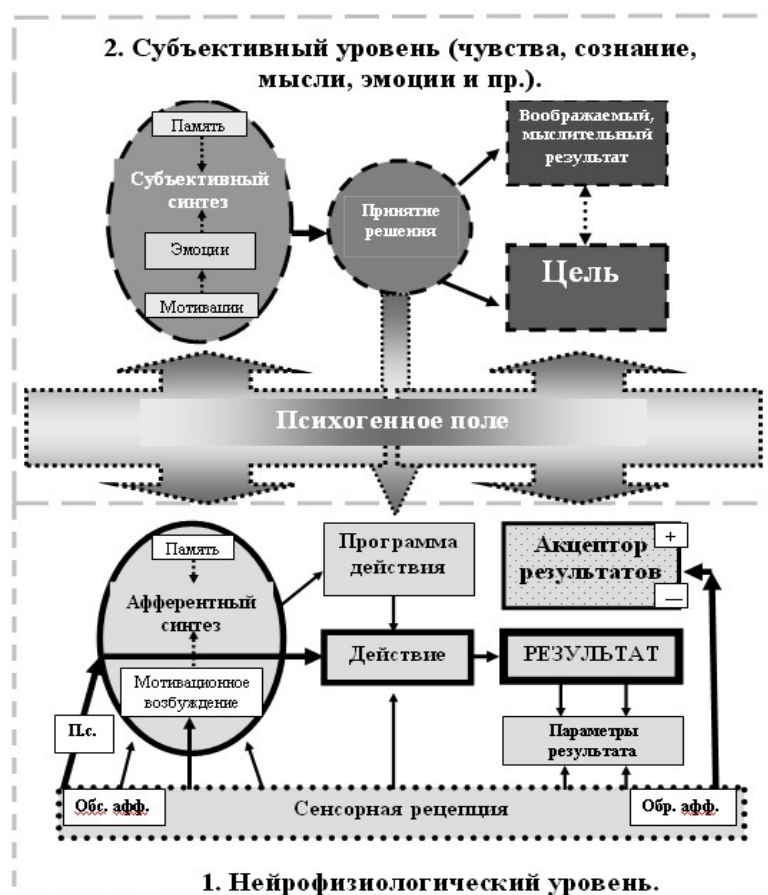


Рис. 6. Схема функциональной системы целенаправленного поведения: взаимодействие нейрофизиологических (1) и субъективных (2) процессов в деятельности мозга. Обозначения: П.с. - пусковой стимул, Обс. афф. – обстановочная афферентация, Обр. афф. – обратная афферентация.

На субъективном уровне осуществляется осмысление всей поступающей в мозг информации, формируются социальные мотивации, происходит инициация извлечения необходимой информации из памяти, появляется цель, и возникают все психологические проявления, такие, как сознание, мышление, эмоции и пр. Основные психические функции мозга: свобода воли, постановка цели, выбор поведения, мыслительный, воображаемый результат и оценка достижения цели происходят на субъективном сознательном уровне.

Память имеет два компонента: нейрофизиологический и субъективный. Процесс запоминания осуществляется на нейрофизиологическом уровне, который протекает с вовлечением субъективной деятельности мозга. Процесс хранения всей информации в памяти происходит на нейрофизиологическом уровне без субъективного восприятия. Воспоминание и извлечение информации

из памяти всегда происходит при участии субъективной мыслительной сферы деятельности мозга. Фактически, в настоящее время всё изучение памяти ограничивается нейрофизиологическими механизмами. Без вовлечения субъективной сферы невозможно раскрыть все механизмы памяти. Поэтому процесс извлечение информации из памяти до сих пор остаётся непознанным.

Эмоции мобилизуют организм на достижение цели. Отрицательная эмоция побуждает к действию, которое позволило бы достичь, необходимый результат. Положительная эмоция создаёт эффект удовлетворения и подкрепления, завершающий конкретный поведенческий акт. Поведение всегда ориентировано по общему вектору: от отрицательной эмоции к положительной. Возникшие эмоции преобразуются на нейрофизиологическом уровне в эмоциональные реакции организма.

На нейрофизиологическом уровне, без вовлечения субъективной сферы, совершаются отработанные рефлекторные реакции, автоматизированные поведенческие акты, за счёт ранее сложившейся предпусковой интеграции [2].

Субъективные и нейрофизиологические процессы в мозге тесно взаимосвязаны и эта связь – двухсторонняя. Базисная основа субъективного кроется в уникальности биологической организации мозга, как живой материи в существующем мироздании. Различные формы субъективного, - от простых до самых высших, определяются развитием структурно-информационной организации мозга и состояниями бодрствования и сна.

### ***«Мозговой психический экран» во время бодрствования и сна***

Во время бодрствования в сознании человека отображаются окружающая действительность, внутреннее состояние - самоощущения себя, размышления, фантазии и воспоминания, - все они слиты в единое субъективное состояние, характеризующее собственное Я.

Во время сна субъективное – психическое состояние человека существенно изменяется. Осознание внешней окружающей среды практически отсутствует. Субъективное самоощущение себя присутствует в той или иной степени и может оказывать влияние на качество сна. Во время сновидения человек в своём субъективном восприятии видит различные искаженные, несвязанные между собой образы, испытывает определённые эмоциональные состояния вызванными ими. Самое удивительное то, что при сновидениях может возникать раздвоение личности, «мозговой психический экран» как бы раздваивается, на чужой и свой. В чужом отображается что-то, что не исходило от самого человека, и воспринимается им во сне, как нечто постороннее, - со стороны, к которому он не имеет никакого отношения. В своём собственном сновидении отображается всё от самого себя, в том числе и его отношение, - критическое или позитивное к тому, что он воспринимает, как чужое, постороннее.

При этом появление в сновидении человека якобы чужих, не принадлежащих ему мыслей, чувств, фантазий, как бы, совершённых действий и прочего, - всё же связано с мозгом этого человека и его психической деятельностью, так как другого источника нет.

Из всего выше изложенного вытекает наше представление о сознании.

***Сознание - это субъективная – психическая деятельность, характеризующаяся способностью мозга к самоощущению, в которой проявляются чувства, эмоции, мышление, - связанные с внутренним состоянием организма и окружающей действительностью, с постановкой цели, с прогнозированием и с оценкой результатов действий.***

### ***Психогенная теория сознания: основные постулаты***

- Истоки существования субъективного состояния находятся в фундаментальных свойствах живого мозга, который является особым видом материи, имеющим свои собственные физические законы и специфические мозговые поля.

- Функциональная система целенаправленного поведения имеет два взаимосвязанных уровня мозговой организации: нейрофизиологический и субъективный, и представляет собой единую целостную системную организацию.

- Субъективное состояние мозга возникает при взаимодействии и взаимосвязи нейрофизиологических процессов и специфического для мозга «психогенного поля».

- Биологические поля, создаваемые в мозге, могут оказывать обратно направленное влияние на структурно-функциональные процессы в нём («самоиндукция в мозге»).

- Психоневрологические заболевания могут первично возникать в субъективных процессах и уже вторично проявляться в различных структурно-функциональных нарушениях.

- Физика живого мозга - новое направление науки, рассматривающей уникальные физические явления, присущие только живому мозгу и отсутствующие в неживой природе.

### ***Литература***

1. Павлов И.П. Двадцатилетний опыт объективного изучения высшей нервной деятельности (поведения) животных. Полное собрание сочинений. 1951. М.-Л. Изд. АН СССР.

2. Анохин П.К. Биология и нейрофизиология условного рефлекса. Медицина. Москва. 1968, с. 548.

3. Ребер А. (ред.), Оксфордский толковый словарь по психологии. 2002.

4. Damasio A. The Feeling of What Happens: Body and Emotion the Making of Consciousness. N.Y. Harcourt Brace, 2000. 386 p.
5. Edelman GM, Tononi G. Consciousness. How matter becomes imagination. London. Pinguin Books. 2000. 274 p.
6. Koch C. Neurobiology of Consciousness, MIT Press, 2005.
7. Поппер К. Знание и психофизическая проблема: В защиту взаимодействия. Пер. с англ. И.В.Журавлева. М., 2008. 256 С.
8. Рубинштейн С.Л. Бытие и сознание. О месте психического во всеобщей взаимосвязи явлений материального мира. М. Изд-во Академии наук СССР. 1957.
9. Рубинштейн С.Л. Бытие и сознание. Человек и мир. М., СПб. Изд-во «Питер», 2003.
10. Данилова Н.Н. Психофизиологическая диагностика функциональных состояний. М., 1992.
11. Бехтерева Н.П., Будзен П.В., Гоголицын Ю.Л. Мозговые коды психической деятельности. Наука, Ленинград 1977, с. 165
12. Иваницкий А.М. Главная загадка природы: как на основе процессов мозга возникают субъективные переживания. Психологический журнал. 1999, т. 20. №.3, с. 93-104.
13. Бехтерева Н.П. Per aspera... Жизнь. Наука о мозге человека. Л., Наука. 1990, 145 с.
14. Нагель Т. Мыслимость невозможного и проблема духа и тела. Вопросы философии, 2001, № 8, с. 101-12.
15. Леонтьев А.Н. Деятельность, сознание, личность. М. 1975. 304 с.
16. Crick F, Koch C. Why neuroscience may be able to explain consiousness. Scientific Amer. 1995, v.273, p. 66.
17. Sperry RW. Neurology and the mind-brain problem. Am. Sci. 1952, v. 40, p. 291-312.
18. Анохин П.К. Психическая форма отражения действительности. В кн.: Ленинская теория отражения и современность. Ред. Т. Павлов. София, 1969. Раздел 1. Глава 3, с. 109.
19. Судаков К.В. Системные механизмы психической деятельности. Неврология и психиатрия им. С.С. Корсакова. 2010, т. 110, №2. с. 4-14.
20. Судаков К.В. К теории единства материального и идеального в деятельности человека. Человек, 2010, № 6. с. 5-16.
21. Юматов Е.А. Системная психофизиология субъективного состояния человека. М. Спутник+, 2011.142 с.
22. Юматов Е.А. Психическая деятельность мозга, - «ключ» к познанию. Ж. Вестник Международной академии наук. Русская секция». 2013, №1, с. 35—45.
23. Юматов Е.А. Системная организация субъективных процессов в мозге. Ж. Российский медико-биологический вестник, 2013, № 3, с. 37.
24. Юматов Е.А. с соавт. Психофизиология эмоций и эмоционального напряжения студентов. Ред. Е.А. Юматов. М. ИТРК, 2017, 200 с.



25. Юматов Е.А. Прямая регистрация субъективного состояния человека. Вестник новых медицинских технологий. 2010, № 4, 187-192.
26. Юматов Е.А., Быкова, Е.В., Джафаров Р. Н. Дистанционное влияние субъективного состояния человека на физико-химические свойства крови. Ж. Бюлл. Эксп. Биол. и мед. 2013, т. 155, № 4, с. 526.
27. Yumatov E.A., Bikova E. V., Dzhafarov R. N. Long-Distance Effects of Human Subjective Status on the Blood Physicochemical Characteristics. Bulletin of Experimental Biology and Medicine, 2013, v. 155, № 4, p. 527-530.
28. Yumatov E.A., Bykova E.V., Potapova O.V, Ragimov A.A., Salimov E.L. Remote-Field Manifestations of Mental Activity of the Human Brain. World Journal of Neuroscience, 2015, v.5, № 2, 108-114.
29. Yumatov E.A. The molecularly fielding psychophysical nature of the brain mental activity. J. Neuroscience and Medicine. 2019, v.10, No.2, p. 55-74. <https://www.scirp.org/Journal/PaperInformation.aspx?PaperID=91888>
30. Юматов Е. А. Дистанционно-полевые проявления психической деятельности мозга. Ж. Биомедицинская радиоэлектроника, 2019, №1, с.5-13.
31. Гуляев Ю.В., Годик Э.Э. Физические поля биологических объектов. Кибернетика живого: Биология и информация. 1984, Москва. Наука, с. 111-116.
32. Гурвич А.Г. Теория биологического поля. 1944. Москва. Госиздат, 155 с.
33. Казначеев В.П., Михайлова Л.П. Сверхслабые излучения в межклеточных взаимодействиях. 1981. Новосибирск, Наука, 144 с.
34. Казначеев В.П., Трофимов А.В. Очерки о природе живого вещества и интеллекта на планете Земля. 2004. Новосибирск. Наука, 312 с.
35. Сент-Дьердьи А. Биоэлектроника. 1971. Москва. Мир, 79 с.
36. Hameroff S. Consciousness, Neurobiology and Quantum Mechanics: The Case for a Connection, In: The Emerging Physics of Consciousness. Ed. by Jack Tuszynski, Springer-Verlag, 2007.
37. Анохин К.В. Лекции. <https://www.youtube.com/watch?v=cOr3kwqoxIo>  
<https://omiliya.org/article/konstantin-anohin-nash-razum-eto-giperset>  
<https://omiliya.org/article/konstantin-anohin-mozg-i-razum-2-ya-lekciya>  
<https://omiliya.org/article/konstantin-anohin-mozg-i-razum>
38. Анохин К.В. Когнитом: в поисках фундаментальной нейронаучной теории сознания. Журнал высшей нервной деятельности им. И.П.Павлова. 2021, № 1, с. 39-71.
39. Тасаки И. Проведение нервного импульса. 1957. М. Изд. Ин. лит. 186 с.
40. Юматов Е.А. Дистанционно-полевые проявления психической деятельности мозга. Ж. Биомедицинская радиоэлектроника, 2019, № 1, с. 5-13.
41. Судаков К.В. Общая теория функциональных систем. М. Медицина, 1984. 224 с.
42. Швырков В.Б. Нейрофизиологическое изучение системных механизмов. М. Наука, 1978. 240 с.

## *Systemic organization of mental activity of the brain*

*Yumatov E.A.*

*P. K. Anokhin Research Institute of Normal Physiology,  
Moscow, Russia. [eyumatov@mail.ru](mailto:eyumatov@mail.ru)*

**Abstract.** *The paper discusses the origin of a human subjective state. The goal of this study is to future explore the human subjective states which are can be registered remotely and objectively. Recently we have established the existence of a "psychogenic field", which are most likely reflecting on the human brain subjective state. The author analyses the remote influence of a human subjective state on the blood physical and chemical parameters. We have submitted the schematic diagram of formation of subjective human brain activity, based on biofeedback action of a psychogenic field to the neural molecular processes (a self-induction in a brain). The paper describes the interrelation of neurophysiologic and subjective processes in the system organization of goal-seeking behavior. A «Psychogenic theory of consciousness» is proposed, suggests presuming the existence of physical phenomena unique for the living brain and brain fields, and their role in the origin of a subjective state.*

**Keywords:** *«mentality», «consciousness», «subjective state», «brain», «a psychogenic field», «paradigm of a subjective state origin».*

### **References**

1. Pavlov I.P. Dvadsatiletniy opit obyektivnogo izucheniya vishey nervnoy deyatelnosti (povedeniya) zivotnikh [Twenty years of experience in the objective study of higher nervous activity (behavior) in animals]. Full composition of writings. 1951. M.-L. Ed. Acad. of Sciences of the USSR.
2. Anokhin P.K. Biologiya i neurofiziologiya uslovnogo refleksa [Biology and neurophysiology of the conditioned reflex]. Medicine. Moscow. 1968, p. 548.
3. Reber A. (ed.), Oxford Dictionary of Psychology. 2002.
4. Damasio A. The Feeling of What Happens: Body and Emotion the Making of Consciousness. N.Y. Harcourt Brace, 2000. 386 p.
5. Edelman GM, Tononi G. Consciousness. How matter becomes imagination. London. Pinguin Books. 2000. 274 p.
6. Koch C. Neurobiology of Consciousness, MIT Press, 2005.
7. Popper K. Znanie i psikhofizicheskaya problema: v zashitu vzaimodeistviya [Knowledge and psychophysical problem: In defense of interaction]. M., 2008. 256p.
8. Rubinstein S.L. Bitiye i soznanie. O meste psikhicheskogo vo vseobshey vzaimosvyazi yavleniy materialnogo mira [Being and consciousness. About the place of the mental in the universal interconnection of the phenomena of the material world]. M. Publishing house of the USSR Academy of Sciences. 1957.
9. Rubinstein S.L. Bitiye i soznanie. Chelovek i mir [Being and consciousness]. Man and the world. M., St. Petersburg. Publishing house "Peter", 2003.
10. Danilova N.N. Psikhofiziologicheskaya diagnostika funktsionalnikh sostoyaniy [Psychophysiological diagnostics of functional states]. M., 1992.
11. Bekhtereva NP, Budzen PV, Gogolitsyn Yu.L. Mozgovie kodi psikhicheskoy deyatelnosti [Brain codes of mental activity]. Science, Leningrad 1977, p. 165
12. Ivanitskiy A.M. Glavnaya zagadka prirodi: kak na osnove protsessov mozgavoznikayut subyektivnie peregivaniya [The main mystery of nature: how subjective experiences arise on the basis of brain processes]. Psychological journal. 1999, v. 20.No. 3, p. 93-104.
13. Bekhtereva N.P. Per aspera ... Zhizn, nauka o mozge [Per aspera ... Life. The science of the human brain]. L., Science. 1990.145 S.
14. Nagel T. Mislmost nevozmognogo i problema dukha i tela [Thought of the impossible and the problem of spirit and body]. Problems of Philosophy, 2001, no. 8, p. 101-12.

15. Леонтьев А.Н. Деятельность, сознание, личность. М. 1975. 304 с.
16. Crick F, Koch C. Why neuroscience may be able to explain consciousness. *Scientific Amer.* 1995, v.273, p. 66.
17. Sperry RW. Neurology and the mind-brain problem. *Am. Sci.* 1952, v. 40, p. 291-312.
18. Anokhin P.K. Psikhicheskaya forma otrazheniya deistvitelnosti [The psychic form of the reflection of reality]. In the book: Lenin's theory of reflection and modernity. Ed. T. Pavlov. Sofia, 1969. Section 1. Chapter 3, p. 109.
19. Sudakov K.V. Sistemnie mekhanizmi psikhicheskoi deyatel'nosti [Systemic mechanisms of mental activity]. *Neurology and Psychiatry. S.S. Korsakov.* 2010, vol. 110, no. 2. from. 4-14.
20. Sudakov K.V. K teorii edinstva material'nogo i ideal'nogo v deyatel'nosti cheloveka [Towards the theory of the unity of the material and the ideal in human activity]. *Man*, 2010, No. 6. p.5-16.
21. Yumatov E.A. Sistemnaya psikhofiziologiya subyektivnogo sostoyaniya cheloveka [Systemic psychophysiology of the subjective state of a person]. *M. Sputnik +*, 2011, 142 p.
22. Yumatov E.A. Psikhicheskaya deyatel'nost' mozga - kluch k poznaniyu [The mental activity of the brain is the "key" to knowledge]. *J. Bulletin of the International Academy of Sciences. Russian section "*. 2013, no. 1, p. 35-45.
23. Yumatov E.A. Sistemnaya organizatsiya subyektivnykh protsessov v mozge [Systemic organization of subjective processes in the brain]. *J. Russian Medical and Biological Bulletin*, 2013, No. 3, p. 37.
24. Yumatov E.A. et al. Psikhofiziologiya emotsiy i emotsional'nogo napryazheniya studentov [Psychophysiology of students' emotions and emotional stress]. Ed. E.A. Yumatov. *M. ITRK*, 2017, 200 p.
25. Yumatov E.A. Pryamaya registratsiya subyektivnogo sostoyaniya cheloveka [Direct registration of the subjective state of a person]. *Bulletin of new medical technologies.* 2010, No. 4, 187-192.
26. Yumatov E.A., Bykova E.V., Jafarov R.N. Distantionnoe vliyanie subyektivnogo sostoyaniya cheloveka na fiziko-khimicheskie svoystva krovi [Remote influence of the subjective state of a person on the physicochemical properties of blood]. *J. Bull. Exp. Biol. and honey.* 2013, vol. 155, no. 4, p. 526.
27. Yumatov E.A., Bikova E. V., Dzhafarov R. N. Long-Distance Effects of Human Subjective Status on the Blood Physicochemical Characteristics. *Bulletin of Experimental Biology and Medicine*, 2013, v. 155, № 4, p. 527-530.
28. Yumatov E.A., Bykova E.V., Potapova O.V, Ragimov A.A., Salimov E.L. Remote-Field Manifestations of Mental Activity of the Human Brain. *World Journal of Neuroscience*, 2015, v.5, № 2, 108-114.
29. Yumatov E.A. The molecularly fielding psychophysical nature of the brain mental activity. *J. Neuroscience and Medicine.* 2019, v.10, No.2, p. 55-74. <https://www.scirp.org/Journal/PaperInformation.aspx?PaperID=91888>
30. Yumatov E.A. Distantionno-polevie proyavleniya psikhicheskoy deyatel'nosti mozga [Remote-field manifestations of mental activity of the brain]. *J. Biomedical Radio Electronics*, 2019, No. 1, p. 5-13.
31. Gulyaev Yu.V., Godik E.E. Fizicheskie polya biologicheskikh obyektov [Physical fields of biological objects]. *Cybernetics of the Living: Biology and Information.* 1984, Moscow. Science, p. 111-116.
32. Gurvich A.G. Teoriya biologicheskogo polya [Biological field theory]. 1944. Moscow. State Publishing House, 155 p.
33. Kaznacheev V.P., Mikhailova L.P. Sverkhslabie izlucheniya v mezhkletochnykh vzaimodeystviyakh [Superweak radiation in intercellular interactions]. 1981. Nauka, 144p.

34. Kaznacheev V.P., Trofimov A.V. Ocherki o prirode zhivogo veshstva I intellekta na planete Zemlya [Essays on the nature of living matter and intelligence on planet Earth]. 2004. Novosibirsk. Nauka, 312 p.
35. Sainte-Dyurdyy A. Bioelektronika [Bioelectronics]. 1971. Moscow. Mir, 79 p.
36. Hameroff S. Consciousness, Neurobiology and Quantum Mechanics: The Case for a Connection, In: The Emerging Physics of Consciousness. Ed. by J. Tuszynski, Springer-Verlag, 2007.
37. Anokhin K.V. Lectures: <https://www.youtube.com/watch?v=cOr3kwqoxIo>  
<https://omiliya.org/article/konstantin-anohin-nash-razum-eto-giperset>  
<https://omiliya.org/article/konstantin-anohin-mozg-i-razum-2-ya-lekciya>  
<https://omiliya.org/article/konstantin-anohin-mozg-i-razum>
38. Anokhin K.V. Kognitom: v poiskakh fundamentalnoy neironauchnoy teorii soznaniya [Cognitom: In Search of a Fundamental Neuroscientific Theory of Consciousness]. *Journal of Higher Nervous Activity*. I.P. Pavlova. 2021, no. 1, p. 39-71.
39. Tasaki I. Provedenie nervnogo impulsa [Conducting a nerve impulse]. 1957. M., 186 p.
40. Yumatov E.A. Distantionno-polevie proyavleniya psikhicheskoy deyatel'nosti mozga [Remote-field manifestations of mental activity of the brain]. *J. Biomedical Radio Electronics*, 2019, No. 1, p. 5-13.
41. Sudakov K.V. Obshaya teoriya funktsionalnikh sistem [General theory of functional systems]. M. Medicine, 1984.224 p.
42. Shvyrkov V.B. Neurofiziologicheskoi izuchenie sistemnikh mekhanizmov [Neurophysiological study of systemic mechanisms]. M. Nauka, 1978.240 p.

## **Моделирование когнитивных свойств таламуса мозга как синхронизируемой релаксационной системы с самоорганизованной критичностью**

Мазуров М. Е.

д.ф.-м.н., проф. Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова,  
Москва, Россия,  
e-mail: mazurov37@mail.ru

*Аннотация.* Предложена математическая модель когнитивных свойств «специфической» структуры ядер таламуса, позволяющая объяснить ряд его замечательных свойств. Математическая модель представлена как нелинейная динамическая система с самоорганизованной критичностью в виде избирательной нейронной сети с избирательными нейронами-ядрами. Дано обоснование представления таламуса как системы с самоорганизованной критичностью, обусловленной тем, что таламус является управляемой релаксационной автоколебательной системой вблизи порога возбуждения релаксационных колебаний при наличии стабилизирующей нелинейной отрицательной обратной связи. Проведены вычислительные эксперименты математической модели таламуса, которые показали, что таламус обладает свойствами когнитивной обработки приходящей сенсорной информации, распределительными, избирательными и усилительными свойствами. Изучены отклики математической модели на подпороговую стимуляцию, показавшие релевантность математической модели откликам нейронной клетки в реальных физиологических условиях. Дано сравнение свойств математической модели с реальными свойствами возбудимости нейрона в реальных условиях физиологического эксперимента. Показана релевантность математической модели на наличие релейных, избирательных и усилительных свойств для сенсорных сигналов. Показана релевантность свойств математической модели таламуса его реальным физиологическим свойствам при формировании когнитивных понятийных свойств сознания.

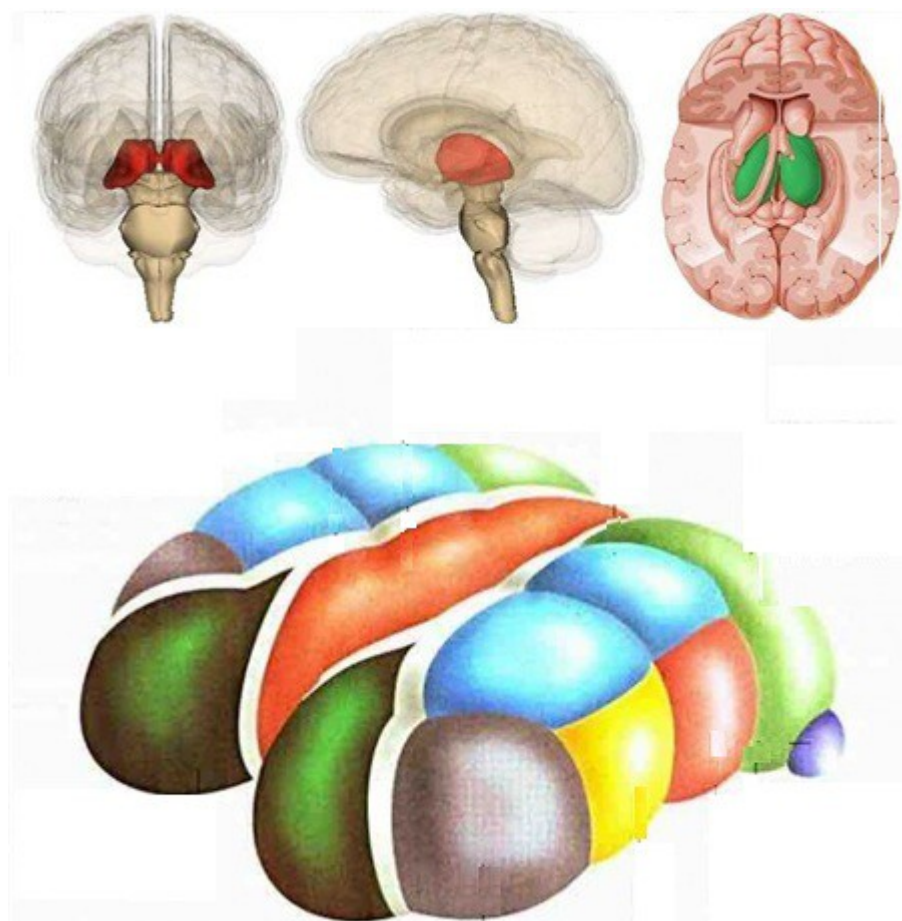
**Ключевые слова:** таламус, ядра таламуса, сетевая модель, самоорганизованная критичность, математическая модель.

### **Введение**

Целью работы является разработка математической модели таламуса. Предложена математическая модель когнитивных свойств «специфической» структуры ядер таламуса, позволяющая объяснить ряд его замечательных свойств. Математическая модель представлена как нелинейная динамическая система с самоорганизованной критичностью в виде избирательной нейронной сети с избирательными нейронами-ядрами. Дано обоснование представления таламуса как системы с самоорганизованной критичностью, обусловленной тем, что таламус является управляемой релаксационной автоколебательной системой вблизи порога возбуждения релаксационных колебаний при наличии стабилизирующей нелинейной отрицательной обратной связи.

В таламусе выделяют более 150 парных ядер, которые подразделяют на три группы: релейные, ассоциативные и неспецифические [1]. Каждое из ядер спе-

специализируется на первичной ретрансляции информации от органов чувств того или иного типа в кору больших полушарий, получает сильные обратные связи от соответствующей зоны коры больших полушарий, окружающих ядер, гиппокампа, гипоталамуса, продолговатого мозга и других, что регулирует активность данного ядра и степень фильтрации им входящего потока информации. Все ядра таламуса в разной степени обладают тремя общими функциями: релейной, переключающей, интегративной и усилительной. Рассмотрим анатомию и функциональную роль таламуса. Расположение таламуса в мозге в окружении некоторых соседних структур иллюстрируются рис.1.



*Рис.1. Расположение таламуса в мозге.  
Таламус в 3-х проекциях показан на рис.1 сверху.*

Рассмотрим функциональную роль отдельных ядер таламуса. Релейные ядра таламуса делятся на сенсорные и несенсорные. Сенсорные релейные ядра переключают потоки афферентной сенсорной импульсации в сенсорные зоны коры. В них также происходит перекодирование и обработка информации. Формированию зрительных ощущений способствует латеральное колленчатое тело, которое переключает зрительную импульсацию в затылочную кору. Реле для переключения слуховой импульсации в височную кору задней части

сильвиевой борозды является медиальное коленчатое тело.

Несенсорные релейные ядра таламуса переключают в кору несенсорную импульсацию, поступающую в таламус из разных отделов головного мозга. В передние ядра таламуса импульсация в основном поступает из гипоталамуса. Вентральные ядра участвуют в регуляции движений, выполняя моторную функцию.

Ассоциативные ядра таламуса принимают импульсацию не от проводниковых путей анализаторов, а от целого ряда других ядер таламуса.

Неспецифические ядра имеют многочисленные входы от других ядер таламуса, кроме того, в неспецифические ядра таламуса поступает информация от всех специфических сенсорных систем, моторных центров ствола, ядер мозжечка, базальных ганглиев и гиппокампа, а также от коры мозга. Именно, благодаря этим многочисленным связям ядра таламуса выступают в роли интегрирующего посредника.

Иллюстрация физиологической и когнитивной структуры связей таламуса и его связь с корой головного мозга человека показана рис. 2.

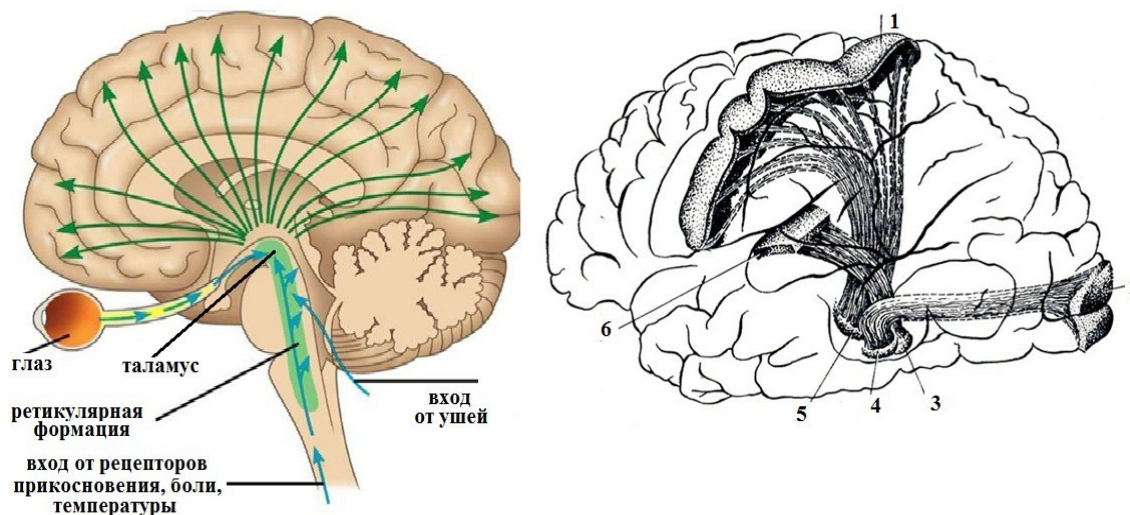


Рис. 2. Физиологическая структура правого таламуса и его некоторых связей с корой головного мозга человека. Связи таламуса с корой головного мозга человека. Схема-модель трех главных чувствительных систем левого полушария мозга, восходящих к клеткам его коры. 1 – область общей чувствительности коры полушария мозга; 2 – зрительная область коры полушария мозга; 3 – медиальное коленчатое тело; 4 – латеральное коленчатое тело; 5 – латеральное ядро зрительного бугра; 6 – слуховая область коры головного мозга.

Отметим некоторые функции ядер таламуса. Латеральное коленчатое тело - это место переключения зрительных сигналов, аксоны направляются в затылочную долю коры. Медиальное коленчатое тело - это место переключения слуховых сигналов, аксоны направляются в височную долю коры. Заднее вентральное ядро - это место переключения сигналов с рецепторов кожи, туловища, проприорецепторов и других. Заднее медиальное ядро - это

висцерорецепция. Передние ядра таламуса - это вкусовая и обонятельная рецепция. Таким образом, таламус является входным устройством, на которое подается огромное количество сенсорной информации. Эта информация в зависимости от её назначения должна быть классифицирована, перераспределена по специфическим отделам неокортекса. Эта задача решается с помощью специфических ядер таламуса.

### *Материалы и методы*

Для моделирования таламуса мозга использованы известные из литературы многочисленные результаты экспериментальных исследований. Это данные о многоядерной структуре таламуса с идентифицированными функциями отдельных ядер [1]. Экспериментальные исследования когнитивных свойств таламуса, позволившие идентифицировать таламус как избирательную, релейную, переключательную, усилительную структуру [1,2]. Установлено, что таламус - это структура с исключительно обширными положительными и отрицательными (тормозными) обратными связями [1,2]. Эти связи имеются с неокортексом, гиппокампом, гипоталамусом и другими структурами. Большое количество обратных связей имеются и между отдельными ядрами таламуса. Перечисленные свойства таламуса были использованы для построения его когнитивной структуры и математической модели.

### *Результаты*

Математические модели, объясняющие набор замечательных свойств таламуса, в настоящее время отсутствуют. Возможность построения таких моделей обусловлена совокупностью свойств: свойством самоорганизованной критичности, тем, что таламус является управляемой релаксационной автоколебательной системой вблизи порога возбуждения релаксационных колебаний, наличием стабилизирующей нелинейной отрицательной обратной связи.

Отметим сразу, что совокупность ядер таламуса в сочетании с их связями можно считать топологически эквивалентной избирательной нейронной сети, в которой в качестве ядер таламуса используются избирательные нейроны. Такое представление позволяет более эффективно представить когнитивные свойства таламуса.

#### *1. Математическая модель когнитивных свойств мозга по акад. К.В. Анохину*

Для моделирования когнитивных процессов, сознания, акад. К.В. Анохиным предложено использовать многоуровневые гиперсетевые модели. Составляющими этих моделей являются элементы коги, коммы, когнитомы. Наглядная геометрическая иллюстрация теории К.В. Анохина показана на



рис.3.

К.В. Анохин приводит образную иллюстрацию многоуровневой гиперсетевой модели, составляющими которой являются элементы коги, коммы, когнитомы.

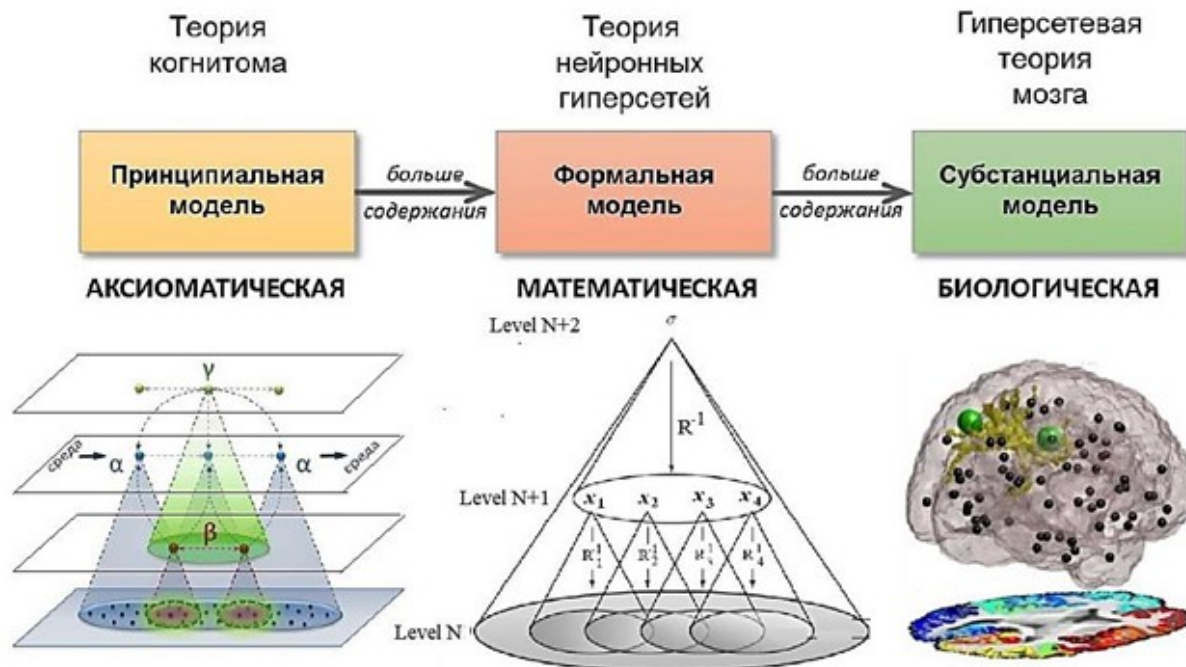


Рис. 3. Наглядная иллюстрация теории К.В. Анохина для двух сетевых уровней мозга.

Он сравнивает организацию этой структуры с организацией структуры снопов соломы, показанной на рис. 4.



Рис. 4. Иллюстрация теории К.В. Анохина для двух сетевых уровней путем сравнения с организацией снопов соломы. Слева одноуровневая структура снопа, справа двухуровневая.

## 2. Математическая модель когнитивных свойств таламуса

Для того чтобы гиперсетевые модели К.В. Анохина могли описывать динамику электрических процессов в мозге, необходимо снабдить их физическим и физиологическим содержанием. Предложена математическая модель когнитивных свойств «специфической» структуры таламуса в виде однослойной избирательной нейронной сети, представляющей нелинейную динамическую систему, работающую в режиме самоорганизованной критичности. Она топологически эквивалентна однослойной нейронной сети с избирательными нейронами. Структура математической модели таламуса включает ядра, представляющие ансамбли или пулы однотипных избирательных импульсных нейронов, она показана на рис. 5.

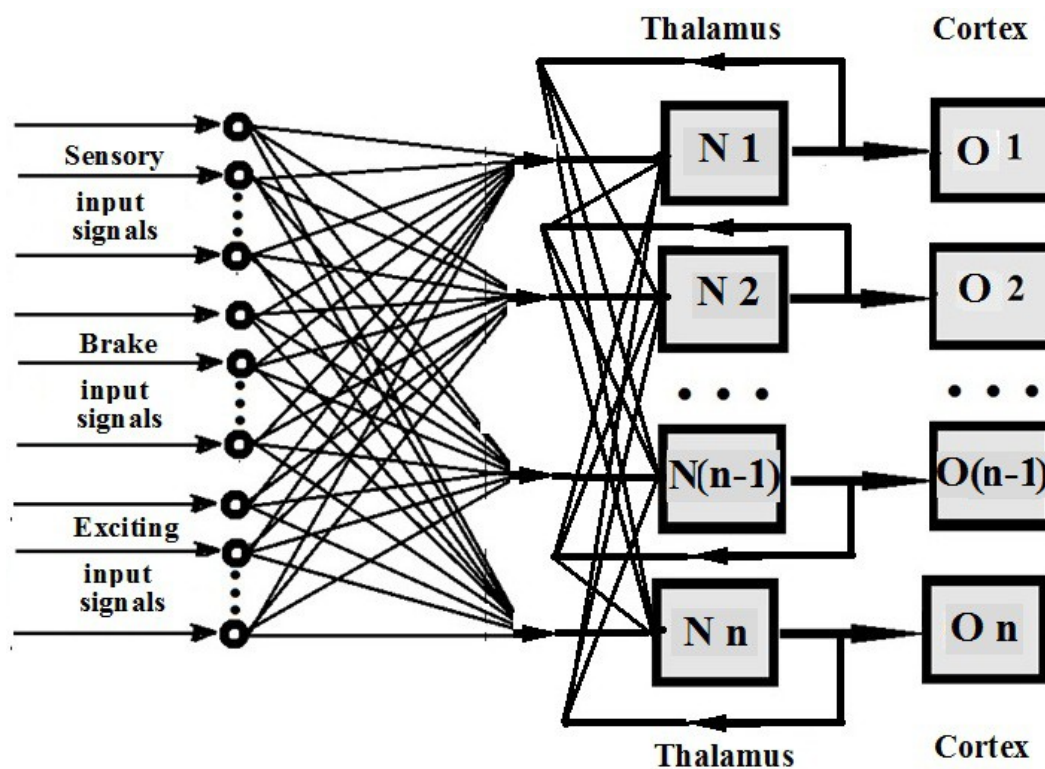


Рис. 5. Математическая модель когнитивных свойств «специфической» структуры таламуса в виде нелинейной динамической системы топологически эквивалентной однослойной нейронной сети с избирательными нейронами.

Структура математической модели таламуса включает ядра, представляющие ансамбли или пулы однотипных избирательных импульсных нейронов. Избирательность нейронных ансамблей обеспечивается их кластерной организацией.

Возбуждение нейронного пула происходит при превышении суммы входных сигналов возбуждающих и тормозных, то есть при условии

$$\left( \sum_{i \in K_j} x_i^{(1)} - \sum_{i \in L_j} x_i^{(2)} \right) \geq U_{pj},$$

где  $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}$  - возбуждающие и тормозящие сигналы,  $U_{pj}$  - порог возбуждения,  $j=1, \dots, N$ ,  $K_j, L_j$  - избирательные кластеры, содержащие возбуждающие и тормозные нейроны, которым принадлежат входные импульсные сигналы  $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}$ . Каждому нейронному пулу соответствует определенный кластер, общее число кластеров равно  $N$ . Возбуждение нейронного пула при превышении порога  $U_{pj}$  приводит к возбуждению релаксационного автогенератора, содержащегося в составе импульсного нейрона, производящего периодическую импульсную последовательность, спайк или одиночный импульс, поступающие в определенную область коры мозга. В качестве математической модели релаксационного автогенератора может быть использована любая известная модель импульсного нейрона.

Предлагаемая математическая модель таламуса в виде совокупности ядер в сочетании с их связями топологически эквивалентна избирательной нейронной сети, в которой в качестве ядер таламуса используются избирательные нейроны. В математической модели учитывается наличие обратных связей с неокортексом. В целом математическая модель имеет сходство также с нейронной сетью Хопфилда, в которой имеет место наличие обратных связей [3]. Такое представление позволяет более эффективно отразить когнитивные свойства таламуса.

### ***3. Реализация самоорганизованной критичности в таламусе***

Замечательные свойства таламуса следующие: наличие релейных распределительных свойств; избирательность по отношению к входной сенсорной информации; значительное усиление интенсивности слабых сенсорных сигналов. Эти свойства можно реализовать с помощью системы с положительной обратной связью, находящейся в околопороговом режиме или в точке бифуркации, при переходе которой возникает автоколебательный режим.

Информация о таких возможностях околопороговых систем, называемых также регенеративными, хорошо известна в теории самоорганизованной критичности [4-6], в радиотехнике для создания регенеративных радиоприёмников [6]. В одном каскаде такого радиоприёмника достигались значительная избирательность и усиление до миллиона и более раз. Естественно, что эволюция природы использовала такое замечательное свойство при создании мозга.

Возможны два способа значительного повышения чувствительности систем с самоорганизованной критичностью, находящихся вблизи порога самовозбуждения. Первый способ это возможно большее приближение к порогу самовозбуждения.

Примером таких технических систем является регенеративный радиоприёмник с положительной обратной связью. Он позволяет увеличить коэффициент усиления входного сигнала до миллиона раз, одновременно повысить избирательность за счёт увеличения добротности используемого колебательного контура [6]. Принципиальным недостатком такой системы является значительное увеличение шума и возможность перехода в автоколебательный режим, при котором все полезные свойства утрачиваются и он становится источником помех.

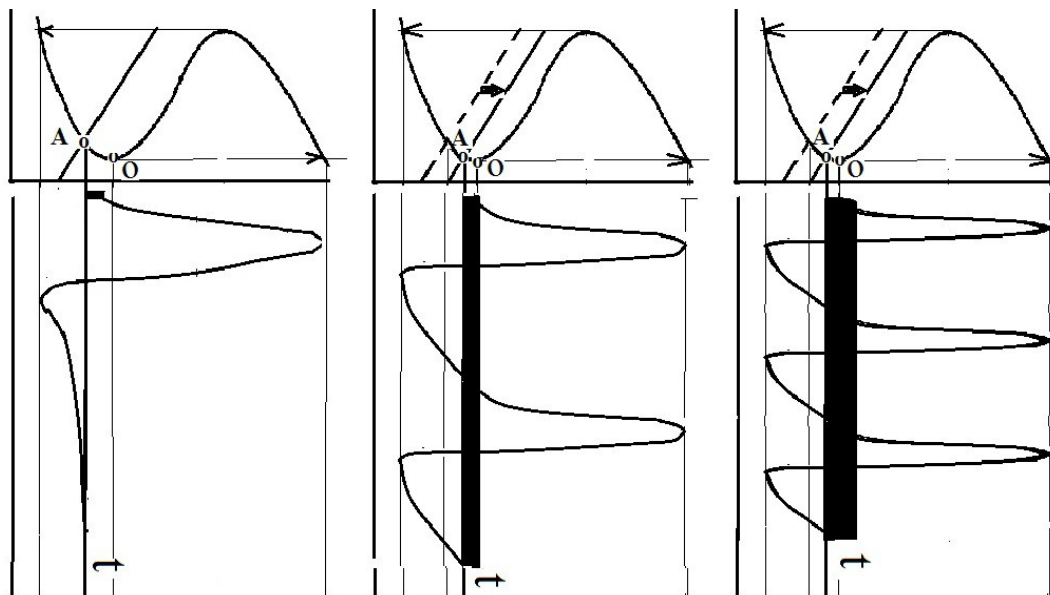
Второй возможный режим системы с самоорганизованной критичностью это использование дополнительного подпорогового сигнала, который бы на определённое время обеспечивал переход в автоколебательный режим, а затем этот режим гасился. За счет возникновения и погашения автоколебательного режима возможно достижение сверхбольшого усиления и, в то же время, обеспечение необходимой стабильности. В технических устройствах режим прерывистой подкачки назывался сверхгенеративным усилением [6].

Используемая математическая модель «специфической» структуры таламуса, показанная на рис. 5, реализует подпороговую синхронизацию потенциалов нейронов ядер таламуса, являющихся релаксационными автоколебательными системами, подпороговым сигналом. Это обеспечивает значительное избирательное усиление слабых сенсорных сигналов, отправляемых в кору, что и обеспечивает их лучшее сохранение в памяти.

Поясним механизм возможности достижения сверхвысокой чувствительности в системах с самоорганизованной критичностью на примере уравнения Ван дер Поля - Фитцхью, описывающего релаксационную автоколебательную систему [7]

$$\frac{d u}{d t}=u-\frac{u^3}{3}-v+I+U ; \frac{d v}{d t}=\varepsilon(a-u+b v),$$

где  $I$  - ток смещения,  $a, b, \varepsilon$  - параметры:  $a=0.7, b=0.8$ . Если  $I=0.142$ , то решением уравнения является одиночный импульс, который можно вызвать внешним возбуждением. При  $I=0.4$  уравнения описывают релаксационные колебания. Фазовый портрет уравнения Ван дер Поля - Фитцхью при  $I=0.142$  показан на рис. 6 сверху.



*Рис. 6. Генерация - нейронных импульсов при возбуждении околопороговым сигналом. На рис. слева генерация одиночного импульса при превышении порога  $OA$ . На рис. в центре и справа генерация спайков из двух и трех импульсов при подпороговом возбуждении, амплитуда которого равна высоте прямоугольного импульса, показанного черным цветом.*

Величина потенциала  $OA$  равна значению порога необходимого для возникновения импульса. Если изоклину передвинуть параллельно самой себе ближе к точке  $A$ , то пороговое значение уменьшится. Если изоклина будет проходить через точку  $A$ , то порог возбуждения равен нулю и точка  $A$  будет критической. При дальнейшем движении изоклины система перейдет в автоколебательный режим. Таким образом, вблизи точки минимума  $A$  возможно достижение высокой и сверхвысокой чувствительности. При этом, чем больше амплитуда подпорогового потенциала, тем больше частота генерации спайков. Эти закономерности иллюстрируются рис. 6.

#### ***4. Математическая модель околопороговой синхронизации таламуса на основе модифицированного аксиоматического метода Винера-Розенблюта и методов теории равномерных почти-периодических функций***

Процесс преобразования сенсорного потенциала, поступающего на таламус в последовательность импульсов, имеющих форму релаксационных колебаний, которая поступает в неокортекс, является по существу пороговой синхронизацией релаксационной потенциально автоколебательной системы входным потенциалом. В настоящее время для исследования синхронизации релаксационных автоколебательных систем известно два метода: метод обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами перед производными [8] и метод, использующий модифицированный аксиоматический

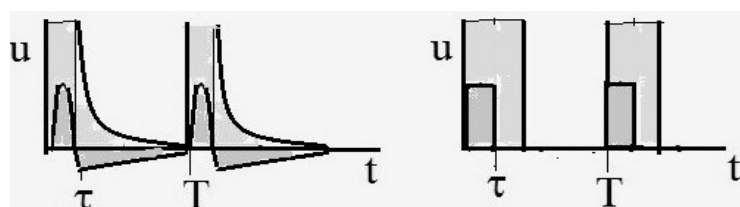
метод Винера-Розенблюта [9] в сочетании со свойствами равномерных почти-периодических функций [10-14].

Согласно первому методу для исследования синхронизации релаксационных автоколебаний используются системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = f(x, y\beta_1(t)), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y\beta_2(t)),$$

где  $x = (x_1, \dots, x_k), y = (y_1, \dots, y_l)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_k), g = (g_1, \dots, g_l)$ ,  $\beta_1(t), \beta_2(t)$  - синхронизирующие воздействия. Однако, точные аналитические решения приведенных уравнений неизвестны, не существуют также и приближенные методы решения уравнений [6].

Рассмотрим второй метод исследования синхронизации релаксационных автоколебаний. В работах [10-14] предложен метод получения точных аналитических решений задачи синхронизации, уравнения системы задаются в модифицированной аксиоматической форме. Простейшая форма релаксационной системы предложена Н. Винером и А. Розенблютом в 1946 году [9]. Геометрическая интерпретация формы релаксационных колебаний в предлагаемой модели и модели Винера-Розенблюта показаны на рис. 7 слева и справа.



*Рис. 7. Геометрическая интерпретация формы релаксационных колебаний в предлагаемой модели и модели Винера-Розенблюта показаны на рисунке слева и справа. Рефрактерная область показана светло серым цветом.*

Модифицированная аксиоматическая модель релаксационной системы задается, в сочетании со свойствами равномерных почти-периодических функций предложена в работах [10-14]. Она имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & | 0 \leq t \leq t_1 \\ f_2(t) & | t_1 < t \leq T \end{cases}; \quad f_\partial(t) = \begin{cases} f_3^\infty(t) & | 0 \leq t \leq t_1 \\ f_3^\infty(t) & | t_1 < t \leq T \end{cases}; \quad (1)$$

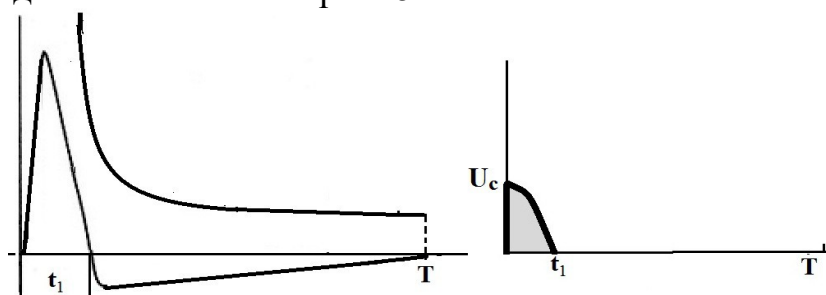
$$f(R) + U_c \geq f_\partial(R); \quad R = t - \text{mod}(t, T_c); \quad (2)$$

$$-\varepsilon < (mT_c - nT) < 0; \quad \varepsilon = f_\partial^{-1}(U_c), \quad (3)$$

где  $f(t)$  - функция, характеризующая форму релаксационного

автоколебания;  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  - функции в интервале «быстрого» и «медленного» изменения релаксационного автоколебания;  $f_\partial(t)$  - динамический порог возбуждения;  $f_3(t)$  функция, характеризующая динамический порог возбуждения для «медленной» фазы;  $R$  - функция остаток от деления  $t$  на  $T_c$ ,  $R = t - \text{mod}(t, T_c)$ ;  $\text{mod}(t, T_c)$  - функция частное от деления  $t$  на  $T_c$ ; (3) - неравенство Кронекера (Левитан. 1953),  $T_c, T$  - периоды синхронизирующего сигнала и релаксационного осциллятора;  $\varepsilon = f_\partial^{-1}(U_c)$ ;  $f_\partial^{-1}$  - функция обратная функции  $f_\partial$ ;  $U_c$  - амплитуда переднего фронта импульса возбуждения.

Качественная аппроксимация функций  $f(t)$  и  $f_\partial(t)$  - потенциала и динамического порога возбуждения, характерные для нейрона, а также форма импульса возбуждения показаны на рис. 8.



*Рис. 8. Форма потенциала, динамического порога и форма импульсов внешнего возбуждения в модифицированной аксиоматической модели нейрона.*

Генераторный потенциал таламуса возбуждается не от импульсных потоков, приходящих от дендритов, а от непрерывно меняющегося потенциала, приходящего от сенсорных систем. Этот потенциал обычно очень мал, порядка милливольт, в то время как генераторный потенциал имеет порядок десятков милливольт, то есть в 100 и 1000 раз больше. Существенно, что сенсорный потенциал может измениться по величине в значительных пределах в десятки и сотни раз. При этом частота следования импульсов генераторного нейрона таламуса должна увеличиться пропорционально интенсивности раздражения, что следует из экспериментальных данных.

Каким образом достигаются такие замечательные свойства генераторных нейронов? Обычные нейроны, имеющие порог порядка 10 мв на такие подвиги не способны. Изучение этих явлений показало, что они могут достигаться в системах с самоорганизованной критичностью благодаря режиму вблизи порога самовозбуждения системы или вблизи точки бифуркации. Четкая формулировка свойств систем с самоорганизованной критичностью появилась в замечательной монографии английского ученого П. Бака «Как работает природа» [4]. Существенно, что для устойчивости таких режимов в начальных условиях требуется еще и отрицательная нелинейная обратная связь [4-6]. Интересно отметить, что околопороговый режим усиления электрических колебаний широко

использовался в начале развития радиотехники для построения регенеративных и сверх регенеративных приемников. В одном каскаде такого приёмника достигалось усиление в миллион и более раз [6].

Все эти необычные и казалось, несовместимые свойства достигаются в биологических системах, взявших принцип самоорганизованной критичности на вооружение в ходе эволюции. При использовании нейрона в околопороговом режиме возможна синхронизация, реализующая генерацию импульсных потоков с очень низким порогом возбуждения. Уменьшение порога возбуждения за счет положительной обратной связи иллюстрируется рис. 9 слева.

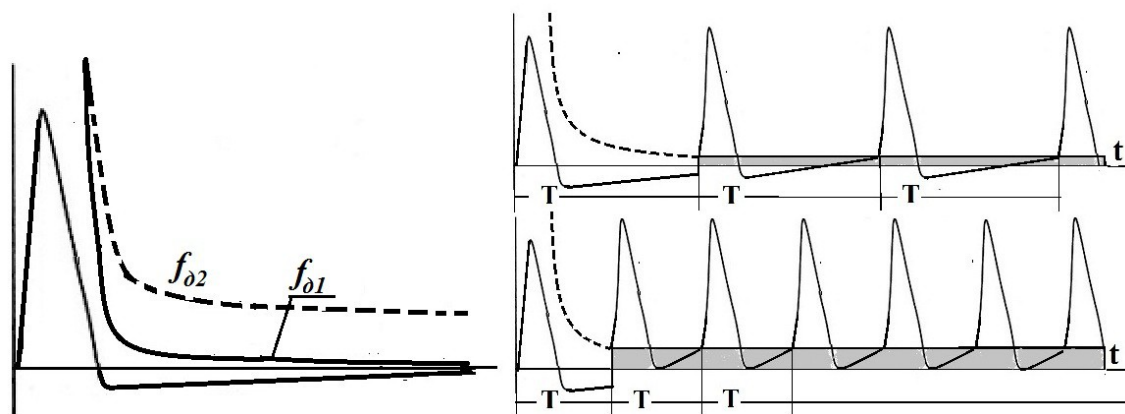


Рис. 9. Порог возбуждения  $f_{\partial 1}(t)$  при наличии положительной обратной связи показан слева сплошной линией. Порог возбуждения  $f_{\partial 2}(t)$  при отсутствии положительной обратной связи показан слева пунктирной линией. Справа показана генерация импульсной последовательности с различными амплитудами возбуждения; снизу – возбуждение с амплитудой примерно в 2 раза больше, чем сверху.

На рисунке 9 слева показаны значения порогов возбуждения в обычном случае  $f_{\partial 2}(t)$  и при увеличенной обратной связи  $f_{\partial 1}(t)$ . Уменьшение порога возбуждения позволяет реализовать эффективное увеличение частоты возбуждения при увеличении амплитуды входного импульса при линейно возрастающем динамическом пороге  $f_{\partial 1}(t)$ . Этот случай иллюстрируется на рис. 9 справа. Из рисунка видно, что при увеличении амплитуды возбуждения период генерируемой импульсной последовательности уменьшается, частота соответственно возрастает.

Предлагаемая математическая модель позволяет реализовать периодические последовательности нейроподобных импульсов, являющихся релаксационными колебаниями. Возможна генерация нейронных спайков, то есть серии импульсов любой заранее заданной структуры. Модель позволяет реализовать отклики с частотой следования импульсов пропорциональной интенсивности входного рецепторного потенциала. Примеры генерации спайков при различной амплитуде входного воздействия, его различной формы на примере прямоугольных и линейно возрастающих импульсов, полученные в



вычислительном эксперименте, показаны на рис. 10.

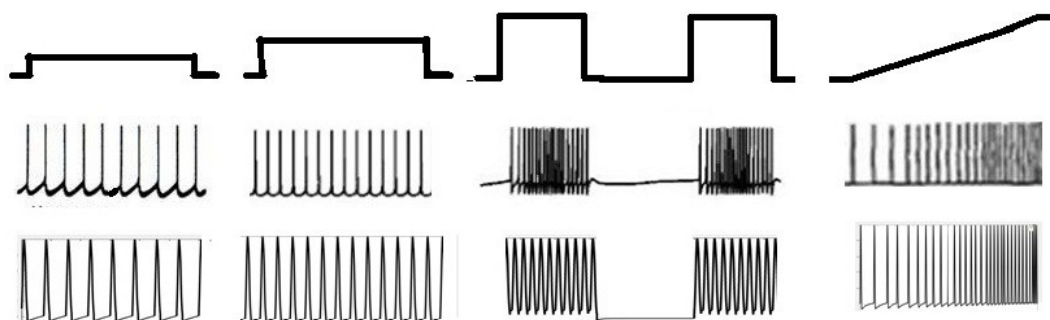


Рис. 10. Генерация спайков при различной амплитуде входного воздействия, его различной формы на примере прямоугольных импульсов. Внизу показаны для сравнения импульсные последовательности, полученные на выходе генераторных нейронов

Отметим особенности численной реализации аксиоматической модели. Используется алгебраическая аппроксимация «быстрой» и «медленной» фаз релаксационного колебания, динамического порога и внешний аппроксимирующий сигнал в виде коротких импульсов. С прикладной точки зрения такая аппроксимация синхронизирующего сигнала является достаточно адекватной, поскольку в реальных приложениях (например, при синхронизации нейронных ансамблей) синхронизация релаксационных автоколебаний производится также релаксационным колебанием в виде коротких нервных импульсов. При численной реализации выделение  $\varepsilon$ -почти-периодов равномерной почти-периодической функции, получаемой в результате синхронизации, осуществляется путем выделения частного от деления текущего времени процесса на период синхронизирующего колебания с помощью встроенной процедуры языка Матлаб7  $\text{mod}(t, T_c)$  и затем выделения остатка  $R = t - \text{mod}(t, T_c)$ .

Достоинством предлагаемой математической модели является возможность качественного анализа на основе точных аналитических решений режимов преобразования в потоки импульсов. В то же время имеется возможность построения конкретных режимов в вычислительном эксперименте малозатратным по времени.

### 5. Исследование релевантности математической модели таламуса

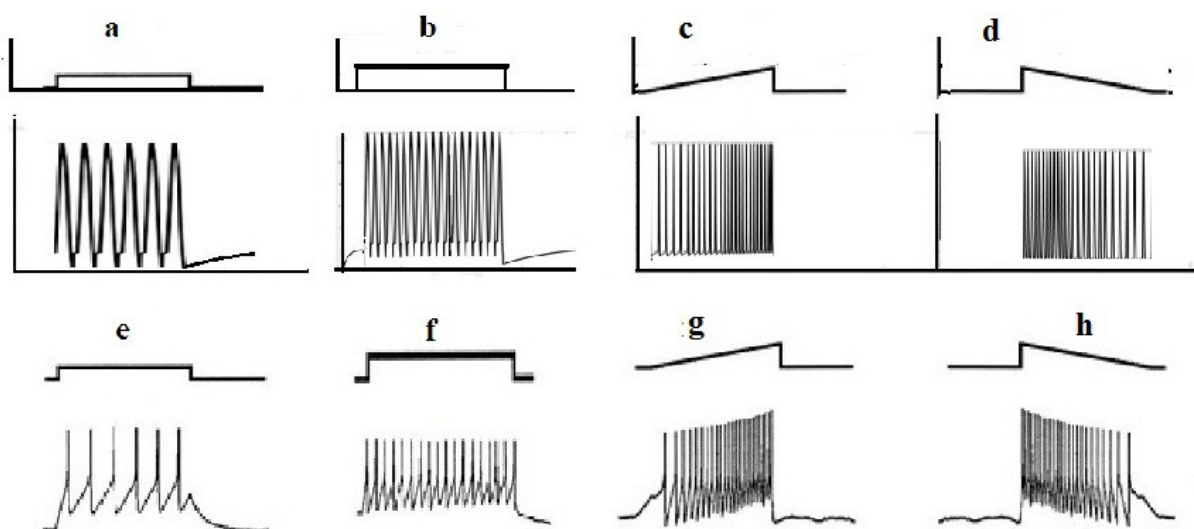
Структура предлагаемой математической модели таламуса соответствует имеющимся анатомическим данным его ядерной структуре, функциональные свойства также соответствуют имеющимся экспериментальным данным. Согласно имеющимся экспериментальным данным релейной избирательной и усилительной структурой таламуса являются специфические ядра таламуса, которые обрабатывают входные сенсорные сигналы и отправляют в

определенные области коры. Управляющее воздействие или обратная связь на специфические ядра идет от различных областей коры, гиппокампа, гипоталамуса, продолговатого мозга и других окружающих таламус систем. В математической модели это отражено наличием тормозных и возбуждающих входов. Наличие управления от всех обратных связей можно рассматривать как воздействие тормозных и возбуждающих сигналов на входе. Влияние этих сигналов можно рассматривать, как это следует из соотношения (1), как модуляцию порога возбуждения нейронов – ядер таламуса Я1-ЯN.

### ***6. Результаты экспериментального исследования математической модели таламуса***

Выполнены экспериментальные исследования предлагаемой математической модели в вычислительном эксперименте. Уникальность полученных результатов объясняется значительными трудностями исследования синхронизации релаксационных колебаний. Эти трудности в данной работе были преодолены благодаря использованию модифицированного аксиоматического метода Винера-Розеблота в сочетании с использованием средств равномерных почти-периодических функций. Этот метод позволил в рассматриваемой модели таламуса использовать сигналы управления любой формы. Ими могут быть сенсорные сигналы, сигналы из окружающих структур: из коры головного мозга, гипоталамуса, гиппокампа. Например, управляющим сигналом может быть сигнал тета-ритма из гиппокампа.

Реализация околопорогового усиления релаксационных колебаний была проверена в вычислительном эксперименте с помощью модифицированного аксиоматического метода с использованием свойств равномерных почти-периодических функций [10-14]. Эффективным режимом является сверхрегенеративный при использовании управляющих сигналов от других систем: коры, гипоталамуса, гиппокампа и других. Тета-ритм гиппокампа может являться одним из управляющих сигналов, реализующих процесс внимания и лучшее усвоение информации. При тестировании модели были использованы управляющие сигналы различной формы: 1) прямоугольные с различной амплитудой; 2) синусоидальные; 3) линейно-возрастающие и линейно-убывающие. Полученные результаты вычислительного эксперимента иллюстрируются рис.6 сверху. Интересно сравнить полученные результаты с экспериментальными результатами, полученными Ming-Li Zhao and Chun-Fang Wu при воздействии на нейрон of *Drosophila* сигналами различной формы: прямоугольными с различной амплитудой; линейно-возрастающими и линейно-убывающими [15]. Эти экспериментальные результаты приведены на рис. 11 снизу *e, f, g, h*. Авторы отмечают, что влияние аналогичного воздействия на нейроны мозга является практически идентичным.



*Рис. 11. Отклики математической модели таламуса на тестирующие сигналы различной формы в вычислительном эксперименте показаны на рисунках a,b,c,d. Отклики нейронной клетки в физиологическом эксперименте на воздействия различной формы показаны на рисунках e,f,g,h. В качестве управляющих сигналов использованы a - прямоугольные сигналы, b - синусоидальные сигналы, c - сигналы в виде линейно возрастающей функции, d - линейно убывающей функции. Соответствующие экспериментальные результаты, полученные в работе Ming-Li Zhao and Chun-Fang Wu, показаны снизу рис. e, f, g, h [15].*

Проверка релевантности откликов математической модели и оценка релейных избирательных усилительных свойств производилась путем исследования откликов на импульсные входные сенсорные сигналы. Для этого на вход специфического блока сенсорных ядер подавалось 10 малых входных импульсных сигналов, и проводилась активация малым подпороговым сигналом ядер – нейронов, конкретно четвертым и шестым входными сигналами. При этом предполагалось растормаживание соответствующих каналов «специфической» части таламуса.

Результаты эксперимента следующие: 1) наблюдалась релейное избирательное попадание сенсорных сигналов в требуемые каналы; 2) наблюдалось резкое взрывообразное усиление амплитуды сигнала, попадающего в планируемый канал, когда сумма малых входных сигналов и управляющего подпорогового сигнала превышала результирующий пороговый уровень. Результаты вычислительного эксперимента иллюстрируются рис. 12.

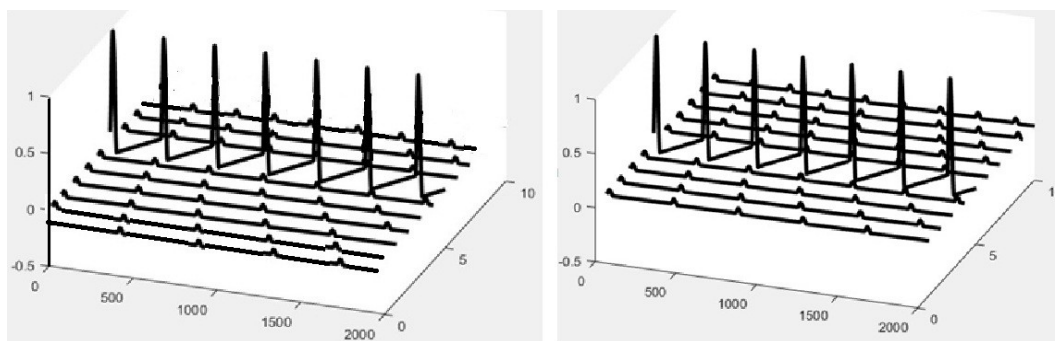


Рис. 12. Результаты вычислительного эксперимента по проверке релейных, избирательных и усилительных свойств математической модели таламуса. Слева – прохождение и взрывообразное усиление сенсорного сигнала в четвертом канале, справа – прохождение и взрывообразное усиление сенсорного сигнала в шестом канале

### 5. Формирование когнитивных понятий реализуемых с помощью таламуса

Формирование когнитивных понятий реализуемых с помощью таламуса исследовано в ряде работ, например D. LaVerge [16]. Существенным моментом для реализации этого формирования является наличие положительной обратной связи между таламусом и неокортексом, возможность реализации релаксационных автоколебаний при условии, что система находится в режиме самоорганизованной критичности. Сигнал от таламуса в виде импульсных последовательностей с частотой около 40 гц направляются в определенные отделы неокортекса. Ритм с частотой 40 гц называют гамма-ритмом. Электрофизиологические исследования связей таламуса с неокортексом свидетельствуют о наличии положительной обратной связи. Таким образом, имеются контуры положительной обратной связи таламус - неокортекс – таламус. Петля положительной обратной связи может включать базальные ганглии, что приводит к образованию петли таламус – неокортекс – базальные ганглии – таламус. Схематически эти обратные связи показаны на рис. 13.

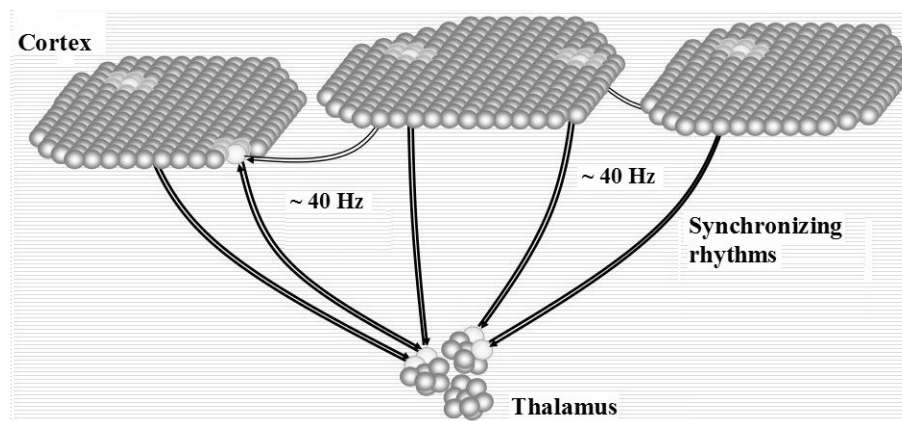


Рис. 13. Контур положительной обратной связи таламус - неокортекс – таламус.

Наличие положительной обратной связи таламус - неокортекс – таламус позволяет сформировать фокус внимания, связь ощущений и сформировать сознание в виде определенного объекта. Формирование такого сознания согласно D. LaBerge [16] иллюстрируется рис. 14.

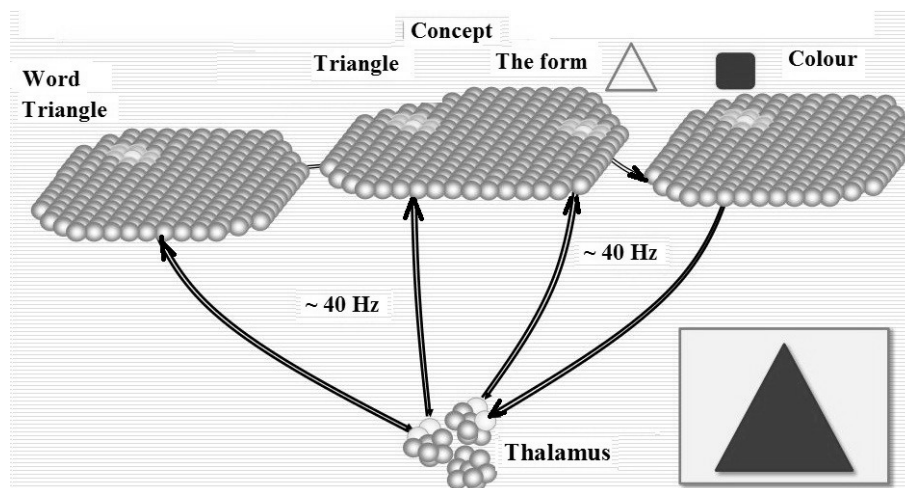


Рис. 14 Схематическая иллюстрация формирования сложного понятия согласно D. LaBerge [16].

Таким образом, таламус является не только релейной, избирательной и усилительной системой. Он также является структурой, которая принимает важное значение при формировании сложных понятий в области сознания.

### Обсуждение результатов

Приведены основные физиологические данные о структуре и когнитивных функциях таламуса. Предложена математическая модель таламуса в виде сетевой структуры, включающей нелинейные динамические структуры, представляющие собой системы с самоорганизованной критичностью. В целом структура таламуса может быть представлена избирательной нейронной сетью с избирательными нейронами-ядрами и обратной связью с неокортексом.

Экспериментальные исследования предлагаемой математической модели в вычислительном эксперименте являются уникальными и выполнены впервые в мире. Уникальность результатов объясняется значительными трудностями исследования синхронизации релаксационных автоколебаний. Эти трудности в данной работе были преодолены благодаря использованию модифицированного аксиоматического метода Винера-Розеблута в сочетании с использованием средств равномерных почти-периодических функций. Этот метод позволил в рассматриваемой модели таламуса использовать сигналы управления любой формы.

При тестировании модели были использованы управляющие сигналы различной формы: 1) прямоугольные с различной амплитудой; 2) синусоидальные; 3) линейно-возрастающие и линейно-убывающие. Полученные результаты качественно согласуются с экспериментальными результатами, полученными Ming-Li Zhao and Chun-Fang Wu при воздействии на нейрон of *Drosophila* сигналами различной формы: прямоугольными с различной амплитудой; линейно-возрастающими и линейно-убывающими [15].

Проверка релевантности откликов математической модели и оценка релейных избирательных усилительных свойств производилась путем исследования откликов на импульсные входные сенсорные сигналы различной формы. При этом предполагалось растормаживание соответствующих каналов «специфической» части таламуса. Результаты эксперимента следующие: 1) наблюдалась релейное избирательное попадание сенсорных сигналов в требуемые каналы; 2) наблюдалось резкое взрывообразное усиление амплитуды сигнала, попадающего в планируемый канал, когда сумма малых входных сигналов и управляющего подпорогового сигнала превышала результирующий пороговый уровень. Качественно аналогичные результаты имеют место в реальных физиологических условиях, что подтверждено.

Показана релевантность свойств математической модели таламуса его реальным физиологическим свойствам при формировании когнитивных понятийных свойств сознания, что согласуется с результатами работы D.LaBerge [16].

Общий вывод исследований математической модели в вычислительном эксперименте показал релевантность её свойств свойствам таламуса в физиологических условиях.

### *Заключение*

Предложена математическая модель когнитивных свойств «специфической» структуры ядер таламуса, позволяющая объяснить ряд его замечательных свойств. Математическая модель представлена в виде нелинейной динамической системы в виде однослойной избирательной нейронной сети с избирательными нейронами-ядрами. Дано обоснование представления таламуса как системы с самоорганизованной критичностью на примере исследования характера изоклин уравнении Ван дер Поля-Фитцхью. Проведено исследование релевантности математической модели таламуса с помощью модифицированного аксиоматического метода Винера-Розенблюта и неравенств Кронекера из теории равномерных почти-периодических функций. Показано, что результаты вычислительного эксперимента качественно совпадают с экспериментальными результатами, полученными при воздействии на нейрон of *Drosophila* сигналами различной формы: прямоугольными с различной амплитудой; линейно-возрастающими и линейно-убывающими.

Показана релевантность математической модели на наличие релейных, избирательных и усилительных свойств для сенсорных сигналов.

В рассматриваемой модели таламуса могут быть использованы сигналы управления любой формы. Ими могут быть сенсорные сигналы, сигналы из окружающих структур: из коры головного мозга, гипоталамуса, гиппокампа. Например, управляющим сигналом может быть сигнал тета-ритма из гиппокампа. Этот сигнал обеспечивает более эффективное запоминание входных сенсорных сигналов. Показана релевантность свойств математической модели таламуса его реальным физиологическим свойствам при формировании когнитивных понятийных свойств сознания, что согласуется результатами с работы D. LaBerge [15].

В дальнейшей работе предполагается более детальное моделирование когнитивных процессов в таламусе для более конкретных случаев взаимодействия таламуса с отдельными структурами неокортекса.

### *Литература*

1. Edward G. Jones. The Thalamus: Нью-Йорк: Springer, 2012. V. 2. 915 с.
2. Schmidt R. F., Thews G., "Human Physiology", Springer-Verlag, 1989, 825 p.
3. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс. М., "Вильямс", 2016. 1104 с
4. Бак П. Как работает природа: теория самоорганизованной критичности. Пер. с англ. URSS. 2013. 276 с.
5. Kelso J.A.S. Dynamic Patterns: The self-organization of brain and behavior. MIT Press. 1995.
6. Белкин М.К., Кравченко Г.И. и др. Сверхрегенераторы, М., Радио и связь. 1983, 248 с.
7. Fitzhugh R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical journal*. 1961. V. 1, № 6. P. 445–466.
8. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М., Наука. 1975. 247 с.
9. Wiener N., Rosenblueth A. The mathematical formulation of the problem of conduction of impulses in network of connected excitable elements, specifically in cardiac muscle. *Arch. Inst. Cardiologia de Mexico*. 1946. V. 205. № 16. 3-4.
10. Мазуров М. Е. Решение диофантовых неравенств в задачах о синхронизации релаксационных колебаний. ЖВМ и МФ АН СССР. 1991. Т.31. №11, С. 1619-1636.
11. Мазуров М.Е. Синхронизация релаксационных автоколебательных систем, синхронизация в нейронных сетях. Известия РАН Серия физическая. 2018, Т. 82, №1, 83-87.
12. Mazurov M.E. Non-linear dynamics, almost periodic summation, self-oscillating processes, information coding in selective pulsed neural networks. *Izv. RAS. Physical Series*, 2018, V. 82, No. 11, P. 1564-1570.

13. Мазуров М.Е. Нелинейная динамика и синхронизация нейронных ансамблей при формировании внимания. Известия РАН. Серия физическая. 2020. Т.84. №3. 451-456.

14. Мазуров М.Е. Механизмы инвариантного помехоустойчивого кодирования в импульсных нейронных сетях. Изв. РАН, Серия физич. 2020. Т.84 № 1, с. 90-95.

15. Ming-Li Zhao and Chun-Fang Wu Alterations in Frequency Coding and Activity Dependence of Excitability in Cultured Neurons of Drosophila Memory Mutants. *Journal of Neuroscience*, 15 March, 1997, 17 (6), 2187-2199.

16. Laberge D. Clarifying the triangular circuit theory of attention and its relations to awareness replies to seven commentaries. *PSYCHE: An Interdisciplinary Journal of Research On Consciousness* 6 (2000).

***Modeling the cognitive properties of the brain thalamus  
as a synchronized relaxation system with self-organized criticality***

Mazurov M.E.

*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, prof.,  
Russian Economic University named after G.V. Plekhanov  
Moscow, Russia, e-mail: mazurov37@mail.ru*

**Abstract.** *A mathematical model of the cognitive properties of the “specific” structure of the thalamic nuclei is proposed, which makes it possible to explain a number of its remarkable properties. The mathematical model is presented as a nonlinear dynamic system with self-organized criticality in the form of a selective neural network with selective neurons-nuclei. The substantiation is given for the representation of the thalamus as a system with self-organized criticality due to the fact that the thalamus is a controlled self-oscillatory relaxation system near the excitation threshold of relaxation oscillations in the presence of a stabilizing nonlinear negative feedback. Computational experiments of the mathematical model of the thalamus were carried out, which showed that the thalamus possesses the properties of cognitive processing of incoming sensory information, distribution, selective and amplifying properties. The responses of the mathematical model to subthreshold stimulation were studied, which showed the relevance of the mathematical model to the responses of a neuronal cell in real physiological conditions. The comparison of the properties of the mathematical model with the real properties of excitability of a neuron in real conditions of a physiological experiment is given. The relevance of the mathematical model for the presence of relay, selective and amplifying properties for sensor signals is shown. The relevance of the properties of the mathematical model of the thalamus to its real physiological properties in the formation of cognitive conceptual properties of consciousness is shown.*

**Keywords:** *thalamus, thalamic nuclei, network model, self-organized criticality, mathematical model.*

***References***

1. Edward G. Jones. The Thalamus: Нью-Йорк: Springer, 2012. V. 2. 915 с.
2. Schmidt R. F., Thews G., “Human Physiology”, Springer-Verlag, 1989, 825 p.
3. Khaikin S. Neironnie seti: polniy kurs [Neural networks: a complete course]. M., Williams, 2016, 1104 p.



4. Buck P. Rfr rabotaet priroda : teoriya samoorganizovanniy kritichnosti [How nature works: the theory of self-organized criticality]. Per. from English URSS. 2013, 276 p.
5. Kelso J.A.S. Dynamic Patterns: The self-organization of brain and behavior. MIT Press. 1995
6. Belkin M.K., Kravchenko G.I. and other. Sverchgeneratori [Super-regenerators], M., Radio and communication. 1983, 248 p.
7. Fitzhugh R. Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane. *Biophysical journal*. 1961. V. 1, № 6. P. 445–466.
8. Mishchenko E.F., Rozov N.Kh. Differentsialnie uravneniya s malim parametrom i relaksatsionnie kolebaniya [Differential equations with a small parameter and relaxation oscillations]. M., Science. 1975, 247 p.
9. Wiener N., Rosenblueth A. The mathematical formulation of the problem of conduction of impulses in network of connected excitable elements, specifically in cardiac muscle. *Arch. Inst. Cardiologia de Mexico*. 1946. V. 205. № 16. 3-4.
10. Mazurov ME Reshenie diofantovikh neravenstv v zadachah o sinkhronizatsii relaksatsionnikh kolebaniy [Solution of Diophantine inequalities in problems of synchronization of relaxation oscillations]. *Zh.VM and MF AS USSR*. 1991. T. 31. No. 11, pp. 1619-1636.
11. Mazurov M.E. Sinkhronizatsiya relaksatsionnikh avtokolebatelnykh sistem, sinkhronizatsiya v neironnikh setyah [Synchronization of self-oscillating relaxation systems, synchronization in neural networks]. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences Physical series*. 2018, Vol. 82, No. 1, pp. 83-87.
12. Mazurov M.E. Non-linear dynamics, almost periodic summation, self-oscillating processes, information coding in selective pulsed neural networks. *Izv. RAS. Physical Series*, 2018, V. 82, No. 11, P. 1564-1570.
13. Mazurov ME Nelineinaya dinamika i sinkhronizatsiya neironnikh ansamblei pri formirovanii vnimaniya [Nonlinear dynamics and synchronization of neural ensembles in the formation of attention]. *Izvestia RAN. Physical series*. 2020.T.84. Number 3, pp. 451-456.
14. Mazurov M.E. Mekhanizmi invariantnogo pomekhoustoichivogo kodirovaniya v impulsnikh neironnikh setyah [Mechanisms of invariant error-correcting coding in impulse neural networks] *Izv. RAS Phys*. 2020. T. 84 No. 1, pp. 90-95.
15. Ming-Li Zhao and Chun-Fang Wu Alterations in Frequency Coding and Activity Dependence of Excitability in Cultured Neurons of Drosophila Memory Mutants. *Journal of Neuroscience*, 15 March, 1997, 17 (6), 2187-2199.
16. Laberge D. Clarifying the triangular circuit theory of attention and its relations to awareness replies to seven commentaries. *PSYCHE: An Interdisciplinary Journal of Research On Consciousness* 6 (2000).

**Теория разделения труда  
как основа управления развитием биосистем.  
Элементы математического моделирования**

Савостьянов Г.А.

Дбн, ФГБУ Институт эволюционной физиологии и биохимии  
им. И.М. Сеченова РАН, Санкт-Петербург, Россия  
genasav38@mail.ru

**Аннотация.** В основе развития сообществ различной природы лежит процедура разделения труда. Интердисциплинарная по сути, она до сих пор описывается лишь качественно. В данной работе дается формализованное описание этой процедуры на примере становления многоклеточности. Предложены основные понятия, символика и аксиоматика. Введены представления об элементарных актах развития, которые состоят из приобретения и реализации потенций к специализации и интеграции клеток. В итоге получено множество моделей элементарных единиц многоклеточности – гистионов, представляемых в форме ориентированных графов. Для их количественной характеристики предложены осмысленные и экспериментально определяемые параметры. На их основе впервые получен параметр для количественного измерения развития гистионов. Показано, что такое развитие подчиняется периодическому закону. Построена естественная система гистионов в виде трехмерной периодической таблицы, в основе которой лежат треугольники Паскаля и Серпинского, и которая содержит изотопные гистионы. Таблица позволяет прогнозировать их структуру в развитии и измерять его. Для периодов таблицы сформулирован закон сохранения потенций, описывающий их динамику в развитии и объясняющий происхождение стволовых клеток. Показано, что развитие гистионов удобно рассматривать как пробегание ими по строкам, столбцам и изотопной координате таблицы. Предлагаются критерии оптимальной стратегии развития. Показана возможность рационального подхода к управлению развитием. Дается пример измерения развития реальных организмов. В целом предложенную теорию можно считать формализованным номогенезом.

**Ключевые слова:** разделение труда, специализация и интеграция, развитие, сообщества, многоклеточность, гистионы, потенции, периодический закон, систематика, моделирование, управление

**Введение**

Современная биология развития остается в основном описательной наукой. В эмбриологии она оказалась сосредоточенной главным образом на молекулярных механизмах жизнедеятельности клеток и генетического контроля их пролиферации и дифференцировки в морфогенезе. В историческом развитии она приняла вид синтетической теории эволюции, которая в последнее время дополнилась биоинформатикой, т.е. исследованием эволюции также на молекулярном уровне. Для описания процессов, протекающих на этом уровне, применяют наряду с экспериментальными и математические подходы

(Хаубольд, Вие, 2011, [1]). В итоге существующие представления о развитии способны объяснять наблюдаемое разнообразие Жизни и генеалогию основных ее таксонов. Но прогнозировать и измерять развитие эти представления не позволяют. Более того, многие давно поставленные важные вопросы развития не привлекают внимания и остаются слабоизученными. Так, нет представлений о законах развития и подходах к построению параметрических систем организмов (Берг, 1977, [2]; Любищев, 1982, [3]). Непонятно, почему развитие конечно, носит направленный характер и для него типичны параллелизмы. Неясно также, почему, наряду с постепенностью, в развитии наблюдаются и скачки. И главное – нет способов измерения развития и его прогнозирования.

К сожалению, установившаяся в биологии однобокая ориентация на молекулярный уровень отодвинула эти вопросы в тень. Вместе с тем уже давно высказывается мнение, что ответ на них следует искать не в молекулярной биологии, а в другой, пока не вполне разработанной области, а именно: в номогенезе – науке о развитии на основе закономерностей (Берг, 1977, [2]). Именно его недостаточная развитость затрудняет понимание законов развития и не позволяет прогнозировать и измерять его. В конечном счете, это тормозит разработку вопросов регенеративной медицины, тканевой инженерии, а также изучение злокачественного роста.

Цель данной работы – уяснить характер упускаемой области и наметить пути её развития.

## 2. Суть подхода к достижению цели

Для достижения поставленной цели используем системный подход. Как известно, система – это целостный объект, состоящий из элементов (частей) и их взаимодействий. Природа элементов и взаимодействия могут быть разными. Поэтому многочисленные системные объекты Мира изучаются с двух точек зрения: 1) материальная природа и свойства элементов системы, и 2) характер их взаимодействия, описываемый, как правило, формализованно. Эти точки зрения предполагают использование отдельных независимых подходов к изучению материального и идеального аспектов системы. И эти подходы дают разные, несводимые друг к другу результаты. Дополняя друг друга, они характеризуют систему наиболее полно. Поясним это на нескольких примерах.

**2.1. Небесная механика.** Она описывает поведение систем, элементы которых связаны гравитацией. Пример – Солнечная система. В рамках первого подхода в ней можно изучать состав и физико-химические свойства Солнца и планет. В рамках второго – опираясь на законы механики и всемирного тяготения, строить математические модели движения планет относительно Солнца и друг друга. В этом случае состав Солнца и планет неважен, достаточно знать лишь вышеназванные законы и три параметра системы. Это масса  $m$ , расстояние  $s$  и время  $t$ . Благодаря интердисциплинарности получаемых

формальных моделей их можно использовать для анализа систем любой природы, если они связаны гравитацией.

**2.2. Кибернетика** — наука об общих закономерностях процессов управления и передачи информации в машинах, живых организмах и обществе (Винер, 1968, [4]). Здесь система – это 1) управляющий и управляемый элементы, могущие иметь различную материальную природу, а также 2) прямые и обратные связи между элементами, образующие регулирующий контур. Простейший пример – термостат. Можно изучать физические свойства его элементов, но это ничего не скажет о свойствах контура. С другой стороны, изучение законов управления и принятия решений, построение математических моделей и их анализ может проводиться без учета материальной природы управляющего и управляемого элементов, представляемых как черные ящики. Получаемые при этом формальные модели и выводы имеют междисциплинарную ценность и могут использоваться для регулирования и управления в системах любой природы.

**2.3. Теория игр.** Под игрой понимается процесс в системе, состоящей из двух и более сторон (игроков), ведущих борьбу за реализацию своих интересов. Наглядный пример – шахматная игра. В такой системе также можно различать два независимых аспекта: 1) материальная природа и свойства игроков (человек или машина) и их аксессуары (шахматных фигур, доски и т.д.). Их можно изучать, не вникая в суть теории игры. 2) С другой стороны, теория шахматной игры, которая не интересуется материальной природой игроков и фигур. Она сосредоточена исключительно на формальном (математическом) анализе их стратегий (Мазалов, 2010, [5]). Оба аспекта не связаны и требуют отдельного рассмотрения. Теоретический аспект помогает анализировать различные виды игр, строить формальные модели и сосредоточиться на анализе игры с учётом возможных поступков других участников. В итоге модель позволяет выбрать стратегии, ведущие к выигрышам при минимуме проигрышей. Такие стратегии также междисциплинальны и могут использоваться при рассмотрении игровых задач в системах с игроками различной природы.

Приведем кратко еще один наглядный пример. Детали компьютера, разрозненно лежащие на столе – не более, чем детали. Но соединенные должным образом, они превращаются в систему. Материальная природа компьютера (hardware) всегда конкретна, тогда как математическое обеспечение (software) инвариантно. Оба аспекта также требуют отдельных подходов.

Вывод. Примеры системного подхода можно продолжать. Но и из приведенных примеров ясно, что изучение только материальной природы элементов системы совершенно недостаточно для понимания ее свойств. Необходим также дополнительный и, как правило, формализованный анализ взаимодействий элементов системы, выявление законов такого взаимодействия и построение его математических моделей. Эти модели никак не связаны с материальной природой элементов и должны быть инвариантными, т.е.

применимыми к различным системам. Это означает, что, скажем, правила шахматной игры будут справедливы во всех тех случаях, когда фигуры будут состоять из дерева, слоновой кости, золота или нарисованы на бумажке, а игроками будут люди или машины с ИИ. С другой стороны, изучение многообразия материальной природы фигур не приведет к пониманию теории игры, которая требует отдельного рассмотрения. Таким образом, еще раз подчеркнем, что взаимодополняющий раздельный анализ двух описанных аспектов (элементы и их взаимодействия, материальное и идеальное) является характерной чертой системного подхода.

**2.4. *Evo-devo*.** Уяснив это обстоятельство, обратимся теперь к еще одной обширной группе систем, важных для биологии. Их элементы связаны особым видом взаимодействий, а именно: процессами специализации и интеграции, или – разделением труда. Элементы таких систем могут иметь разную природу. Соответственно, системы могут быть машинами, биологическими сообществами, социальными или экономическими образованиями. Эти системы также можно рассматривать двояко. То есть отдельно описывать: 1) материальную природу элементов и характер их труда, и 2) проводить формализованное рассмотрение процедуры его разделения, устанавливать его законы и строить математические модели возникающих социальных групп и сетей, которые также должны быть интердисциплинарными.

Попытка поставить задачу подобным образом уже неоднократно предпринимались (Рашевский, 1969, [6]; Bailey, 1994, [7]; Kelly, 1994, [8]). Однако пока это не получило развития в полной мере. Как было сказано, основное внимание до сих пор уделяется изучению материальной природы элементов таких систем и здесь уже накоплены обширные знания. В противоположность этому процедура разделения труда как таковая до сих пор рассматривается интуитивно и качественно. Задача по ее формализованному анализу, выявлению законов и построению математических моделей все еще слабо осознана, явно не поставлена и не привлекает внимание исследователей.

Проиллюстрируем эту ситуацию на примере изучения биологии развития многоклеточных организмов. Давно отмечено, что в основе их возникновения лежит процедура разделения труда (функций) между клетками. Поэтому и в данном случае материальную природу клеток с одной стороны, и формальные правила разделения и структуру социальных клеточных групп и сетей с другой стороны, также следовало бы изучать как отдельные задачи.

Однако сейчас в биологии доминирует подход, направленный на анализ именно материальной природы клеток и изучение молекулярных механизмов функционирования их геномов, транскриптомов и протеомов в размножении и дифференцировке. И в этой области достигнуты значительные результаты, что важно, нужно и нуждается в продолжении. Но! При этом ожидается, что именно такое изучение приведет также к открытию законов развития и ответам на отмеченные вначале его главные вопросы. С аналогичным ожиданием

исследуются и молекулярные аспекты эволюции. И вот это – напрасно. Проведенный системный анализ позволяет заключить, что такое ожидание неоправданно. Ведь это то же самое, что и ожидание получить софтвер изучая хардвер или надежда постигнуть теорию шахматной игры путем изучения химического состава шахматных фигур!

К сожалению, тщетность такого ожидания до сих пор не осознана. Соответственно, необходимость отдельного формального анализа взаимодействий клеток в реализации процессов разделения труда также не уяснена, и поэтому такой анализ не проводится. Процедура разделения лишь бегло упоминается, и если описывается, то главным образом в качественной форме. Попытки формализованного рассмотрения отдельных ее аспектов (Chandebois, 1980, [9]; (Burtsev, Turchin, 2006, [10]; (Nowak, 2006, [11]) не дали пока прорывных результатов. Общей теории этих процессов, не связанной с материальной клеточной природой, до сих пор не построено. Другими словами, предметом специального формализованного рассмотрения процессы разделения труда до сих пор не стали. Поэтому междисциплинарные законы этих процессов и их формальные модели, которые можно было бы использовать для изучения развития сообществ различной природы – также не открыты и не созданы.

В связи с этим важнейшие вопросы биомедицины, связанные с клеточной социологией и организмом как клеточным государством – остаются в тени. Элементарной единицей многоклеточности до сих пор считается клетка, никаких представлений о социальных клеточных группах, сетях и гиперсетях – нет. В итоге вычислять, прогнозировать и измерять развитие пока невозможно. Другими словами, номогенеза как математической науки о законах развития на основе разделения труда пока не существует. Это и есть тот упускаемый аспект биологии развития, о котором говорилось вначале.

Отсутствие номогенеза как математической теории – фундаментальный пробел, который тормозит развитие регенеративной медицины и изучение канцерогенеза (его причины тоже ищутся на уровне молекулярной машинерии клеток, а не социальных клеточных групп и сетей). Аналогичным образом подобный пробел зияет и в гуманитарной сфере (в социологии, теоретической истории и экономике) и тормозит развитие социальной инженерии. Следствием такого положения является то, что здесь управленческие решения до сих пор ищутся интуитивно и наугад, с риском ошибок и невозможности прогнозировать последствия. Важно отметить, что в условиях незнания законов развития сообществ использование ИИ вряд ли сможет радикально улучшить ситуацию. Для преодоления такого положения необходимо построить общую формализованную теорию разделения труда в машинах, живой природе и обществе, которая описывала бы законы развития и строила математические модели социальных групп, сетей и гиперсетей без учета их материальной природы. Это будет формализованный номогенез. На его основе необходимо

создать унифицированную методологическую платформу, которую можно было бы использовать в прикладных исследованиях специализации и интеграции элементов в системах любой материальной природы. Мы уже предпринимали ряд шагов для постановки и решения этой задачи (Савостьянов, 2014, [12], 2020, [13]). В настоящей работе приводится краткое изложение полученных результатов (применительно к многоклеточности) и намечаются пути дальнейших исследований.

### 3. Общие черты формализованного номогенеза – теории разделения труда

Подобно всякой формализованной теории, ожидаемая теория должна включать в себя следующие разделы: 1) основные понятия и определения; 2) символика; 3) аксиоматика; 4) вывод следствий; 5) их интерпретация и верификация. Рассмотрим эти разделы.

#### 3.1. Основные понятия

Первым является понятие *числа и перечня  $L$  трудов* или функций, подлежащих разделению. Применительно к каждой конкретной системе его необходимо определять опытным путем. Например, в обществе это физический, умственный, духовный труд. Каждый из этих трудов можно и далее дробить с различной степенью детальности или, наоборот, укрупнять. В случае многоклеточности перечень трудов (функций) – это: защита от среды, питание, дыхание, выделение, раздражимость, подвижность, размножение и т.д. Для нужд формального рассмотрения перечень  $L$  таких функций можно обозначать буквами  $a, b, c, d, e$  и считать, что они и подлежат разделению.

Вторым является понятие об *актерах* или *исполнителях функций*, которые будут обозначаться кружками. В нашем случае это клетки. Исполнитель, выполняющий полный набор функций для удовлетворения всех своих потребностей, является *организмом*, неполный – *специализированным членом* организма. Условием существования организма является удовлетворение потребностей, а целью – оставление потомства для продолжения рода.

Введем теперь понятие *исходного организма* – одиночной клетки – универсала, исполняющего все функции перечня  $L$  самостоятельно и только для себя. Такие функции выполняются с помощью архаичных примитивных технологий и потенциалов к разделению не имеют. Эти функции будут обозначаться строчными буквами при кружках (рис. 1, вверху). В нашем случае примером может служить амеба.

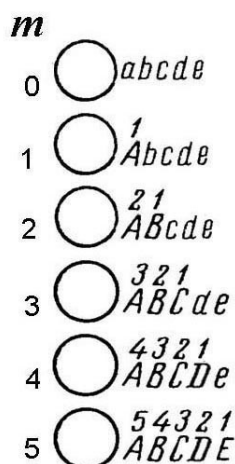


Рис. 1. Схематическое представление приобретения потенций

Наверху показан исходный автономный организм, не имеющий потенций ( $m=0$ ). Все функции, обозначенные строчными буквами при кружке, он выполняет в режиме автономного выживания (РАВ). Ниже показано возрастание числа  $m$  функций, приобретших потенции (цифры над прописными буквами при кружках). У нижнего родоначальника с  $m = 5$  все функции получили различное число потенций.

Если условия среды вынудят исходный организм вступить на путь становления многоклеточности с помощью специализации и интеграции, то необходимые для этого партнеры (клетки) могут иметь *монофилетическое* или *полифилетическое* происхождение. В первом все клетки являются родственниками. Во втором они имеют независимое происхождение. Первый вариант характерен для многоклеточных организмов или социальных насекомых, второй – для симбиозов. Мы в дальнейшем будем рассматривать монофилетический вариант, хотя в обоих случаях развитие происходит путем осуществления одних и тех же актов развития.

Следующими будут понятия об *элементарных актах* разделения функций и о *режимах их выполнения*. Так, все функции исходного организма выполняются в режиме автономного выживания (РАВ). Повторим, что функции в этом режиме к разделению неспособны. Чтобы оно стало возможным, организм должен приобрести необходимые способности – потенции.

**3.1.1. Приобретение потенций.** Потенции - это скрытая возможность и способность функции к специализации путем нововведений и совершенствования технологий отправления функций. Потенции приобретаются в развитии с помощью эволюционных открытий и изобретений. Эти потенции переводят функции из РАВ в режим, допускающий специализацию (РДС). Функции в таком режиме обозначим прописными буквами при кружках и овалах (рис. 1). Приобретение потенций идейно можно



сопоставить с принятием решений. В историческом развитии многоклеточности такое приобретение можно сопоставить с ароморфозами (анагенезами). В итоге исходный организм превращается в *родоначальника* для последующего развития.

*Элементарным актом* такого развития будет придание функции одной потенции к осуществлению одного акта специализации для удовлетворения потребностей одного партнера. Каждая вновь приобретенная потенция будет обозначаться единицей над соответствующей прописной буквой при кружках. Важным параметром родоначальника является число функций, получивших потенции, т.е. переведенных из РАВ в РДС. Обозначим этот параметр через  $m$ . Он может принимать значения от 0 до  $L$ .

**3.1.2. Правила сложения приобретенных потенций.** При каждом последующем ароморфозе открытие, сделанное очередной функцией, оказывает влияние и на все предыдущие функции, уже приобретшие потенции. Другими словами, все функции, ранее переведенные в РДС, при очередном ароморфозе также развиваются. Это обозначается тем, что и им всякий раз добавляется по единице (рис. 1, родоначальники с  $m$ , равном от одного до пяти). В итоге **число потенций** у различных функций оказывается неодинаковым и в совокупности представляет собой арифметическую прогрессию с разностью в единицу. И поскольку эти числа связаны с порядком возникновения потенций, то они (числа) определяют филогенетический возраст функций: та из них, у которой число потенций равно  $m$ , оказывается филогенетически самой древней, а с меньшими числами – все более молодыми. Например, у родоначальника с  $m$ , равным пяти, функция А первой вступила на путь развития, осуществила 5 его актов (приобрела 5 потенций) и является самой древней, а функция Е осуществила лишь один акт, последней приобрела одну потенцию и потому является самой молодой. Таким образом, филогенетический возраст функций можно измерять числом их потенций. Важно отметить, что у самой древней функции это число всегда равно  $m$ .

#### **Общее число приобретенных потенций**

Родоначальника можно характеризовать не только числом потенций у каждой функции в отдельности, но и **общим числом потенций** по всем функциям. Это число  $S$  зависит только от  $m$ , и поскольку формально оно является суммой членов арифметической прогрессии с разностью в единицу, то эта зависимость носит следующий характер:

$$S = 1/2 (1+m)t \quad (1)$$

Число таких потенций является важным показателем и составляет **генеральный потенциал** родоначальника. Этот потенциал является новым количественным показателем. Легко видеть, что при постепенном росте числа

потенций у отдельных функций их общее число увеличивается возрастающими скачками.

Последовательность приобретения функциями потенциалов может быть разной и должна определяться опытным путем.

Будем считать, что эта последовательность совпадает с порядком перечисления функций при определении набора  $L$ .

Каждый новый родоначальник, возникающий при увеличении  $m$ , отличается от предыдущих наличием последней (самой молодой) функции в РДС, которая оказывает влияние на все более древние функции. Поэтому такую функцию можно называть *показательной (индикаторной)*.

Именно по таким функциям в биологии характеризуются таксоны, скажем, хордовые, позвоночные, млекопитающие и так далее. Подобным же образом в истории различают каменный, бронзовый, железный века, а также век пара, электричества, и так далее.

Конкретные механизмы записи и хранения количества потенциалов у различных функций зависят от природы системы, в клетках это могут быть специальные участки «молчащей» ДНК.

**3.1.3. Реализация приобретенных потенциалов** характеризуется числом  $n$  функций, реализовавших потенциалы.

Рассмотрим этот процесс на примере монофилетического развития родоначальника многоклеточного организма с  $m = 5$ .

Вначале все потенциалы в нереализованном виде сосредоточены у исходного универсального родоначальника и ни одна из них не реализована.

В филогенезе многоклеточного организма это неспециализированный предок, в онтогенезе – зигота. Ее потенциалы связаны с функциями в РДС и показаны цифрами над прописными буквами вне кружка (рис.2 вверху слева). Поскольку эти потенциалы предназначены для порождения дочерних клеток, назовем их (потенциалы) *генеративными*.

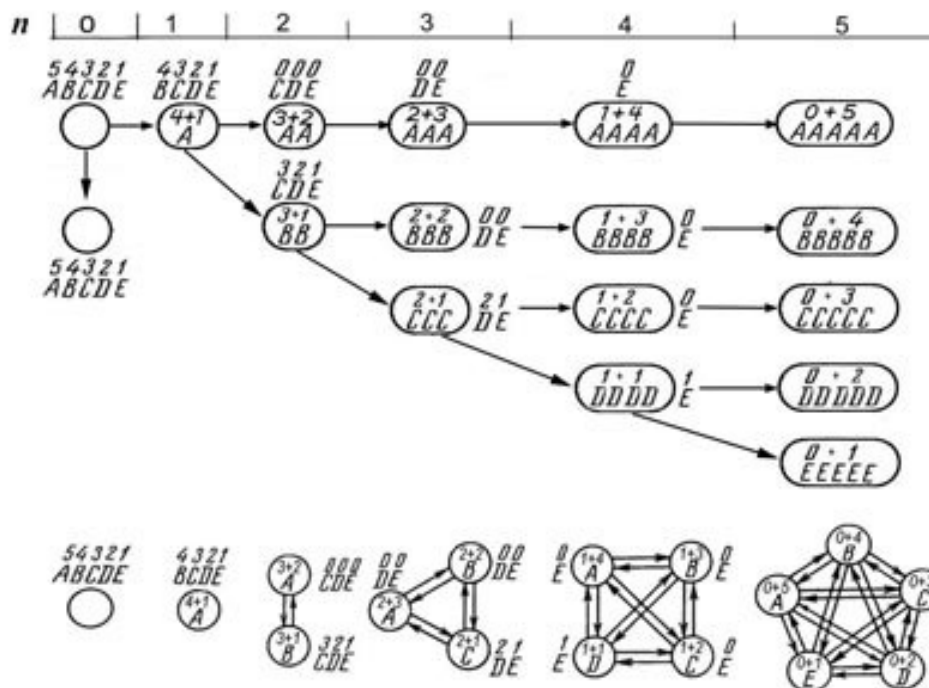


Рис. 2. Схематическое представление реализации потенциалов

Цифры над горизонтальной линией в верхней части рисунка показывают величину  $n$  – число типов специализированных клеток. Под этими цифрами в левой части рисунка показан родоначальник - универсал с  $m = 5$ ,  $S = 15$  и  $n = 0$ . Ниже и правее показано потомство и его генеалогия. Направо и вниз показаны дочерние родоначальники А, В, С и D с убывающим числом генеративных потенциалов. От каждого родоначальника направо идут этапы специализации клеток. Правые и левые цифры над буквами в кружках означают реализованные и нереализованные структурные потенциалы. Стрелками показана генеалогия возникающих специалистов и структура генеалогического дерева

В нижней части рисунка даны этапы становления гистионов с  $m$ , равным пяти и  $n$ , равном от 1 до 5. Отсутствие генеративных потенциалов у некоторых функций в РДС обозначено нулями. Для упрощения символики здесь и далее специализированные функции в кружках обозначаются единичными прописными буквами.

Родоначальники обладают двумя важными свойствами. Первое: они способны к неограниченному симметричному делению с порождением себе подобных без расхода потенциалов. Это приводит к простому росту числа таких клеток. Второе: родоначальники способны и к несимметричному делению с порождением отличающегося потомства путем реализации потенциалов.

Механизмы перехода от одного варианта деления к другому зависят от природы системы.

**3.1.3.1. Реализация генеративных потенциалов.** Она происходит путем порождения дочерних клеток с помощью асимметричных делений родоначальников. Монофилетическое генеалогическое дерево такого порождения показано на рис. 2 в верхней части рисунка. Здесь все возникающие клетки с генеративными потенциалами и без являются потомками единого родоначальника - универсала с  $m$ , равном пяти,  $n=0$  и имеющего 15 нереализованных генеративных потенциалов (рис. 2, вверху слева). В результате первого асимметричного деления он порождает себе подобного родоначальника с  $n=0$  (внизу) и потомка с  $n=1$ . Этот потомок также является родоначальником – стволовой клеткой, но уже только с 10-ю нереализованными генеративными потенциалами. Эта клетка при рождении избрала себе специализацию по функции А. В свою очередь от этой клетки, по мере возрастания  $n$ , начинается серия последовательного возникновения более молодых родоначальных клеток В, С, и Д с шестью, тремя и одной нереализованной генеративных потенциалом соответственно. Эти потенциалы составляют **генеративный потенциал** возникших родоначальников. Каждый из них порождает свое направление специализации – дифферон, заключающийся в интервале от своего родоначальника до терминально специализированной клетки. Например, первая строка на рис. 2 показывает дифферон из пяти актов специализации по функции А. При этом дочерние клетки дифферонов, расположенные правее родоначальных, своих генеративных потенциалов уже не имеют (что обозначается нулями над прописными буквами при кружках и овалах). Такие клетки получают потенциалы только к специализации по одной из функций. В итоге возникает генеалогическое дерево, приведенное на рис. 2. В нем величина  $n$  показывает число клеток, возникающих на каждом этапе развития. **Элементарный акт** такого развития – порождение одной клетки.

Таким образом, набор нереализованных генеративных потенциалов у родоначальников сокращается за счет превращения таких потенциалов в структурные и распределения между возникающими дочерними клетками. В этом и состоит реализация генеративных потенциалов. Они заканчиваются при  $n=m$ . Исчерпание потенциалов кладет предел порождению новых дочерних клеток. Отметим, что генеративные потенциалы могут распределяться между клетками и по-другому, что было показано ранее (Савостьянов, 2020, [13]).

### **3.1.3.2. Реализация структурных потенциалов**

По мере увеличения числа потомков (дочерних клеток) все они получают потенциалы к специализации. При этом одна из этих потенциалов реализована при рождении клетки. Это означает, что выбор направления специализации сделан. Подчеркнем, что такие потенциалы перестают быть генеративными и приобретают новое качество: способность контролировать процесс

специализации функций и возникновение более совершенных клеточных структур. Назовем такие потенции *структурными* и обозначим цифрами над буквами в кружках и овалах (рис. 2). Правая цифра показывает число реализованных, а левая – нереализованных структурных потенций. Начало специализации функции означает ее перевод из РДС в режим осуществленной специализации (РОС). Превращение генеративных потенций в структурные в многоклеточном организме означает предопределение клеточной судьбы, что можно сопоставить с коммитированием или детерминацией клеток.

Возникшие дочерние детерминированные клетки приступают к реализации структурных потенций путем осуществления специализации. Количество таких потенций у каждой функции разное, оно и определяет число возможных актов ее специализации. Последняя протекает следующим образом. Появление каждой новой клетки означает один акт ее специализации и увеличивает значение  $n$  на единицу. Это обозначается единицей над прописной буквой в правой части внутри кружков. При этом у всех ранее возникших детерминированных клеток функции в РОС также увеличивают свою специализацию на единицу (чтобы обеспечить потребности нового партнера). И поскольку функции вступают на путь специализации неодновременно, число реализованных структурных потенций у них оказывается разным. Максимальным и равным  $n$  это число оказывается у самой древней функции, у остальных – убывает в арифметической прогрессии. В отличие от этого, число нереализованных структурных потенций специализируемых функций для каждого значения  $n$  всегда одинаково и равно  $m-n$ .

*Элементарный акт специализации* – реализация одной структурной потенции и придание функции способности обеспечить потребности одного партнера. В результате серии таких специализаций число нереализованных структурных потенций клетки убывает, а реализованных возрастает. При этом клетки утрачивают функции в РДС и увеличивают свою *энергидность* (Захваткин, 1949, [14]) в расширенном смысле этого понятия (на рис. 2 это показано увеличением числа букв в кружках). Это приводит к тому, что клетки дифференцируются, совершенствуя технологии отправления функций в РОС. Такие клетки становятся все более узкими, но производительными специалистами (генетическое регулирование и конкретные детали этого совершенствования составляют отдельный аспект развития и здесь не затрагиваются). В итоге увеличивается способность клеток обеспечивать возрастающее число партнеров вплоть до предела, положенного величиной  $m$ . Это происходит на последнем этапе, когда  $n=m=5$ , что соответствует исчерпанию всех потенций и достижению *терминальной специализации* клеток.

Итак, по мере роста числа  $n$  специализированных функций происходит уменьшение числа нереализованных и увеличение числа реализованных потенций. В связи с этим будем различать *нереализованные и реализованные*

потенции (рис. 2, левые и правые цифры над буквами в кружках). Нереализованные структурные потенции составляют *структурный потенциал* клетки. Повторим, что заканчивается этот процесс возникновением терминально специализированных клеток, реализовавших все структурные потенции.

Как уже было сказано, число  $n$  функций, реализовавших структурные потенции (и, соответственно, число специализированных клеток), является вторым важным параметром развития. Кроме того, этот параметр показывает также число структурных потенций, реализованных самой древней функцией. Значение этого параметра может изменяться в пределах от 0 до  $m$ ; оно показано цифрами в самой верхней части рис. 2.

В заключение отметим, что, кроме рассмотренного варианта распределения генеративных и структурных потенций, могут быть и другие варианты, когда такие потенции разделяются среди нескольких разнотипных клеток. Это может менять расположение ветвей таких деревьев, но не число потенций. Примеры возможных вариантов таких деревьев приведены нами ранее (Савостьянов, 2020, [13]).

#### 3.1.4. Интеграция специализированных клеток в гистионы

Возникающие специализированные клетки уже не выполняют полного набора функций и самостоятельно существовать не могут. Поэтому для выживания они интегрируются с партнерами путем обмена метаболитами и услугами (рис. 2, нижняя часть). При этом связи, возникающие в результате интеграции между специализированными клетками с функциями разного филогенетического возраста, также будут различаться таким возрастом (аналогичное можно видеть и в реализации химических связей, которые формируются электронами с орбит разного уровня). В итоге возникают группировки специализированных клеток, объединенных взаимным обменом в единое социальное целое. Это и составляет суть прогрессивного развития. Для каждого значения  $m$  имеется множество таких группировок с  $n$ , принимающим значения от нуля до  $m$ . Такие группировки можно называть соционами, кооперонами, синергонами. Они представляют собой элементарные единицы сообщества. Применительно к многоклеточности мы назвали их гистионами (Савостьянов, 2020, [13]).

Как было сказано, рисунок 2 в верхней части показывает традиционную генеалогию клеток, т.е. их диффероны, установлением которых обычно и заканчивается рассмотрение развития. В противовес этой традиции, в нижней части рисунка показан новый, обычно упускаемый аспект, а именно: то, в какие гистионы и с какой социальной структурой объединяются клетки. Отметим, что в начале развития межклеточный обмен мог осуществляться при непосредственном клеточном контакте. В дальнейшем, после изобретения

внеклеточного матрикса (общей кассы), а затем клеток-посредников (мезодермы) и сосудистой системы – с их помощью.

Итак, гистион как элементарная единица многоклеточности представляет собой новый, устойчивый к редукционизму и упускаемый до сих пор объект биологии развития, занимающий самостоятельный уровень организации между уровнями клеток и тканей (Савостьянов, 2020, [13]). По своему значению гистионы в социологии и биологии играют ту же роль, что молекулы в химии. Филогенетически гистионы являются древнейшими и возникают намного раньше элементарных единиц органов.

**3.1.5. Заключение.** Итак, мы описали элементарные акты процедуры разделения труда, приводящей к возникновению и развитию элементарных единиц сообществ (для многоклеточности – гистионов). Суть такого разделения составляют процессы приобретения и реализации потенциалов. Для описания этих процессов используются три базовых параметра. Это: общее число  $L$  функций, подлежащих разделению; число  $m$  функций, получивших генеративные потенциалы; и число  $n$  функций, реализовавших структурные потенциалы. Осуществление актов приобретения и реализации потенциалов с изменением  $m$  и  $n$  и лежит в основе возникновения и прогрессивного развития гистионов. Отметим предварительно, что это развитие циклично: оно начинается с возникновения родоначальника и заканчивается исчерпанием его потенциалов.

В заключение отметим, что поскольку возможно регрессивное развитие, рассмотренные акты в принципе можно считать обратимыми. Это означает, что гистионы могут не только возникать, но и распадаться с дезинтеграцией и деспециализацией их клеток с соответствующим изменением их потенциалов.

### 3.2. Символика

Принятая символика уже пояснялась по ходу изложения. Приведем эти пояснения в компактной форме. В целом состав и структура гистионов будут обозначаться графами (см. рис. 1, 2 и 5). В них клетки обозначены кружками, функции в РАВ – строчными буквами при кружках, функции в РДС – прописными буквами при кружках, функции в РОС – прописными буквами в кружках. Генеративные потенциалы обозначены цифрами над прописными буквами при кружках; структурные потенциалы – цифрами над прописными буквами в кружках, при этом правые цифры обозначают число реализованных, левые – нереализованных структурных потенциалов. Стрелки между кружками обозначают интеграцию специализированных акторов путем обмена «товарами» и услугами.

### 3.3. Аксиоматика

Для полной характеристики разделения труда одних введенных понятий недостаточно. Необходимо также давать наборы правил, которыми эта процедура может регламентироваться в реальных сообществах. Различные варианты таких наборов были описаны нами ранее (Савостьянов, 2020, [13]). Приведем

пример простейшего набора для идеализированного гистиона. Начнем с алгоритма.

### 3.3.1. Алгоритм разделения труда

Здесь важно устанавливать последовательность приобретения и реализации потенциалов, а также перевода функций из РАВ в РДС и из РДС в РОС. Эти последовательности могут быть различными. В простейшем случае они регламентируются тремя нижеприведенными правилами.

1. Правило постепенности: функции в процесс приобретения потенциалов вовлекаются по одной в некотором порядке, задаваемом средой.

2. Правило повторения: реализации потенциалов повторяет последовательность их приобретения и начинается с древнейшей функции, а заканчивается самой молодой. В биологии это правило соответствует закону Бэра. Такой порядок было предложено называть главной последовательностью специализаций (Савостьянов, 2020, [13]).

3. Правило чередования: каждая новая потенция приобретается только после реализации всех предыдущих потенциалов.

Вместе с тем известно, что под влиянием среды от этой последовательности возможны отступления, проявляющиеся в виде различных гетерохроний и гетеротопий. Поэтому для каждого конкретного случая последовательность приобретения потенциалов и характер их распределения должны определяться опытным путем.

**3.3.2. Аксиомы.** Приведем простейший набор аксиом, чтобы показать, какими примерно могут быть их наборы для различных сообществ.

1. Исходными для развития являются автономные одноклеточные организмы, имеющие общее происхождение и выполняющие все функции только для себя, т.е. в РАВ.

2. Каждая клетка может специализироваться на выполнение только одной какой-либо функции.

3. Все специализированные клетки обеспечивают по равному числу партнеров.

4. Клетки интегрируются без посредников

5. Интеграция происходит только с обоюдной выгодой (мутуализм).

6. В процессе развития обеспеченность всех клеток полным набором функций  $L$  сохраняется, меняются лишь способы такой обеспеченности: путем автономного выполнения функций или интеграции клеток с партнерами.

Отметим, что шестая аксиома весьма важна для биологии. Она обеспечивает возможность выживать всем членам гистиона. В технических устройствах эта аксиома может не выполняться.

Эти правила дают некоторое представление о том, какими ограничениями может регламентироваться разделение труда в любой системе независимо от ее природы. Все они приняты в явном виде и потому доступны для анализа и критики. Их можно модифицировать, уточнять и тем самым развивать теорию,



адаптируя ее к различным частным случаям. Некоторые примеры такой модификации были рассмотрены ранее (Савостьянов, 2020, [13]).

#### 4. Результаты. Количественная характеристика развития гистионов

Проведенная формализация позволила нам разделить потенции на генеративные и структурные, реализованные и нереализованные. Более того, она позволяет давать описание количества различных потенций гистиона в прогрессивном развитии и меру такого развития. Убедимся в этом.

##### 4.1. Измерение числа различных потенций гистионов в развитии

Рассмотрим теперь динамику отдельных видов потенций в процессе развития гистионов, порожденных родоначальником с  $m=5, n=0$  и имеющего 15 нереализованных генеративных потенций (рис. 2 внизу слева).

Начнем с реализованных структурных потенций у функций в РОС. Выше было сказано, что их число оказывается разным (рис. 2, правые цифры над буквами в кружках). Тогда общее число реализованных структурных  $S_{pc}$  потенций у всех функций гистиона зависит только от  $n$  и эта зависимость носит следующий характер:

$$S_{pc} = 1/2 (1+n)n \quad (2)$$

Как можно видеть, эта зависимость аналогична показанной в (1).

В отличие от  $S$  и  $S_{pc}$ , общее число нереализованных структурных потенций  $S_{nc}$  у специализирующихся функций гистиона зависит уже от обоих параметров  $m$  и  $n$ . Для каждой отдельной функции это число одинаково и равно разности  $m - n$  (левые цифры над буквами в кружках на рис. 2). Тогда суммарное число нереализованных структурных потенций  $S_{nc}$  у всех функций гистиона равно:

$$S_{nc} = (m - n)n \quad (3)$$

Число таких потенций составляет *дифференцировочный потенциал* гистиона.

Из выражений (1), (2) и (3) можно найти число нереализованных генеративных  $S_{ng}$  потенций гистиона. Очевидно, что это число равно следующей разности:  $S - (S_{pc} + S_{nc})$ . Подставив значения этих величин и проведя простейшие преобразования, получаем, что  $S_{ng}$  также зависит от  $m$  и  $n$ , и эта зависимость носит следующий характер:

$$S_{ng} = 1/2 (m - n)(m - n + 1) \quad (4)$$

Число таких потенций составляет *генеративный потенциал* гистиона.

Наконец, из уже найденных выражений можно найти и последний показатель, характеризующий динамику потенций в развитии, а именно: число  $S_{pc}$  реализованных генеративных потенций. Очевидно, что оно равно сумме всех структурных потенций (нереализованных и реализованных) или разности между общим числом потенций и числом нереализованных генеративных потенций, т.е.

$$S_{pc} = S_{pc} + S_{nc} = S - S_{ng} = 1/2 (2m - n + 1)n \quad (5)$$

Таким образом, с помощью основных параметров процедуры разделения функций ( $m$  и  $n$ ) можно находить не только общий пул потенций, но и разделять их на отдельные виды и, тем самым, говорить о структуре этого пула, а также характеризовать его изменения в развитии. В графической форме эта зависимость показана на рис. 3. Нетрудно заметить, что она практически совпадает с графическим представлением закона Харди-Вайнберга – фундаментального законе популяционной генетики.

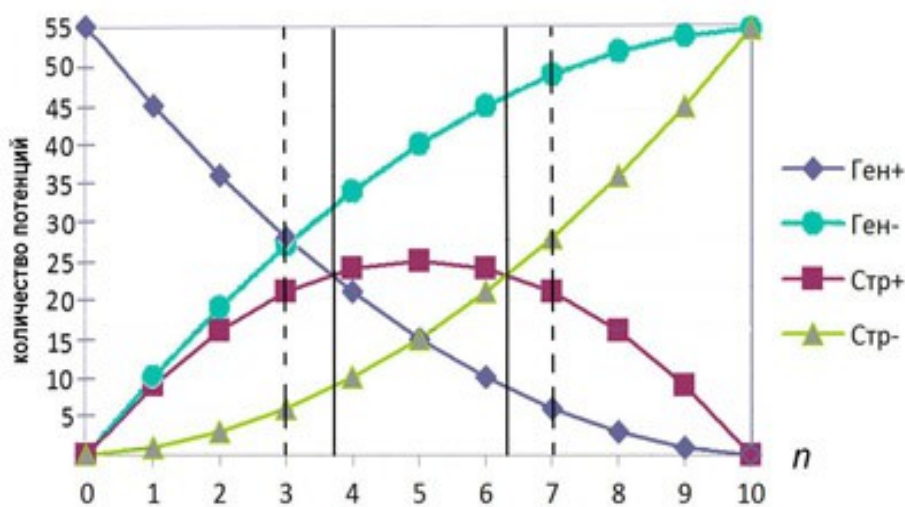


Рис. 3. Графическое представление изменения количества генеративных и структурных потенций гистионов в развитии при  $t = 10$  и  $S = 55$ . По осям координат отложены величина  $n$  и число различных потенций. Ген+ и Ген- это число нереализованных и реализованных генеративных потенций. Стр+ и Стр- это число нереализованных и реализованных структурных потенций. Смысл точек равновесия разъяснен в тексте. Зона адаптивного максимума выделена вертикальными сплошными линиями, зоны «детства» и «зрелости» – штриховыми.

Можно видеть, что для гистионов каждого цикла со значением  $t$  (для наглядности  $t$  принято равным 10) в тенденциях изменения численных соотношений различных потенций прослеживаются четкие закономерности. Так, общее число потенций  $S$  остается равным 55. Кривые, показывающие число реализованных и нереализованных генеративных потенций с ростом  $n$ , симметричны относительно горизонтали, проходящей через середину оси  $S$  и пересекаются эти кривые в точке с  $n$ , равном 3. Это пересечение – особая точка, в которой число реализованных и нереализованных генеративных потенций уравнивается. Назовем ее **точкой равновесия генеративных потенций**. Число реализованных структурных потенций с ростом  $n$  возрастает по такому же закону, как оно росло в процессе приобретения генеративных потенций. Число остающихся не-

реализованными генеративных потенций изменяется обратным образом. Эти кривые симметричны относительно вертикали, которая проходит через середину оси  $n$  (в данном случае  $n$  равно 5). Это пересечение – также особая точка, в которой уравнивается число реализованных структурных и нереализованных генеративных потенций. Назовем ее *точкой равновесия смешанных потенций*. Значение этих точек мы рассмотрим ниже. Число нереализованных структурных потенций гистионов достигает максимума в середине строк и симметрично минимизируется в их начале и конце, при этом у четных  $m$  максимум один, а у нечетных – два. Эта кривая дает 2 пересечения – слева и справа от центра. Вертикальные линии, проведенные через точки пересечений, дают основания для деления жизненного цикла на пять давно различаемых и качественно описываемых периодов: детства, юности, расцвета, зрелости и старения.

Таким образом, параметры  $m$  и  $n$  позволяют количественно описывать как общее число потенций, так и изменения их состава в прогрессивном развитии гистионов. Пока это описание носит гипотетический характер. Проверка предсказываемой динамики потенций составляет важную новую область экспериментальной биологии развития. Эту область можно назвать потенциомикой.

**4.2. Закон сохранения потенций гистиона** и происхождение стволовых клеток. Описанная динамика потенций позволяет сделать важное заключение. А именно: в соответствии с (1), в любом семействе гистионов общее число потенций  $S$  определяется величиной параметра  $m$  (числа функций в РДС) и меняется только с его изменением, а при его постоянстве остается неизменным. Другими словами, в развитии, связанном лишь с изменениями  $n$  и реализацией потенций, общее их число не меняется. Для процедуры разделения труда это положение имеет силу закона. Сформулируем его следующим образом: **в развитии гистионов при любом значении  $n$  и неизменном  $m$  общее число потенций остается постоянным, меняется лишь соотношение генеративных и структурных, реализованных и нереализованных потенций.**

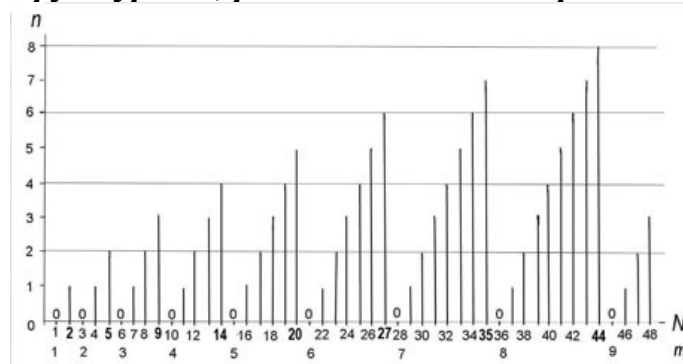


Рис. 4. Графическое представление закона периодического развития гистионов. По оси абсцисс отложена величина  $N$  – общее число актов развития гистиона, а также значения  $m$ , отвечающие значениям  $n = 0$ , т.е. началу нового периода; по оси ординат – величина  $n$ , т.е. число специализированных клеток гистиона.

Формально этот закон в графической форме показан на рис. 4. Аналитически его можно записать следующим образом:

$$S = S_{nc} + S_{nc} + S_{pc} = const \text{ при } m = const \text{ и } 0 \leq n \leq m \quad (6)$$

Из этого закона вытекают три важных следствия. Первое состоит в том, что развитие неизбежно должно быть циклическим, поскольку оно имеет начало (когда потенции родоначальника нереализованы) и конец (когда все они реализованы терминальными клетками). Второе сводится к тому, что рост числа клеток гистиона не может быть бесконечным: он ограничивается величиной  $m$ . Третье следствие состоит в том, что в развитии неизбежно должно быть разделение клеток на стволовые и нестволовые по следующей причине. Поскольку в цикле развития при неизменном  $m$  доля нереализованных генеративных потенций падает, а число специализированных клеток гистиона растет, то возникает момент, когда потенций на всех начинает не хватать. Это происходит в точке равновесия генеративных потенций (рис. 3). Она делит цикл развития на две неравные части: в левой части все клетки гистиона могут обладать генеративными потенциями (при их равномерном распределении между клетками), в правой – уже не все. С момента прохождения этой точки возрастающая часть функций в РДС у возникающих специализированных клеток остается без генеративных потенций (на рис. 2 эти функции обозначены нулями). Тогда можно сказать, что в развитии гистионов на большем протяжении цикла новые специалисты порождаются только родоначальными клетками с ненулевыми генеративными потенциями. Такие клетки и будут стволовыми. На верхней части рис. 2 эти клетки находятся на диагонали, идущей от клетки А вниз и направо. Как было сказано, их доля в развитии неуклонно падает. Клетки без генеративных потенций могут лишь увеличивать свою специализацию в соответствии с полученными структурными потенциями (т.е. своей детерминацией), но быть родоначальниками новых специалистов они неспособны.

Таким образом, закон сохранения потенций впервые дает простое объяснение цикличности развития, а также того, почему не могут быть родоначальными (стволовыми) все клетки «зрелых» гистионов. Благодаря ему становится понятной причина возникновения стволовых клеток в составе организмов и исчерпания их потенций в развитии. Другими словами, из закона сохранения потенций вытекает невозможность случая, когда на всем протяжении развития все клетки организма могут оставаться стволовыми. Кроме того, становится ясным, почему у одних стволовых клеток набор потенций больше, у других – меньше (т.е. почему существуют плюри-, мульти-, олиго- и унипотентные стволовые клетки, отличающиеся от дифференцированных соматических клеток). Становятся понятными и различия в величине потенциалов, которыми обладают члены человеческого сообщества. Наконец, становится понятным происходящее в развитии исчерпание

регенеративного потенциала организма, сообщества, государства, цивилизации и т.д. Все это – следствия закона сохранения потенциалов.

Отметим, что в рамках этого закона характер распределения потенциалов между клетками может различаться. Как уже говорилось, потенциалы могут сосредотачиваться у одного родоначальника (рис. 1 и 2), или распределяться среди нескольких. Это распределение зависит от внешних обстоятельств и должно определяться опытным путем.

До сих пор закон сохранения потенциалов лишь подразумевался неявно и интуитивно. И только формализованный анализ процедуры разделения труда впервые позволил сформулировать его в явной форме (Савостьянов, 2012а). Поэтому можно полагать, что этот закон характерен для всякой системы, развивающейся на основе разделения труда. Отсюда же можно заключить, что деление элементов на креативную и некреативную части также должно быть присуще этим системам. И это действительно так. В качестве примера можно назвать возникновение неспециализированных предков в филогенезе, пассионарных групп в этногенезе, креативного меньшинства в историческом развитии, и так далее.

#### **4.3. Интегральная мера $N$ прогрессивного развития гистионов**

Описанная динамика потенциалов впервые открывает возможность количественно оценивать меру прогрессивного развития на основе разделения труда. Как было сказано, элементарные акты такого развития заключаются в приобретении потенциалов и их реализации путем специализации и интеграции акторов (клеток). Тогда мера  $N$  развития будет зависеть от  $m$  – числа генеративных потенциалов, приобретенных самой древней функцией родоначальника, и  $n$  – числа структурных потенциалов, реализованных самой древней функцией гистиона. Фактически эта мера складывается из общего числа потенциалов, приобретенных родоначальником с параметром  $m$ , а также числа  $n$  реализованных потенциалов у самой древней функции. Формально эта мера записывается следующим образом:

$$N = S + n, \text{ или } N = 1/2 (1 + m)m + n \quad (7)$$

Важно отметить, что параметр  $n$  показывает также число специализированных клеточных типов гистиона и в силу этого является экспериментально определяемым. По этому параметру можно судить о предельной величине  $m$ , а стало быть, и  $N$ . Подчеркнем, что до сих пор биология (и социология) не имели параметра для измерения развития, на что сетовал еще Дарвин и что долгое время было важным пробелом. Этот параметр впервые удалось получить лишь благодаря формализованному описанию процедуры разделения труда.

Итак, по параметрам  $m$  и  $n$  можно находить численную меру  $N$  прогрессивного развития гистионов. Эта мера может применяться для измерения развития всякой системы, если оно основано на разделении труда.

Возможно решение и обратной задачи – по величине  $N$  можно определять значение  $m$  и  $n$  такой системы (Савостьянов, 2020, [13]).

#### 4.4. Закон периодического развития гистионов

Полученная мера  $N$  развития позволяет обнаружить еще один закон, свойственный процедуре разделения труда. А именно: выяснилось, что состав и структура возникающих гистионов характеризуется периодическим законом. Этот закон можно сформулировать следующим образом: *при монотонном росте общего числа  $N$  актов развития состав и структура гистионов периодически повторяются*. Графически периодическая зависимость числа  $n$  специализированных клеток от величины  $N$  показана на рис. 4. Гистионы с нулевым значением  $n$  (обозначены нулями на горизонтальной оси) представляют собой точки сингулярности, которые соответствуют стадиям одноклеточных (сингулярных) родоначальников. Интервалы между этими родоначальниками представляют собой циклы развития, длина которых увеличивается на единицу и определяется величиной  $m$ . Номер  $N$  последнего гистиона в каждом цикле показан жирной цифрой («магический номер»). За ним следует катастрофа, гибель всех специалистов гистиона, возникновение очередного сингулярного родоначальника и начало нового цикла. Это означает, что структуры гистионов повторяются в развитии много раз, повторяются и стадии одноклеточных родоначальников. Предельное число циклов (периодов) определяется величиной  $L$ .

Из этого закона следует важный вывод: в прогрессивном развитии закономерно и регулярно повторяются этапы эволюций и революций, усложнения и упрощения, и это невозможно избежать. Таким образом, здесь мы находим еще одно частное проявление действующего в Природе общего закона периодического прогрессивного развития "по спирали" и «перехода количества в качество».

#### 4.5. Двухмерная модель естественной системы гистионов

Рассмотрим теперь, как с помощью найденных параметров и законов можно описывать и естественным образом систематизировать множество гистионов, возможных в рамках принятых аксиом.

Ранжируя гистионы в порядке возрастания их номеров  $N$  и располагая гистионы с одинаковым значением  $m$  в строки, а с одинаковым  $n$  – в столбцы, их можно классифицировать в виде периодической таблицы (рис. 5). Параметры этой таблицы имеют биологический смысл и пригодны для количественного описания прогрессивного развития. Так, номера ее строк показывают число  $m$  функций в РДС и количество потенций у самой «древней» функции родоначальника. Номера строк показывают также число факторов среды, на которые могут реагировать гистионы данной строки. Номера столбцов показывают число  $n$  специализированных клеток гистиона с функциями в РОС и количество реализованных потенций у самой древней его функции. Число связей между клетками гистионов равно  $n(n-1)$ .

номера строк $m$	номера столбцов ( $n$ )					Z	$H_{gen}$	%	
	0	1	2	3	4				5
0							1	1	100%
1							3	3	100%
2							6	7	86%
3							10	15	67%
4							15	31	48%
5							21	63	33%

Рис. 5. Периодическая таблица гистионов с различными вариантами деления функций между клетками.

Порядковые номера гистионов (показаны в левом верхнем углу ячеек) равны величине  $N$ . Колонки цифр в правой части ячеек показывают количество различных потенциалов в каждом гистионе. При этом сумма нереализованных и реализованных генеративных потенциалов (двух верхних цифр колонки), всегда равна сумме нереализованных генеративных и всех структурных потенциалов (верхней и двух нижних цифр колонки) и эта сумма показывает общее число  $S$  потенциалов гистиона (его генеральный потенциал). Клетки каждого гистиона имеют различное число реализованных, но одинаковое число нереализованных структурных потенциалов (правые и левые цифры в кружках соответственно).

В нулевой ячейке – исходный универсал, выполняющий все функции (обозначены строчными буквами) автономно и только для себя. Номера строк  $m$  показывают число функций, приобретших потенциал к специализации. Номера столбцов  $n$  показывают число функций, реализовавших потенциал путем специализации (такие функции обозначены прописными буквами внутри кружков). Соответственно,  $n$  показывает и

число специализированных клеток. Цифры в левом верхнем углу ячеек обозначают порядковые номера  $N$  гистионов. Цифры в левом нижнем углу ячеек – число  $H$  изотопов, различающихся составом специализированных функций, но сохраняющих одинаковое значение  $N$ . Колонки цифр в правой части ячеек показывают сверху вниз число нереализованных и реализованных генеративных, а также нереализованных и реализованных структурных потенций. Цифры в столбце  $Z$  показывают общее число архетипных гистионов всех строк периодической таблицы с номерами, принимающими значение от нуля до  $m$ . Цифры в столбце  $Hgen$  показывают общее число всех (архетипных и изотопных) гистионов всех строк периодической таблицы с номерами, принимающими значение от нуля до  $m$ . Цифры в столбце % показывают долю архетипных гистионов от общего числа всех гистионов всех строк периодической таблицы с номерами, принимающими значение от нуля до  $m$ .

Таблица состоит из  $m$  отдельных циклов, при этом  $0 \leq m \leq L$ . По мере продвижения сверху вниз растет число приобретенных потенций гистионов. В нулевом столбце таблицы находятся полные генеративных потенций универсальные одноклеточные родоначальники. Каждая строка таблицы представляет цикл прогрессивного развития, в рамках которого действует установленный выше закон сохранения потенций. По мере продвижения по строкам слева направо растет число реализованных потенций. Их динамика показана в колонках цифр в правой части ячеек. При каждом начале очередного цикла (т.е. строки таблицы) она позволяет оценить, сколько актов развития из пройденного предыдущими гистионами пути получает по наследству очередной родоначальник в виде генеративных потенций, а сколько структурных потенций и специализаций не подлежит такой передаче и теряется.

Начинается цикл с сингулярного родоначальника, полного нереализованных генеративных потенций, заканчивается – исчерпанием всех потенций и формированием гистионов из терминально специализированных клеток. При этом гистионы переходят из неполночленной в полночленную форму. В рамках каждого столбца таблицы для гистионов всех ячеек характерно постоянство суммы реализованных структурных потенций (нижняя правая цифра в колонках ячеек). Наличие потенций к развитию и их исчерпание в пределах строки и придает развитию гистионов конечность, направленность, повторяемость и параллелизм, т.е. свойства, характерные для исторического и индивидуального развития реальных организмов. При этом естественным образом объясняется и неравномерность темпов развития, а именно: древние функции специализируются постепенно, тогда как молодые – скачками.

Полученная периодическая таблица является простейшей двухмерной количественной моделью естественной параметрической системы гистионов и составляющих их клеток. До сих пор о таких системах говорилось лишь качественно (Попов, 2007, [15]). Важно то, что ее основные параметры ( $m$  и  $n$ )



являются экспериментально определяемыми. Параметры этой таблицы открывают также возможность количественной характеристики и генеалогических деревьев каждого цикла. Поскольку, как уже говорилось, генеративные потенции между клетками могут распределяться по-разному, то и расположение ветвей дерева также может различаться (что и является причиной ненадежности генеалогической систематики). Однако некоторые количественные характеристики таких деревьев остаются при этом постоянными. Так, число всех его клеток определяется величиной  $m$  и всегда равно общему числу приобретенных потенций  $S+1$  (в данном случае оно равно 16). Число как родоначальных (стволовых), так и терминально специализированных клеток также определяется величиной  $m$  и в нашем случае оказывается равным пяти, что составляет около 31% от общего числа клеток.

Ряды клеток в ветвях дерева от родоначальников до терминально специализированного состояния составляют **диффероны**. Например, на рис. 2 показано пять дифферонов, при этом с ростом  $n$  диффероны укорачиваются, поскольку новорожденные клетки начинают свою специализацию со все более дифференцированного состояния. Это означает, что для специализации характерны как постепенность, так и скачки. Так, древняя функция А постепенно достигает терминальной специализации за 5 актов развития, тогда как молодая функция Е – за один, т.е. скачком.

В заключение отметим, что двухмерность построенной периодической таблицы вызывается жесткостью принятых правил алгоритма и, в частности, правила № 2 с вытекающей из него единственно возможной главной последовательностью специализаций. В этих условиях таблица показывает лишь значения  $m$ ,  $n$  и общее число  $N$  актов прогрессивного развития гистионов, которые мы будем называть **архетипными**. Предельное число таких гистионов каждой строки равно  $m+1$ , и в каждой последующей строке их число возрастает в арифметической прогрессии с разностью в единицу. Общее число  $Z$  всех гистионов таблицы из  $m$  строк в целом с учетом исходного (нулевого) гистиона равно:

$$Z = \sum_{k=0}^m (k+1) \quad (8)$$

(отметим, что в книге (Савостьянов, 2020, [13]) вместо этой формула дана ошибочная).

Число  $Z$  – важный показатель возможного разнообразия гистионов двухмерной таблицы. Например, для таблицы на рис. 5 этот показатель равен 21. Эти гистионы различаются параметрами  $m$ ,  $n$  и  $N$ . Однако двухмерная таблица ничего не говорит о возможном разнообразии качественного состава функций гистионов. Другими словами, таблица дает интегральную, но не дифференциальную характеристику развития. Но это можно поправить, превратив таблицу в трехмерную.

#### 4.6. Переход к трехмерной форме периодической таблицы

В изменяющихся средах возможны не только принимавшиеся до сих пор, но и другие последовательности вовлечения функции  $f$  в разделение. Это касается как приобретения, так и реализации потенциалов с переводом функций в РДС и РОС. Из общих соображений ясно, что не все комбинации функций в этих режимах технологически совместимы и могут сочетаться. Поэтому на комбинаторику должны быть наложены некие ограничения. Но на первых порах ради общности подхода мы не будем этого делать, полагая, что все специализированные функции могут свободно комбинироваться.

Начнем с рассмотрения вариантов последовательности и состава функций, приобретающих потенциал. Так, в рамках нулевого столбца для каждого значения  $m$  качественный состав набора функций, получивших потенциал к разделению и переведенных в РДС, может различаться. Предельное число таких наборов находится как число сочетаний  $C$  из  $L$  по  $m$ , т.е.  $C_L^m$ . Для каждой строки таблицы с номером  $m$  число таких сочетаний ограничивает пластичность и «архаическое многообразие» родоначальников. В филогенезе это многообразие показывает возможное число **архаллаксов** (направлений развития, различающихся набором функций в РДС и РОС). Последовательность, в которой функции вовлекаются в развитие и входят в такие наборы, также может различаться. И так как мы не наложили на комбинаторику никаких ограничений, то предельное число вариантов таких последовательностей равно числу перестановок  $m!$ .

Рассмотрим теперь многообразие вариантов реализации потенциалов. При движении гистионов по строке вправо состав функций в РОС жестко ограничивается вторым правилом алгоритма (правилом повторения). Но если его смягчить и отступить от закона Бэра, то станут возможными и другие последовательности вовлечения функций в специализацию. Предельное число вариантов таких последовательностей равно  $n!$  В филогенезе такая вариативность известна как гетерохронии и гетеротопии. Состав функций, реализующих потенциал, также может различаться. Вследствие этого в ячейках таблицы будут находиться гистионы с одинаковым строением и значением  $m$ ,  $n$  и  $N$ , но различающиеся набором функций, вступивших на путь специализации. Такие гистионы мы будем называть «изотопами». Например, в ячейке таблицы № 12 возможны шесть изотопов с различным составом специализированных функций: АВ, АС, АД, ВС, ВД, СД. В общем случае для любой ячейки таблицы число  $H$  таких изотопов равно числу сочетаний  $C$  из  $m$  по  $n$ , то есть

$$H = C_m^n. \quad (9).$$

Это число указано в левом нижнем углу ячеек. Благодаря изотопам в таблице возникает изотопная координата, и таблица становится трехмерной. Число изотопов максимально в середине и минимально в начале и конце каждой строки, при этом в строках с четным значением  $m$  максимум всегда один, а с нечетным два. Благодаря изотопам начальные гистионы каждой строки

являются чистыми диахрониками (осуществляющими функции последовательно во времени за  $H$  тактов), конечные гистионы – чистыми синхрониками. Остальные гистионы совмещают оба варианта осуществления функций и являются диасинхрониками.

Нетрудно видеть, что формальной основой такой таблицы служит треугольник Паскаля. Интересно отметить, что этот треугольник имеет отношение и к строению периодической системы элементов [Dunkan, 1996]. Из того факта, что в основе построенной таблицы лежит треугольник Паскаля следует, что ей присущи все свойства этого треугольника. Так, общее число гистионов в каждой ее строке равно  $2^m$ , и это число в каждой последующей строке в два раза больше предыдущего, т.е. оно увеличивается в геометрической прогрессии со знаменателем 2. Например, для строки с  $m=4$  оно составляет 16, а для строки с  $m=5$  оно составляет 32 гистиона. Отсюда ясно, что общее число  $H_{ген}$  архетипных и изотопных гистионов всех строк периодической таблицы с номерами, принимающими значение от нуля до  $m$ , равно:

$$H_{ген} = \sum_{k=0}^m 2^k \quad (10)$$

Это число составляет генеральное множество всех гистионов трехмерной таблицы и ограничивает репертуар их изменчивости.

Таким образом, периодическая таблица впервые позволяет вычислять долю архетипов и изотопов в многообразии всех гистионов. Поскольку с ростом  $m$  таблицы число  $Z$  архетипных гистионов растет в арифметической, а общее число  $H_{ген}$  гистионов – в геометрической прогрессии, то, начиная с третьей строки, изотопы численно начинают преобладать над архетипами, и это преобладание быстро становится подавляющим. Из этого следует важный вывод: большая часть изменений гистионов в развитии носит не прогрессивный или регрессивный характер с изменением  $m$ ,  $n$  и  $N$ , а сводится к перебору изотопов, не затрагивающему эти параметры.

Для систематики важно отметить, что изотопы каждой ячейки можно объединять в  $m$  пересекающихся групп, которые состоят из одинакового числа членов, но различаются составом специализированных функций. Критерием для выделения группы служит то, что все ее члены должны иметь хотя бы одну общую специализированную функцию. Например, вышеперечисленные изотопы ячейки № 12 разделяются на 4 пересекающихся группы (для наглядности общая функция в группе поставлена на первом месте): 1) АВ, АС, АД; 2) ВА, ВС, ВD; 3) СА, СВ, СD; 4) DA, DB, DC. Такое выделение групп может оказаться важным для классификации реальных гистионов. Примечательным свойством таблицы является то, что число членов в группах каждой ячейки находить очень легко: оно равно числу изотопов в соседней слева ячейке, расположенной в предыдущей (вышележащей) строке.

Подчеркнем, что поскольку закон сохранения потенциалов действует для всех возможных изотопных гистионов, то реализация их вариантов происходит не за

счет возникновения новых потенциалов, а путем перераспределения уже существующих потенциалов между функциями в РДС. Как уже говорилось, это проявляется в виде различных гетерохроний и гетеротопий. Механизмы этого перераспределения необходимо устанавливать опытным путем. Важно отметить также, что номер изотопа любого состава, равно как и номер последовательности специализации его функций (варианта их размещений) также поддаются количественному определению. Необходимые для этого формулы выведены в работе Н.Е. Тимошевой (2004) [17].

#### 4.7. Новые свойства изотопов

В заключение рассмотрим еще одно новое свойство трехмерной периодической таблицы и ее изотопов. Если все нечетные числа изотопов окрасить в серый, а четные – в белый, то образуется такая известная фрактальная структура, как треугольник Серпинского (рис. 6).

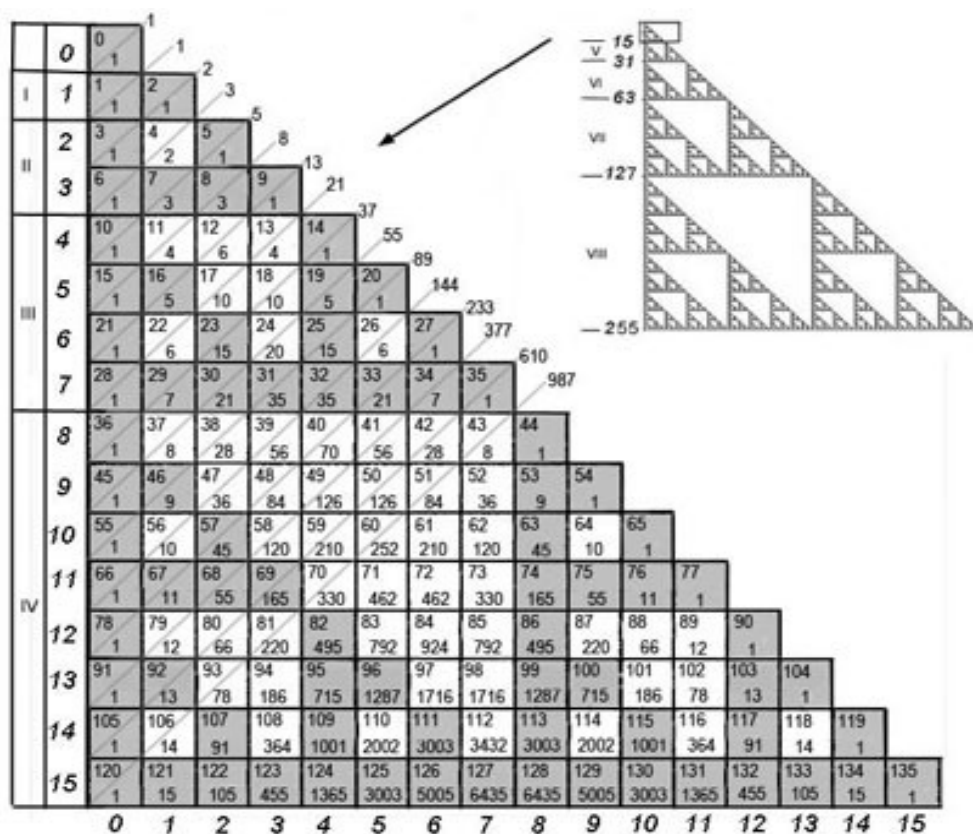


Рис. 6. Треугольник Серпинского, содержащийся в периодической таблице гистионов.

В верхней правой части рисунка дан общий вид треугольника Серпинского из 255 строк и столбцов. В верхней его части рамкой выделен фрагмент из 15 строк и столбцов, который в увеличенном виде показан в нижней левой части рисунка. Для простоты в каждой ячейке указаны лишь

порядковые номера  $N$  и число  $N$  изотопов, причем четные их количества содержатся в белых, а нечетные – в серых ячейках. Слева сверху вниз показаны номера строк треугольника, внизу слева направо показаны номера столбцов треугольника. Справа вдоль гипотенузы сверху вниз показаны суммы количества изотопов в ячейках, лежащих на диагоналях квадратов (указаны линиями); эти суммы представляют собой числа Фибоначчи. Серые строки, образованные только нечетными значениями изотопов (со значениями  $m$ , равными 1, 3, 7, 15 и т.д.), делят этот треугольник на отдельные секции (указаны римскими цифрами слева).

В верхней правой части рисунка дан треугольник Серпинского. Для наглядного представления строения этого треугольника число строк и столбцов в нем увеличено до 255. В верхней его части в рамке выделен фрагмент из 15 строк и столбцов, который в увеличенном виде показан в нижней левой части рисунка. Для простоты в нем указаны лишь номера  $N$  гистионов и число их изотопов в каждой ячейке. Кроме того, для большего соответствия периодической таблице гистионов, имеющей форму прямоугольного треугольника, такая же форма придана и треугольнику Серпинского. Очевидно, что серые строки, образованные только нечетными значениями изотопов, делят этот треугольник на отдельные секции (указаны римскими цифрами слева). Число строк в секциях увеличивается в геометрической прогрессии. Очевидно, что предельное число таких секций определяется величиной  $L$ . Возможно, такое деление периодической таблицы на секции можно будет использовать для обозначения больших групп организмов в параметрической систематике (скажем, типов и царств или, как теперь говорят, различных доменов). Наконец, если учесть делимость числа изотопов не только на два (четность), но и на три, пять, семь и т.д., то раскраска треугольника Серпинского станет более прихотливой.

Какими биологическими особенностями различаются четные и нечетные, а также прочие группы изотопов, пока не ясно. Для выдвижения гипотезы по этому вопросу обратимся к некоторым свойствам периодической таблице элементов Д.И. Менделеева. Известно, что степень распространенности в земной коре у элементов с четными и нечетными номерами различна. Так, элементы с четными номерами составляют от 85 до 90%, а элементы с нечетными номерами – всего лишь 10-15% вещества Земли. Это объясняется повышенной устойчивостью ядер элементов с четными номерами. Возможно, и в биологии окажется, что распространенность гистионов из ячеек с четным и нечетным числом изотопов является различной. Другими словами, жесткость наложенных на их комбинаторику ограничения может быть разной. В пользу этого предположения свидетельствует тот факт, что в Природе действительно встречаются как широко распространенные, так и редкие виды. Важно было бы изучить также и характер распределения разрешенных и запрещенных

гистионов на изотопной координате, т.е. спектр такого распределения. Это – важные новые вопросы, и их еще предстоит разрешить. Для этого остается определить меру  $N$  и  $H$  гистионов, и тогда станет ясно, верна ли высказанная гипотеза.

В заключение отметим, что возможную физиологическую связанность функций в РОС и наложенные на комбинаторику ограничения можно оценивать количественно (Савостьянов, 2020, [13]). Сравнивая число реализующихся сочетаний  $H_{real}$  функций в РОС с максимальным теоретически возможным числом  $H$ , можно получить интегральную меру ( $Q$ ) такой связанности:

$$Q = (H - H_{real})/H = 1 - H_{real}/H \quad (11)$$

Анализируя специфику сочетающихся функций в РОС, можно интегральную оценку их физиологической связанности дополнять ее дифференциальной оценкой.

Таким образом, периодическая таблица содержит множество всех разрешенных принятыми ограничениями гистионов. Это множество заключено в пределах от полной автаркии до полного разделения всех функций набора  $L$ . Таблица впервые дает объяснение цикличности развития гистионов и предлагает объективные критерии для деления их жизненного цикла на давно интуитивно известные периоды детства, юности, зрелости и старости, а также обозначает его начало и конец. Она объясняет также основные тенденции филогенеза, а также причину того, почему примитивные организмы обладают высоким регенеративным потенциалом, а высокоразвитые утрачивают его – это является следствием действия закона сохранения потенциалов. Положение каждого гистиона в таблице однозначно задает все его свойства, что и должно быть характерно для естественных систем (Любищев, 1982, [2]). Все это выгодно отличает предлагаемую таблицу от предпринимавшихся ранее многочисленных попыток подражательного построения периодических систем на иных (чаще интуитивных) основаниях. Наконец, наличие количественных и экспериментально определяемых параметров таблицы позволяет также количественно характеризовать генеалогические деревья и определять общее число входящих в них клеток, а также находить в нем долю стволовых и терминально специализированных.

#### **4.8. Главный итог прогрессивного развития гистионов**

При изучении развития как кооперации был сделан шаг к пониманию выгод эгоизма и альтруизма для членов сообщества (Burtsev, Turchin 2006, [10]; Nowak, 2006, [11] др.), а также к выяснению экономических итогов развития (Савостьянов, 2020, [13]). Понимание же социальных и технологических итогов прогрессивного развития для гистионов остается на интуитивном и качественном уровнях. Можно полагать, что один из главных его результатов заключается в росте общей энергидности  $W$  гистиона, которая складывается из

энергидностей всех его клеток. На примере гистиона, приведенного в ячейке № 20 на рис. 5, легко видеть, что пять его пятиэнергидных клеток дадут общую энергидность  $W$ , равную  $5 \times 5 = 25$  элементарных функций. В общем виде величина  $W$  зависит от числа специализированных клеток следующим образом:

$$W = n^2. \quad (12)$$

Как видно, с ростом числа клеток гистиона его энергидность растет возрастающими темпами. Смысл этой энергидности состоит в том, что она показывает, насколько выросло общее число элементарных функций в РОС у гистиона по сравнению с исходным моноэнергидным организмом. Косвенно это показывает также возрастание технологического уровня отправления функций. Поэтому именно рост энергидности и есть тот выигрыш, ради которого осуществляется разделение труда и который составляет основу биотехнического прогресса.

#### **4.9. Другие формы периодических таблиц**

Развитие может протекать в различных условиях среды. Модифицируя набор аксиом, можно учитывать эти условия и получать другие формы периодических таблиц. Так, отмена в аксиоме № 1 требования общности происхождения исполнителей позволяет строить периодическую систему симбиозов и сообществ, члены которых имеют независимое происхождение (лишайники, экосистемы и т.д.). Отмена аксиомы № 2 позволяет учесть полифункциональную специализацию клеток и получить таблицу, которая является моделью естественной системы Простейших. Отмена аксиомы № 5 делает возможными комменсализм, паразитизм и хищничество. Отмена третьей аксиомы делает возможными возникновение важного множества гистионов, члены которых образуют ядро из высокоспециализированных и периферию из низкоспециализированных членов. Можно модифицировать и другие аксиомы. Варианты возникающих таблиц рассмотрены нами в предыдущих работах (Савостьянов, 2020, [13]). Законы периодического развития и сохранения потенциалов для этих вариантов таблиц также остаются в силе.

#### **4.10. Возникновение клеточных сетей**

До сих пор при рассмотрении развития гистионов нам было достаточно представлять их в мономерной форме. Однако, наряду с развитием, существует еще и рост, в основе которого лежит полимеризация гистионов, в ходе которой возникают регулярные социальные сети различной размерности. Эти сети являются математическими моделями пространственной организации тканей. Они отражают как геометрию клеток, так и топологию клеточного взаиморасположения в трехмерном пространстве. Зная состав и структуру гистионов и правила их полимеризации, строение клеточных сетей можно вычислять и, тем самым, прогнозировать тканевое развитие. Это открывает путь построения трехмерной вычислительной гистологии. Полученные в ходе

морфологических исследований литературные и собственные данные подтверждают правильность построенных моделей. Таким образом, гистионы и регулярные клеточные сети представляют собой теоретическую основу тканевой инженерии и регенеративной медицины. Они открывают также новый подход к изучению малигнизации: она заключается не в поломке клеточных геномов, а в перестройке гистионов и клеточных сетей. Эти перестройки поддаются экспериментальному исследованию.

Отметим, что в дальнейшей эволюции начинается разделение труда уже между тканями. Это приводит к возникновению органов, в составе которых также выделяются элементарные единицы, которые можно называть уже не гистионами, а органонами. Но это уже следующий уровень биологической организации.

### **5. Возможные траектории развития гистионов**

Важно подчеркнуть, что построенная периодическая таблица гистионов описывает лишь пространство логических возможностей. Поэтому в общем случае она не отражает развитие, и соседство гистионов в ней не обязательно говорит о родстве. Более того, важно отметить, что таблица статична: она не содержит параметра времени. Вместе с тем она позволяет рассматривать развитие как игру организма со средой: среда затрудняет отправление функций, а гистион опознает с некоторой точностью, какие именно функции затруднены. Для нейтрализации помех он реализует подходящий вариант разделения труда, перемещаясь по столбцам, строкам и изотопной координате таблицы. При этом можно различать два вида развития: **прогрессивное** и **девиантное** (Савостьянов, 2014, [12]). Прогрессивное (и регрессивное) развитие связано с изменением  $m$ ,  $n$  и  $N$ , девиантное – с перебором изотопов. Многообразие возможных траекторий и служит основой многовариантности развития.

Рассмотрим простейший вариант прогрессивного развития в условиях ограничений, налагаемых алгоритмом и всеми аксиомами. Такое развитие протекает в стабильной и привычной для организма среде. Этот вариант развития описывается двухмерной периодической таблицей и заключается в поочередном увеличении числа функций, вовлеченных в разделение (движение по столбцам с изменением  $m$ ), а также реализации потенциалов путем движения по строкам с изменением  $n$  (рис. 5). Такой вариант развития в биологии называется анаболией. Для него справедлив основной биогенетический закон Геккеля-Мюллера, согласно которому онтогенез повторяет филогенез.

Однако в изменчивой среде порядок затруднения функций может стать другим. Тогда в начале каждой строки качественный состав функций с генеративными потенциями может изменяться. Предельное число их возможных комбинаций равно числу сочетаний из  $L$  по  $m$ . Здесь отмечается высокая чувствительность к воздействиям среды, а также высокая пластичность



и «ювенильное многообразие», способствующее выбору подходящих функций. Здесь же происходят архаллакисы и возникают химерные сочетания функций в РДС, порождающие новые направления развития. Таким образом, нулевой столбец – это начало множества различных по составу жизненных циклов.

При движении по строкам вправо происходит реализация потенциалов. На начальных участках строк с большим запасом нереализованных потенциалов также характерна высокая пластичность гистионов. В частности, здесь могут происходить гетерохронии, гетеротопии и девиации. При этом в рамках избранного направления развития происходит дивергентная специализация членов гистиона. Одновременно по мере движения вправо растет число их структурных потенциалов. При этом в середине строки доля нереализованных структурных потенциалов достигает максимума. Здесь же уравнивается число нереализованных генеративных и реализованных структурных потенциалов. Наконец, здесь же максимально и число изотопов, а, следовательно, и возможный набор адаптаций и траекторий развития. В этой точке возникновение гистионов уравнивается их распадом и может происходить динамическая остановка развития. Назовем эту часть строк таблицы *зоной адаптивного максимума*. Она соответствует «молодости» гистиона и на рис. 3 выделена вертикальными отрезками.

По мере дальнейшего движения по строкам вправо за пределами зоны адаптивного максимума располагается зона «зрелости» (ее граница симметрична границе «детства» и на рис. 3 обозначена второй пунктирной чертой). Число нереализованных структурных потенциалов гистионов, равно как и изотопов все еще остается высоким, но уже начинает уменьшаться. Соответственно уменьшается число возможных траекторий развития, снижается адаптивность и начинают проявляться признаки конвергенции. Происходящее при этом увеличение числа  $n$  специализированных клеток гистиона сопровождается увеличением числа межклеточных связей по закону  $n(n - 1)$ , что приводит к росту их взаимозависимости. При этом в составе гистионов уменьшается доля стволовых клеток, а набор их генеративных потенциалов сужается. Все это повышает регидность гистионов и снижает их способность реагировать на воздействия среды.

За границей зрелости начинается так называемое «филетическое старение». В таких гистионах сходятся все прежние траектории развития (конвергенция и варифинальность). Заканчивается цикл гистионами, реализовавшими все потенциалы к развитию, предел которому положен номером строки. Гистионы находятся в последней ячейке с магическим номером. Они состоят из терминально специализированных клеток и весьма эффективны. Они могут существовать лишь в стабильной, привычной для себя среде и даже переделывать ее под себя. Но их адаптивные способности сведены к нулю. Таким образом, конец строки – опасная зона. При малейшем изменении среды гистион может перейти в точку сингулярности с концом данного и началом

нового цикла развития. В этом случае возникает родоначальный гистион, который теряет все структурные и наследует только генеративные потенции.

Возможно три исхода такого события. Первый может заключаться в повторении цикла с прежним значением  $m$  и тем же, или иным набором функций, вовлеченных в разделение. В смысле прогресса это эволюционный стазис. Второй исход – в увеличении числа приобретенных потенций, переходу в следующую строку и началу нового, более длинного цикла. Это – прогрессивное развитие. Наконец, возможно уменьшение  $m$  с переходом в вышележащую строку и укорочением цикла развития. Это – серьезная стратегическая деградация, которую желательно избегать.

### 5.1. Оптимальная стратегия развития

Поскольку в начале строк таблицы находятся слаборазвитые, а в конце – косные гистионы, то для гарантированного выживания в умеренно вариабельной среде гистиону строки  $m$  выгодно находиться в пределах зоны адаптивного максимума, совершая небольшие прогрессивные, регрессивные и девиантные маневры. Это означает, что члены таких гистионов не только хорошо специализированы и интегрированы с партнерами, но и сохраняют достаточный запас автономно выполняемых функций, по которым они никому не подконтрольны (свободны). Кроме того, им доступна возможность реализовывать некоторое число изотопных вариантов структуры по собственному усмотрению с целью подстройки к вариациям среды.

Однако более сильные влияния среды могут вынудить гистион к существенному увеличению значения  $n$ . Это можно делать двумя способами. 1) В рамках своей строки – путем опасного продвижения вправо и приближения к ее губительному концу. При этом специализация и интеграция клеток возрастают до предела, под контроль берется все и вся, изотопы исключаются, и возможность автономного решения проблем выживания в режиме РДС и РАВ минимизируется. Именно к этому ведут призывы типа: сплотимся как один вокруг лидера, великой цели, веры и т.д. Это может быть приемлемым в качестве осознанной и краткосрочной меры без приближения к опасному рубежу. Такой маневр может основываться только на основе теории развития сообществ и высокой культуры управления, в противном случае все закончится крахом с переходом в точку сингулярности.

Если же возникает необходимость долгосрочного сохранения высокого значения  $n$ , гистион может достигать этого вторым способом. Он должен спуститься по столбцам таблицы вниз и увеличить значение  $m$  строки до такой величины, при которой требуемое значение  $n$  будет находиться в безопасной зоне адаптивного максимума, т.е. без приближения к правому краю строки. Это достигается, когда  $m \approx 2n$ , т.е. в середине строки. Поддержание такого соотношения  $m$  и  $n$  с опережающим осуществлением нововведений, увеличением числа потенций и достаточного количества функций в РАВ и РДС

(т.е. выполняемых автономно), а также запаса разрешенных изотопов и составляет оптимальную стратегию развития. Она предполагает высокое развитие науки о разделении труда и сообществах, обладании навыками социальной инженерии, а также манипуляции с потенциями гистионов. Данная работа показывает, что это вполне разрешимые задачи. Итак, общая рекомендация: всемерно увеличивать  $m$ , держаться середины строки и не сильно ограничивать изотопное разнообразие.

## 5.2. Управление развитием

По сути управление развитием сообществ сводится к реализации в них того или иного варианта разделения труда. Сейчас это делается без опоры на теорию, на основании накопленного опыта, интуитивно и во многом наугад. При этом риск ошибочных решений остается высоким, ясного представления о последствиях принимаемых решений в средне- и долгосрочной перспективе обычно не бывает. Теория разделения труда и периодическая таблица гистионов могут служить основой для более рационального управления развитием сообществ.

Прежде всего, важно осознать, что важны не столько новые технологии, сколько новые варианты социальной организации (т.е. разделения труда), которые сейчас ищутся наугад. Теория подсказывает, что поиск таких вариантов и их реализация должны проводиться следующим образом. Первый шаг: необходимо осознать свое нынешнее состояние и положение в периодической таблице. Это можно сделать с помощью параметров  $m$ ,  $n$ ,  $N$  и  $H$ , которые необходимо установить опытным путем. Пусть эти параметры соответствуют гистиону с  $N=9$ , показанному на рис. 5. Этот гистион плох тем, что в результате непродуманных управленческих решений он оказался предельно зарегулированным, не способным к адаптациям и находится на краю катастрофы. Теперь необходимо сделать второй шаг – выбрать гистион с желательными параметрами и вариантом строения, и также определить его место в таблице. Такой гистион должен быть в середине строки, в зоне адаптивного максимума, с достаточным запасом изотопов для подстройки к вариациям среды. Пусть это будет гистион с  $N=18$ , показанный на рис. 5. Его строение позволяет предвидеть, что результат перестройки будет вполне удовлетворительным.

По найденным значениям  $N$  можно определить расстояние между исходным и желательным гистионами. В нашем случае их разделяют 9 актов развития. Теперь необходимо наметить траектории перехода из начального в желательное состояние. Их может быть много. Рассмотрим 2 предельных варианта перехода.

Первый – последовательно реализовывать все гистионы в соответствии с их порядковыми номерами, пока не будет достигнут искомый.

Это – просто, но медленно и плохо потому, что придется преодолевать долгий путь, в том числе две точки сингулярности (катастроф, смут).

Переход этих точек опасен тем, что в них может измениться набор разделяемых функций (произойдет архаллаксис), что приведет к развитию в нежелательном направлении.

Второй вариант перехода состоит в том, чтобы спуститься по столбцам до нужной строки, и уже на втором ходу занять нужную ячейку, а далее – выбрать нужный изотоп. Это быстрее и вернее.

Но для этого нужна хорошая теория развития, способная построить детальный план перехода. Кроме того, нужны навыки социальной инженерии и манипуляции с потенциами. Ну и, наконец, необходим общий высокий уровень развития Науки.

В заключение еще раз отметим, что знание структуры гистионов (соционов) может служить также основой для синтеза моделей строения социальных сетей (Савостьянов, 2020, [13]).

Изложенный подход может составить рациональную основу социальной инженерии в обществе и тканевой инженерии в биологии.

## ***6. Сопоставление с реальностью***

Попытка применить предложенную теорию разделения труда к рассмотрению развития человеческого сообщества была предпринята нами ранее (Савостьянов, 2014, [12]). Здесь мы кратко рассмотрим применение этой теории к анализу развития многоклеточности.

Вследствие условности использованного набора функций  $L$  трудно ожидать, что построенная таблица будет отражать развитие каких-либо конкретных групп организмов.

Однако основные тенденции развития, связанные с процедурой разделения труда, они отражают хорошо. Так, и для таблицы, и для реального развития свойственны периодичность, конечность, параллелизмы, гетерохронии. Характерны также переходы от диахронии к синхронии, а также дивергенция, конвергенция, постепенность и скачки,

То обстоятельство, что для развития табличных гистионов характерно наличие стволовых клеток (для филогенеза – неспециализированных предков), и постепенное исчерпание их потенциалов также хорошо согласуется со свойствами реального развития.

Но это – лишь косвенное подтверждение.

Прямым подтверждением служит обнаружение предсказываемых теорией мономерных гистионов на начальных стадиях развития животных и растений (Савостьянов, 2020, [13]).

Там же были даны примеры того, как развитие можно измерять количественно.

Другое подтверждение состоит в следующем.

Понятие о гистионах и их полимеризации, приводящей к возникновению регулярных клеточных сетей как моделей пространственной организации тканей, послужило ключом к построению предсказательной теории тканевого строения (Савостьянов, 2020, [13]). На рис. 7 показан пример полученного семейства из 11 двумерных сетей и мозаик, известных как сети Шубникова-Лавеса и правильные паркеты Кеплера, и их реализация в реальных тканях.

К настоящему времени из 11 предсказанных вариантов 10 уже найдены в реальных тканях, обнаружение еще одного прогнозируется.

На основе этих моделей можно строить семейства и трехмерных моделей тканевой гистоархитектуры.

Использование моделей таких сетей в компьютерной реализации и их сопоставление с тканевыми срезами показало, что они действительно отражают пространственную организацию реальных клеточных пластов, прогнозируют их развитие, а также позволяют описывать строение внутриэпителиальных клеточных ниш (Савостьянов, 2020, [13]).

Компьютерные модели радикально повышают результативность изучения пространственной организации и являются шагом к созданию трехмерной гистологии.

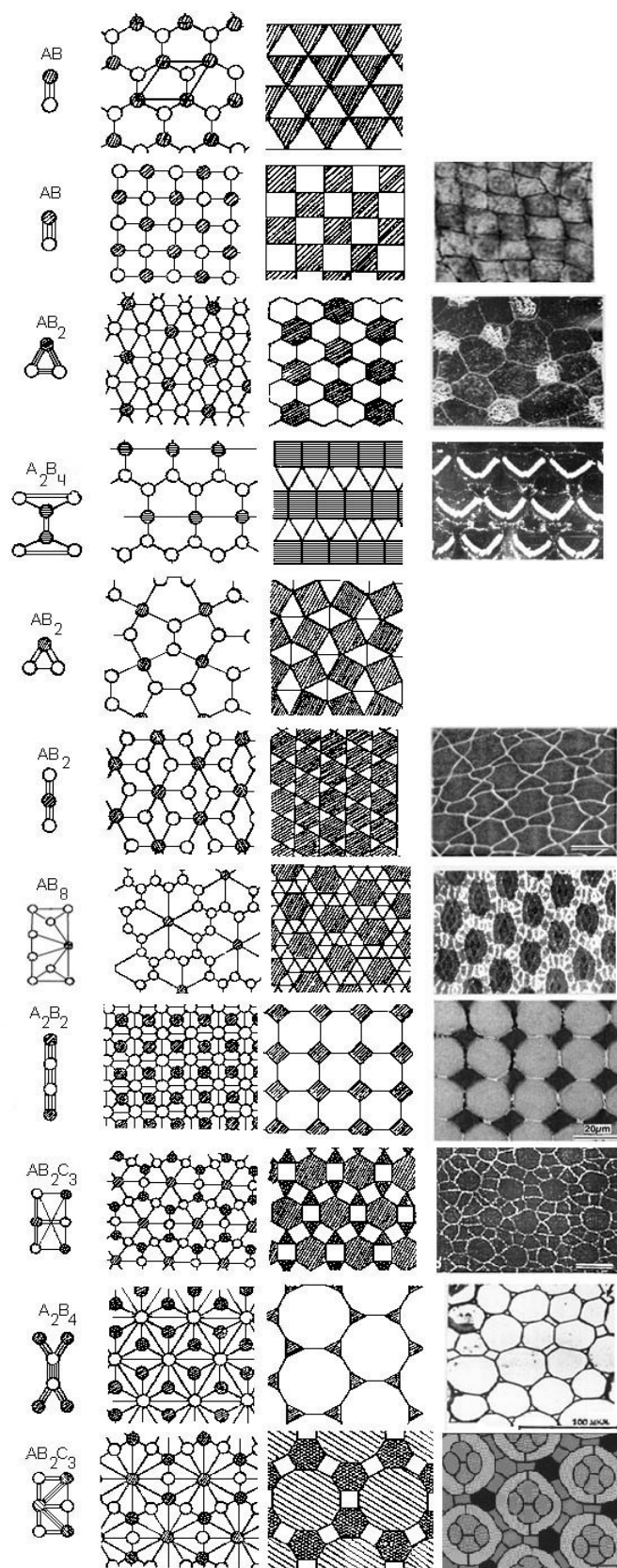


Рис. 7. Сводный рисунок одиннадцати математических моделей клеточных пластов и их реализаций.

Слева направо показаны мономерные гистионы, сети Шубникова-Лавеса, правильные паркеты Кеплера и примеры строения реальных тканей. Пустые места соответствуют не найденным пока вариантам организации эпителиев (из [13]).

Таким образом, мономерные гистионы и их полимеры в виде регулярных клеточных сетей оказываются новой биологической реальностью. Их дальнейшее изучение как новых объектов биологии развития является важной задачей. Подробнее это было описано нами ранее (Савостьянов, 2020, [13]).

В заключение отметим, что полученные результаты служат базой для управления тканевым развитием так, как это было описано выше.

### **7. Примеры измерения развития**

Параметры, на которых построена периодическая таблица, в принципе позволяют количественно измерять прогрессивное и девиантное развитие в различных сообществах. Попытка применить эти параметры к измерению развития человеческого сообщества была предпринята нами ранее (Савостьянов, 2014, [12]). Здесь мы кратко рассмотрим применение этих параметров к анализу развития многоклеточности. Все, что нужно для этого знать – это значения  $L$ ,  $m$  и  $n$ , которые необходимо находить из опыта исследования конкретных организмов. Но так как нахождение всех параметров сразу не всегда легко, то для прикидочной оценки можно обойтись определением величины какого-либо одного из двух последних. Зная, что в завершённом цикле развития предельное значение  $n$  всегда равно  $m$ , можно по одному известному параметру найти недостающий.

#### **7.1. Измерение прогрессивного развития**

Как сказано, для такого измерения необходимо знать, по меньшей мере, величину параметра  $n$ , то есть число клеточных типов, входящих в состав организма. До сих пор этот параметр не считался важным и для большинства организмов остается неизвестным.

Определим для начала меру прогрессивного развития простейшего представителя многоклеточных организмов – Трихоплакса. Принято считать, что в его состав входит 5 типов клеток (Серавин и Гудков, 2005, [18]), т.е. его  $n$  равно пяти. Генеалогия этих клеток, их численные соотношения, а также их общее число пока остаются неизвестными.

Поскольку величины  $L$  и  $m$  нам тоже неизвестны, примем в первом приближении предельный случай, когда  $m = n$ . На этом основании помещаем его в пятую строку и пятый столбец таблицы. В соответствии с выражением (7) находим, что общее число  $N$  актов его развития равно 20, из которых 15 приходится на общее число  $S$  всех потенциалов, получаемых по наследству

родоначальником при рождении, и 5 – на специализации функций в индивидуальном развитии. В соответствии со сказанным, генеалогическое дерево этого организма будет начинаться с родоначальника с  $N = 15$  и заканчиваться организмом с  $N = 20$ . Динамика потенциалов в таком развитии показана в столбцах цифр в правой части ячеек. Максимальная энергидность  $W$  Трихоплакса составляет 25.

Ранее мы показали (Савостьянов, 2020, [13]), что аналогичным образом можно оценивать меру прогрессивного развития и других организмов. Верно и обратное: по величине  $N$  можно определять структуру гистионов и число их потенциалов.

### 7.2. Измерение девиантного развития

Для количественного измерения девиантного развития нужно дополнительно знать качественный состав функций в РДС и РОС, а также последовательность их вовлечения в разделение (т.е. число и филогенетический возраст их потенциалов). Тогда можно определять не только общее число  $H$  изотопов гистиона и меру его девиантного развития (номер изотопа), но и устанавливать предельное число возможных гетерохроний и гетеротопий для каждого гистиона. Необходимые для этого формулы предложены Н.Е.Тимошевой (Тимошевская, 2004, [17]). Примеры таких измерений были даны в предыдущих работах (Савостьянов, 2020, [13]). Покажем это на примере того же Трихоплакса.

В соответствии с выражением (9) находим, что максимальное изотопное разнообразие, возможное для Трихоплакса в середине строки, равно 10, и эта величина свойственна двум вариантам гистионов в столбцах с  $n = 2$  и 3 и с порядковыми номерами  $N = 17$  и 18 (напомним, что по два максимума имеют строки с нечетным значением  $m$ ). При этом для каждого изотопа максимальное число гетерохроний (и гетеротопий) равно числу перестановок  $n!$  и составляет 2 и 6 соответственно. Общее число клеток в цикле развития (или в генеалогическом дереве) равно  $S+1=16$ , а число изотопов в строке равно  $2^5 = 32$ .

Чтобы отодвинуться от опасного конца строки и попасть в зону адаптивного максимума, такой организм должен переместиться в ячейки с номерами 17 или 18. При этом он уменьшает степень своего прогрессивного развития с 20 до 17 или 18. Если же Трихоплаксу будет необходимо сохранить  $n = 5$ , он должен будет увеличивать значение своего  $m$  до тех пор, пока не достигнет соотношения  $m \sim 2n$ . В итоге Трихоплакс перейдет в строку с  $m = 10$  и в столбец с  $n$ , равным 5, при этом мера  $N$  его развития будет равной 60, при этом число изотопов этой ячейке станет равным 252, а в строке в целом 1024.

И здесь начинает ощущаться новая проблема – быстрый рост числа изотопов. Это происходит потому, что для сохранения общности подхода на комбинаторику до сих пор не налагались никакие ограничения. Поэтому при увеличенных значениях  $m$  и  $n$  число изотопов растет в геометрической прогрессии и быстро становится необозримым. Это число слишком велико и



никак не сопоставляется с наблюдаемым разнообразием жизни. В действительности же комбинаторика ограничена, и в реальном развитии реализуется лишь малая доля теоретически возможных изотопов. В связи с этим при содержательном анализе развития конкретных сообществ и организмов необходимо выяснять все ограничения, наложенные на комбинаторику. Это – одна из проблем, поднимаемых предлагаемой теорией. Напомним, что уровню жесткости таких ограничений также можно давать интегральную количественную оценку с помощью выражения (9). Анализируя специфику сочетающихся в РОС функций, можно интегральную оценку их взаимосвязанности дополнять ее дифференциальной оценкой.

Подчеркнем, что приведенные оценки – всего лишь демонстрация метода количественного измерения развития в предельных случаях. Для реального его применения необходимо более точное экспериментальное определение значений  $m$  и  $n$ . С помощью этих параметров можно устанавливать меру развития гистионов, определять их состав и структуру, число клеток в генеалогическом древе и долю в нем стволовых и терминально специализированных клеток. Наконец, можно определять число различных потенций, а также характер их распределения между клетками. Тем самым можно прогнозировать способность к адаптациям и развитию.

В заключение отметим, что до сих пор единицы прогрессивного и девиантного развития были у нас безымянными, что неудобно. Подобно уже привычным для нас Вольтам, Амперам и Омам, единицам развития также можно дать имена великих эволюционистов прошлого в знак уважения к их заслугам. Имя Дарвина уже занято. Поэтому предлагаемые здесь единицы прогрессивного развития ( $N$ ) можно называть Ламарками, а девиантного ( $H$ ) – Сент-Илерами. Энергидность гистионов  $W$  можно измерять в цитоэргах.

### 7. Заключение

Построена формализованная теория разделения труда, протекающего в сообществах различной природы. В качестве примера описан процесс становления идеализированной многоклеточности на основе специализации и интеграции клеток. При этом основное внимание уделено формализованному описанию интердисциплинарного аспекта этой процедуры. Введены основные понятия, символика и аксиоматика. Описаны три элементарных акта развития: 1) осуществление открытий и инноваций, придающих трудам (функциям) потенции к разделению; 2) реализация потенций путем специализации клеток; 3) интеграция специализированных клеток в элементарные единицы многоклеточности – гистионы. Подчеркнуто, что гистионы представляют собой новый, упускаемый до сих пор уровень биологической организации, находящийся между уровнями клеток и тканей.

Для количественной характеристики гистионов предложены экспериментально измеряемые параметры. Это: общее число и перечень

функций, подлежащих разделению; число  $m$  функций, получивших потенции; число  $n$  функций, реализовавших потенции путем специализации. С помощью этих параметров показано, что гистионам присущи два вида потенций (генеративные и структурные) и два их состояния (реализованные и нереализованные). Сформулирован закон сохранения потенций и впервые объяснена причина цикличности развития, а также условия происхождения стволовых клеток, то есть невозможность случая, когда в развитии все клетки организма могут оставаться стволовыми. Показана возможность вычисления общего числа клеток генеалогического дерева и определения в нем доли стволовых и терминально специализированных клеток.

Кроме того, с помощью этих параметров впервые получена мера  $N$  прогрессивного развития гистионов, сформулирован периодический закон такого развития и построена трехмерная периодическая таблица гистионов. Эта таблица предусматривает два вида развития: прогрессивное и девиантное, и позволяет прогнозировать и измерять его. Она компактно и с единых позиций описывает известную феноменологию эволюционного развития: конечность, направленность и параллелизмы. Кроме того, таблица количественно описывает динамику потенций в развитии и дает представление об его оптимальной траектории. Дан пример измерения развития реального организма.

Разработанный подход представляет собой формализованный вариант номогенеза – теории развития на основе закономерностей. Эта теория носит интердисциплинарный характер и применима для изучения систем различной природы, если их развитие основано на процедуре разделения труда. Разработанная теория заполняет пробел, существующий в описании развития сообществ и создает основу для управления таким развитием. Эта теория может служить основой как тканевой инженерии в регенеративной медицине, так и социальной инженерии в человеческих сообществах.

Вместе с тем разработанный подход ставит ряд новых вопросов по изучению развития и проверке сделанных предсказаний. В частности, для того, чтобы количественная характеристика потенций, а также измерение и прогнозирование развития многоклеточности (и других сообществ) стало возможным, необходимо решение следующих задач:

1) Выяснение природы исходных акторов (исполнителей). Нахождение перечня  $L$  функций, выполняемых акторами автономно и только для себя (в РАВ), а также выяснение первобытных механизмов и технологий автономного отправления этих функций.

2) Составление перечня и последовательности эволюционных открытий и инноваций, придающих функциям потенции к разделению.

3) Нахождение числа  $m$  функций, вовлеченных в разделение (переведенных в РДС) и получивших потенции на каждом этапе развития. Определение

последовательности такого получения и характера распределения потенций среди функций в клетках организма.

4) Нахождение числа  $n$  функций, получивших структурные потенции к специализации и совершенствованию технологий, а также определение числа таких потенций у каждой функции. Установление числа  $n$  входящих в организм типов специализированных клеток и последовательности возникновения этих типов.

5) Формулировка аксиоматики, то есть правил разделения функций, а также выяснение того, какие ограничения наложены на комбинаторику в сочетаниях и последовательности вовлечения функций в разделение в прогрессивном и девиантном развитии.

6) Выяснение состава и структуры возникающих гистионов, построение их естественных параметрических систем в виде периодических таблиц и нахождение точек равновесия в развитии.

Применительно к биологии многоклеточности можно наметить дополнительные частные задачи.

7) Выяснение молекулярно-биологических механизмов приобретения генеративных и структурных потенций и записи их числа у отдельных функций (т.е. фиксации их филогенетического возраста). Исследование механизмов превращения генеративных потенций в структурные (детерминация) и обратно (инициация).

8) Разработка молекулярных маркеров генеративных и структурных, реализованных и нереализованных потенций и проверка их теоретически предсказанной динамики, показанной на рис. 3.

9) Исследование клеточных сетей, возникающих в результате полимеризации гистионов, и реализации этих сетей в тканях (т.е. изучение пространственной организации тканей).

Решение этих вопросов будет способствовать созданию номогенетической предсказательной теории развития на основе разделения труда. Эту теорию можно будет использовать как базу для управления развитием в различных конкретных сообществах. В частности, для изучения становления и развития элементарных единиц многоклеточности и происхождения стволовых клеток. Такой подход сделает возможным их количественное описание, построение параметрической системы гистионов и их клеток в виде периодических таблиц, а также измерение и прогнозирование их развития в норме и патологии.

Работа выполнена в рамках Государственного задания № 075-00776-19-02.

### *Литература*

1. Хаубольд Б., Вие Т. Введение в вычислительную биологию. Эволюционный подход. М., РХД, 2011, 456 с.

2. Берг Л.С. Труды по теории эволюции. Л., Наука, 1977, 388 с.
3. Любищев А. А. О форме естественной системы организмов. Проблемы формы, систематики и эволюции организмов, М.: Наука. 1982, с. 24–36.
4. Винер Н. Кибернетика. М.: Советское радио, 1968, 326 с.
5. Мазалов В.В. Математическая теория игр и приложения. СПб-М.-Краснодар: Лань, 2010. 446 с.
6. Рашевский Н. Организмические множества: очерк общей теории биологических и социальных организмов. Исследования по общей теории систем. М., Наука, 1969. С. 442-461.
7. Bailey K. D. Sociology and the New Systems Theory: Toward a Theoretical Synthesis, 1994, 163 p.
8. Kelly K. Out of control: The new biology of machines, social systems and the economic world, Addison-Wesley, 1994, 528 p.
9. Chandebois R. Cell sociology and the problem of automation in the development of pluricellular animals, *Acta Biotheor.* 1980, V 29, N 1, P 1-35.
10. Burtsev M., Turchin P. Evolution of Cooperative Strategies from First Principles. *Nature*, 2006, V. 440, P. 1041–1044.
11. Nowak M. A. 2006. Five Rules for the Evolution of Cooperation. *Science*, V. 314, P. 1560–1563.
12. Савостьянов Г.А. Как можно прогнозировать и измерять историческое развитие социальных и биологических сообществ. Эволюция. От протозвезд к сингулярности? Волгоград; Учитель, 2014. С. 279-308.
13. Савостьянов Г.А. Структурные основы биологии развития и трехмерной гистологии. Новый подход к изучению канцерогенеза. СПб: Лема, 2020, 832 с.
14. Захваткин А. А. Сравнительная эмбриология низших беспозвоночных. М., Сов. наука, 1949. 395 с.
15. Попов И. Ю. Периодические системы и периодический закон в биологии. СПб – М., Т-во научн. изд. КМК, 2008. 223 с.
16. Dunkan R.L. Electronic Configuration Pattern Found in Pascal's Triangle. *J. Chem. Educ.*, 1996, 73(8), p. 742-743.
17. Тимошевская Н.Е. О нумерации перестановок и сочетаний для организации параллельных вычислений в задачах проектирования управляющих систем, *Известия Томского политехнического университета.* 2004. Т. 307. № 6 С. 18-20.
18. Серавин Л.Н., Гудков А.В. *Trihoplax Adhaerens* (тип Placozoa) – одно из самых примитивных многоклеточных животных. Учебное пособие для студентов – биологов. СПб, ТЕССА, 2005, 65 с.

*Division of labor theory  
as the basis for managing the development of biosystems.  
Elements of mathematical modeling*

**Savostyanov G.A.**

*Institute of Evolutionary Physiology and Biochemistry  
named after I.M. Sechenov Russian Academy of Sciences,  
St. Petersburg, Russia, genasav38@mail.ru*

**Abstract.** The development of communities of various natures is based on the procedure for the division of labor. Interdisciplinary in nature, it is still described only qualitatively. In this work, a formalized description of this procedure is given by the example of the formation of multicellularity. Basic concepts, symbols and axioms are proposed. Introduced concepts of elementary acts of development, which consist of the acquisition and implementation of the potential for specialization and integration of cells. As a result, a set of models of elementary multicellularity units - histions, represented in the form of directed graphs, were obtained. For their quantitative characteristics, meaningful and experimentally determined parameters are proposed. On their basis, for the first time, a parameter was obtained for the quantitative measurement of histion development. It is shown that such development obeys a periodic law. The natural system of histions is constructed in the form of a three-dimensional periodic table, which is based on the Pascal and Sierpinski triangles, and which contains isotopic histions. The table allows you to predict their structure in development and measure it. For the periods of the table, the law of conservation of potencies is formulated, which describes their dynamics in development and explains the origin of stem cells. It is shown that it is convenient to consider the development of histions as their running through the rows, columns and isotopic coordinates of the table. Criteria for an optimal development strategy are proposed. The possibility of a rational approach to development management is shown. An example of measuring the development of real organisms is given. In general, the proposed theory can be considered a formalized nomogenesis.

**Keywords:** division of labor, specialization and integration, development, communities, multicellularity, histions, potencies, periodic law, taxonomy, modeling, management

**References**

1. Haubold B., Vie T. Vvedenie v vichislitelnyu biologiyu. Evolutsionniy podhod [Introduction to computational biology. An evolutionary approach]. M., RKhD, 2011, 456 p.
2. Berg L.S. Trudi po teorii evolutsii [Transactions on the theory of evolution]. L., Nauka, 1977, 388 p.
3. Lyubishchev A.A. O forme estestvennoy sistemi organizmov. Problemi formi, sistematiki i evolutsii organizmov [About the form of the natural system of organisms. Problems of the Form, Systematics and Evolution of Organisms], Moscow: Nauka. 1982, p. 24-36.
4. Wiener N. Kibernetika [Cybernetics]. Moscow: Soviet radio, 1968, 326 p.
5. Mazalov V.V. Matematicheskaya teoriya igr i prilozheniya [Mathematical game theory and applications]. SPb-M.-Krasnodar: Lan, 2010.446 p.
6. Rashevsky N. Organizmicheskie mnozhestva: ocherk obshey teorii biologicheskikh i socialnikh organizmov. Issledovaniya po obshey teorii sistem [Organismic sets: an outline of the general theory of biological and social organisms. Research in general systems theory]. M., Nauka, 1969.S. 442-461.
7. Bailey K. D. Sociology and the New Systems Theory: Toward a Theoretical Synthesis, 1994, 163 p.

8. Kelly K. Out of control: The new biology of machines, social systems and the economic world, Addison-Wesley, 1994, 528 p.
9. Chandebois R. Cell sociology and the problem of automation in the development of pluricellular animals, *Acta Biotheor.* 1980, V 29, N 1, P 1-35.
10. Burtsev M., Turchin P. Evolution of Cooperative Strategies from First Principles. *Nature*, 2006, V. 440, P. 1041–1044.
11. Nowak M. A. 2006. Five Rules for the Evolution of Cooperation. *Science*, V. 314, P. 1560–1563.
12. Savostyanov G.A. Kak možhno prognozirovat i izmeryat istoricheskoe razvitie socialnikh i biologicheskikh soobshestv. Evolutsiya. Ot protozvezd k singularnosti?[How can the historical development of social and biological communities be predicted and measured. Evolution. From protostars to singularity?] Volgograd; Teacher, 2014.S. 279-308.
13. Savostyanov G.A. Strukturnie osnovi biologii razvitiya i trekhmernoy gistologii. Noviy podhod k izucheniyu kantserogeneza [Structural Foundations of Developmental Biology and 3D Histology. A new approach to the study of carcinogenesis]. Saint Petersburg: Lema, 2020, 832 p.
14. Zakhvatkin A.A. Periodicheskie sistemi i periodicheskiy zakon v biologii [Comparative embryology of lower invertebrates]. M., Sov. Science, 1949.395 p.
15. Popov I. Yu. [Periodic systems and the periodic law in biology]. SPb - M., T-in scientific. ed. KMK, 2008.223 p.
16. Duncan R.L. Electronic Configuration Pattern Found in Pascal's Triangle. *J. Chem. Educ.*, 1996, 73(8), p. 742-743.
17. Timoshevskaya N.E. O numeratsii perestанovok i sochetaniy dlya organizatsii paralelnikh vychisleniy v zadachakh proektirovaniya upravlyayushikh sistem [On the numbering of permutations and combinations for the organization of parallel computations in control system design problems], Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. 2004. T. 307. No. 6 S. 18-20.
18. Seravin L.N., Gudkov A.V. Trihoplax Adhaerens (tip Placozoa) - odno iz samikh primitivnikh mnogokletochnik zhivotnikh [Trihoplax Adhaerens (type Placozoa) is one of the most primitive multicellular animals. Textbook for students - biologists]. SPb, TESSA, 2005, 65 p.

## **Квантовоподобные феномены усиления распространения эмоционально окрашенных сообщений в сетевых сообществах**

Алоджанц А.П.<sup>1</sup>, Баженов А.Ю.<sup>2</sup> Гнидко К.О.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> д.ф.м.н., профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург,  
Россия, e-mail: alexander\_ap@list.ru

<sup>2</sup> аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург,  
Россия, e-mail: b.a.y@mail.ru

<sup>3</sup> д.т.н., доцент, ВКА имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург,  
Россия, e-mail: greeny598@gmail.com

**Аннотация.** В работе обсуждаются цели, задачи и подходы нового междисциплинарного направления – квантовой когнитивистики, образованной на стыке гуманитарных и естественных наук, и которое связано с применением квантовой теории для изучения когнитивных и психологических процессов в плане моделирования обработки информации человеческим мозгом, принятия решений, формирования концепций, рассуждений, мировосприятия и пр., что является несомненными атрибутами сильного искусственного интеллекта. В этой связи при описании когнитивных состояний агентов, принимающих контекстуально зависимые решения как на индивидуальном, так и коллективном уровнях, проводятся глубокие аналогии с фундаментальными физическими экспериментами, демонстрирующими корпускулярно-волновой дуализм в Природе, неотъемлемой стороной которого является способность интерференции различных состояний системы. Для проверки данного свойства выполнен модельный эксперимент, целью которого являлась проверка гипотезы о квантовоподобном характере феноменов, наблюдаемых при непрямом распространении эмоционально окрашенной информации в сетевых сообществах. В основу эксперимента положена технология автоматического анализа эмоциональной тональности текстов («сентимент-анализ»), адаптированная для русского языка за счет разработки оригинального набора словарей эмоционально значимых слов и символов («смайлов»). Экспериментальная часть работы включала в себя: получение доступа к сообщениям открытого сообщества «Мировая политика» социальной сети «ВКонтакте»; сбор и первичную обработку исходных данных; формирование априорного признакового пространства экспериментальной модели; сокращение размерности признакового пространства и выявление наиболее информативных признаков и значимых факторов с формированием ортогонального базиса некоррелированных главных компонент; статистическую обработку и визуализацию результатов исследования. Эмоциональные состояния субъектов коммуникации в рамках проведенного эксперимента интерпретировались как квантовые состояния, причем валентность соотносится с координатой, а эраузл (энергетическая психологическая переменная) – с импульсом частицы. Выяснено, что взаимодействие акторов посредством публикации комментариев и непрямого обмена эмоциями приводит к взаимному усилению или ослаблению восприимчивости к эмоционально окрашенным сообщениям в определенных диапазонах тональности, что непосредственно может быть соотнесено с наблюдаемой интерференционной картиной пространстве главных компонент, и может быть источником усиления или ослабления (на более глобальном уровне) распространения информации в сетях Интернет. Результаты работы позволяют выдвинуть гипотезу о

*квантовоподобном (волновом) характере обработки информации сложными сетями и гиперсетями, в основе которого лежат интерференционные явления, и которые в конечном итоге являются ответственными за скорость распространения информации в таких структурах.*

*Ключевые слова:* информационное моделирование, квантовая когнитивистика, социальные сети, сентимент анализ

### **Введение**

С началом цифровизации в развитых странах мира современное общество претерпевает существенные изменения в плане возрастающих потребностей в использовании информации, новых коммуникационных инструментов, внедрении систем искусственного интеллекта (ИИ), и пр. Ключевым драйвером этих изменений является Интернет, в рамках которого могут взаимодействовать как отдельные индивиды, так и целые сообщества людей, которые зачастую разделены тысячами километров, но при этом объединены определенными признаками, исходя из жизненных предпочтений, личных устремлений, психологической, гендерной, национальной и конфессиональной спецификации, отношением к определенным событиям в стране и в мире в целом. В этой связи междисциплинарные исследования сложных сетевых структур, какими являются сам Интернет, а также функционирующие на его просторах различные сетевые сообщества, вызывают все возрастающий интерес со стороны специалистов, работающих в совершенно разных областях наук: математиков, инженеров в области коммуникаций и информации, физиков, социологов, психологов [15]. Иногда можно обнаружить эффект огромного (социального) усиления от незначительного, на первый взгляд, распространения информации. А в некоторых случаях социально значимая информация и знания, напротив, быстро затухают. *В какой степени релевантна информация нашим потребностям? Насколько быстро социально значимая информация может распространяться в социальных сетях и сообществах и как сами эти сообщества трансформируются под действием внешних «возмущений»?* Эти вопросы приобретают все возрастающее значение с точки зрения нормального функционирования современного общества; способ их решения заключается в понимании фундаментальных свойств человеческого суждения и принятия решений (ПР) как на индивидуальном, так и коллективном уровнях в условиях неопределенностей.

На первый взгляд кажется, что данная тематика находится в стороне от самих проблем ИИ и затрагивает социальные аспекты развития общества в целом. Однако это совсем не так! Дело в том, что с развитием современных цифровых технологий, систем связи 5G, наше общество с необходимостью столкнется с проблемами интенсивно внедряемого в мире «Интернета вещей» (ИВ), субъектами которого будут не только люди (агенты естественного



интеллекта, АЕИ), или «вещи», но их цифровые двойники, агенты искусственного интеллекта (АИИ) [6]. «Социализация» АИИ проходит уже сейчас, с созданием, например, так называемых цифровых двойников, чат-ботов и пр., функционирующих в сетях Интернета и заменяющих в целом ряде случаев АЕИ, а также взаимодействующих с ними.

С математической точки зрения данные вопросы неразрывно связаны со сложностью обработки и распространения информации гигантскими сетевыми структурами, которая, очевидно, зависит от их топологической сложности [7-9].

В этой связи такие задачи имеют непосредственное отношение, пожалуй, к самой сложной (гипер)сетевой структуре, каковой является мозг человека. Таким образом, модели распространения информации, ее усиления, формирования центров влияния (хабов), и пр. в комплексных сетях могут быть весьма полезными для понимания сложной природы процессов, приводящих к формированию сознания [10].

Представляемая нами работа ставит целью поиск ответов на обозначенные выше вопросы и проблемы на основе квантовых методов и подходов, хорошо зарекомендовавших себя в физике, химии, информатике, и теперь все больше применяемых в социогуманитарных дисциплинах [11,12]. Квантовая парадигма, применяемая здесь, в ряде случаев является более точной, а методология ее применения позволяет избежать сложных и громоздких вероятностных моделей, заменяя их более простыми квантовыми аналогами.

### *1. Квантовая когнитивистика как инструмент решения задач ПР в условиях неопределенности*

С недавних пор **квантовая когнитивистика** стала новым междисциплинарным направлением исследований на стыке гуманитарных и естественных наук, которое связано с применением квантовой теории для изучения когнитивных и психологических процессов в плане моделирования таких когнитивных явлений, как обработка информации человеческим мозгом, языком, принятия решений, человеческая память, формирование концепций, рассуждений и мировосприятия.

На индивидуальном уровне квантовая когнитивистика имеет дело с задачами ПР в условиях неопределенности, что давно является предметом исследований в психологии, когнитивных науках, математической теории игр, см. напр. [13].

В общем случае ПР характеризуется высокой степенью риска и неопределенности, разработка теории ПР для рискованного и неопределенного контекста является непростой задачей [14,15]. В этом случае известные классические подходы к решению таких задач, моделируемые, например, стратегиями классической теории игр, могут приводить к громоздким, подчас трудно объяснимым решениям; иррациональные и/или спонтанные решения

существенно влияют на результат (здесь имеет смысл упомянуть многочисленные парадоксы теории ПР, наиболее известные из них – парадоксы Эллсберга и Алле [16,17]). Такое поведение требует новых математических подходов, учитывающих когнитивные состояния участников [12]. В последнее время довольно часто на практике наблюдается феномен отхода от решений, предсказываемых классическими вероятностными моделями. В экономике и финансах, например, относительно недавно появилось новое направление, именуемое как поведенческая экономика [18], в рамках которой делается попытка учета влияния когнитивных, эмоциональных и прочих факторов на принимаемые решения. Отчасти это обусловлено усложнением самих условий ПР, необходимостью учета большого количества критериев [15], «давлением» большой (избыточной) информации, а иногда наоборот – ее недостатком. В этих условиях вопросы влияния психологии агентов ПР на сами эти решения играют не последнюю роль.

Теория ПР, основанная на квантовом формализме, способна разрешить упоминаемые выше парадоксы а также учесть эти неопределенности посредством определенных неравенств (Шварца), именуемых соотношениями неопределенностей [19].

Следует отметить, что попытки применения квантовой теории в психологии, когнитивных и социальных науках делались еще давно. Предпосылки для выдвижения гипотезы о применимости математического аппарата квантовой механики к моделированию психологических и социальных явлений содержатся в работах Р. Пенроуза [20,21] (за нерациональное бессознательное поведение и эмоции человека «отвечают» квантовые эффекты, происходящие на уровне функционирования биохимических процессов в мозге), А.Ю. Хренникова [22,23] (автоматические процессы в области бессознательного адекватно описываются тем же математическим аппаратом неархимедова анализа, что и квантовые процессы). Кроме того, в работе [24] И.М. Фейгенберг и И.В. Гуревич в явном виде указывают на схожесть психологических процессов и квантовых феноменов микромира: «...может оказаться, что и в психологии, так же как и в микрофизике, существует интерференция амплитуд вероятностей». Всестороннему анализу современных взглядов на фундаментальные ограничения «механистического» подхода к моделированию информационных процессов порождаемых индивидуальным и групповым сознанием, а также критике данных ограничений посвящены работы [25, 26].

Однако если идеи Р. Пенроуза по-прежнему не имеют широкой доказательной базы (что, по нашему мнению, связано с чрезвычайной сложностью установления взаимосвязей между различными процессами в мозге и сознанием), то исследования по применению квантовой теории к описанию психологических аспектов для различных задач ПР испытывают в мире большой подъем. Об этом свидетельствует рост числа монографий, см.

напр., [11, 12, 27-30] , специальных выпусков журналов [31], оригинальных работ, ставящих целью объяснение противоречий, обусловленных квантовой теорией ПР [32-37].

В такой интерпретации мозг человека представляет собой некий «черный ящик», когнитивные свойства которого определяются «на выходе» не булевой логикой ПР и зависят от контекста ПР. Именно свойство квантовой теории в части зависимости от контекста - способа проводимых измерений позволяет ее применять для объяснения психологии ПР. А именно, в [12, 27], было обращено внимание на то, что квантовые вероятностные подходы могут оказаться полезными для моделирования суждений и решений на фундаментальные ограничения, связанные с так называемыми «когнитивными искажениями». Как показали Тверски и Канеман (Нобелевская премия по экономике 2002), такие «когнитивные искажения» (коих десятки и сотни) связаны с ПР человеком в условиях неполной информации и являются по сути навязанными заблуждениями (например, известный «парадокс» с Линдой) [38]. Однако, именно данное их свойство выглядит чрезвычайно актуальным в настоящее время Интернета и сетевых технологий. Действительно, в условиях ограниченности во времени, неопределенности информации, люди как и агенты ПР во «всемирной паутине», подвержены внешнему информационному влиянию и манипулированию и оказываются наиболее склонными к нерациональным решениям.

Описание когнитивного состояния агента ПР в рамках квантовой теории ПР представляется вектором  $|\Psi\rangle$  в Гильбертовом пространстве. Для достижения (принятия) некоторого (целевого) решения  $R$  агент ПР пребывает в неопределенности, в связи с существованием двух взаимоисключающих альтернатив  $C_1$  и  $C_2$ . В физическом эксперименте (см. рис.1(a)) этому соответствуют две щели  $C_1$  и  $C_2$ , через которые проходит частица, оставляя на экране след в точке  $R$ . Если быть более точным, контекст эксперимента на рис.1(a) подразумевает выявление волновых свойств частицы: щели  $C_1$  и  $C_2$  являются источниками вторичных волн, которые интерферируют между собой в точке  $R$ .

До момента принятия решения (измерения) агент ПР может прийти к решению двумя путями:  $|\Psi\rangle \rightarrow |C_1\rangle \rightarrow |R\rangle$ , а также  $|\Psi\rangle \rightarrow |C_2\rangle \rightarrow |R\rangle$ , которым соответствуют амплитуды  $\psi_1 \equiv \langle R|C_1\rangle \langle C_1|\Psi\rangle$  и  $\psi_2 \equiv \langle R|C_2\rangle \langle C_2|\Psi\rangle$ , соответственно. В таком случае по правилу Борна принцип суперпозиции позволяет для комплексной амплитуды перехода из начального в конечное состояние, то есть  $|\Psi\rangle \rightarrow |R\rangle$ , написать выражение

$$\langle R|\Psi\rangle = \langle R|C_1\rangle \langle C_1|\Psi\rangle + \langle R|C_2\rangle \langle C_2|\Psi\rangle. \quad (1)$$

Аналогично сложению амплитуд волновых процессов в физике (рис.1 (a)), такое описание принятия решений позволяет неразрешённым когнитивным альтернативам интерферировать, создавая отклонения от классической теории

вероятности, соответствующей рациональной булевой логике. В результате вероятность  $p \equiv |\langle R | \Psi \rangle|^2$  принятия решения  $R$  будет определяться с помощью (1) как

$$p = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2 \operatorname{Re}[\psi_1 \psi_2^*] = p_1 + p_2 + 2\sqrt{p_1 p_2} \cos[\theta], \quad (2)$$

где  $p_j \equiv |\psi_j|^2$ ,  $j=1,2$  – вероятности принятия решений по этим двум альтернативам по отдельности.

Таким образом, неотъемлемой картиной квантового описания является наличие разности фаз  $\theta$ , величина которой определяется эмпирически в когнитивных экспериментах [37]. Фактически, именно наличие этой фазы определяет не булевский характер ПР, что было продемонстрировано на множестве когнитивных экспериментов, «нарушающих» рациональность мышления, ср. с [39-41]. Более того, как показано нами в [42] нарушение такой рациональности закономерно: а именно, в схожих условиях люди принимают аналогичные, нерациональные (с классической точки зрения) решения. В частности, об этом свидетельствует поведение фазового параметра  $\theta$ , который при анализе схожих когнитивных экспериментов (т.е. проведенных в определенном контексте) демонстрировал инвариантность.

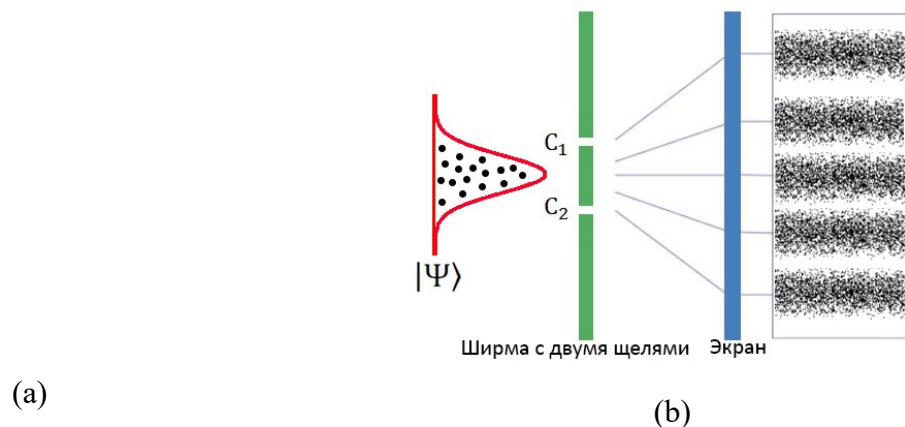


Рис.1. Двухщелевой эксперимент как физический аналог интерференции когнитивных траекторий  $|\Psi\rangle \rightarrow |C1\rangle \rightarrow |R\rangle$ , и  $|\Psi\rangle \rightarrow |C2\rangle \rightarrow |R\rangle$  при (а) – индивидуальном и (б) – коллективном уровнях принятия решений. Квантовое состояние  $|\Psi\rangle$  описывает в (а) одного субъекта ПР (в физике – ему соответствует волна, создаваемая одной частицей), а в (б) – некоторое сообщество агентов ПР, объединенных определенными признаками. В физике им соответствует большой **когерентный** волновой пакет, состоящий из отдельных (сфазированных) волн, характеризующих макроскопически большое число частиц, которые в результате и формируют интерференционную картину, изображенную на (б) справа.

Таким образом, следуя результатам многочисленных когнитивных экспериментов, нам остается с необратимостью принять, что психика человека, подобно квантовой частице, обладает своего рода корпускулярно-волновым дуализмом, который может быть выявлен, аналогично квантовой механике – в экспериментах с интерференцией (или дифракцией). Интересно заметить, что такое, на первый взгляд, парадоксальное утверждение, перестает казаться

таковым если вспомнить, что концепция принципа дополнительности Бора, была, по сути, заимствована у известного психолога Уильяма Джеймса (см., например, [43]).

Заметим также, что помимо нарушения «принципа рационального решения» агентом ПР, существует множество примеров в социальных науках, психологии, экономике, финансах, где применение классической (Колмогоровской) теории вероятностей выглядит громоздким и сложно интерпретируемым ввиду колоссального числа параметров (критериев) системы («степеней свободы»). В частности, явления, такие как эффект конъюнкции, эффекты порядка, также хорошо описанные в литературе по ПР, и отражают существенное нарушение булевой логики [37, 38]. Они могут быть описаны в рамках квантового подхода, и в более общем случае – квантовой логики, которая не дистрибутивна и ее можно реализовать вполне на макро-уровне [44, 45].

## ***2. Квантовоподобные явления на коллективном (социальном) уровне ПР***

Выявление квантовых (или, точнее – квантовоподобных, волновых) эффектов на социальном уровне, когда определенное решение (или их совокупность) принимается определенным сообществом людей в результате их «взаимодействия» является естественным продолжением научной парадигмы использования квантового аппарата для описания современных процессов в социуме. Исследование различных контекстно зависимых аспектов взаимодействия (кооперации) между агентами ПР, моделирование информационного сетевого пространства со взаимодействующими агентами ПР на его основе представляет из себя здесь чрезвычайно актуальную и важную научную задачу. В данной работе мы не будем касаться всех аспектов этой проблемы, а укажем лишь на некоторые, наиболее важные.

На рис. 1(б) изображен тот же эксперимент (контекст), что и на рис.1(а), только с источником большого числа частиц. В результате на экране мы получаем интерференционную картину, специфика которой заключается в том, что существуют области, куда частицы практически не попадают в силу деструктивной интерференции, и, наоборот, есть области, где наблюдается интерференционный максимум: в этих направлениях скапливается большое число частиц, то есть происходит своего рода усиление.

В квантовой физике эксперимент на рис.1(б) может быть поставлен с помощью лазерного источника излучения, или, так называемого Бозе-Эйнштейновского конденсата (БЭК), для которого все частицы (атомы) находятся в одном макроскопическом состоянии, т.е. описываются *одной* большой волной. В социальных науках этому соответствуют социальные

сообщества, объединенные определенным числом признаков. Чем больше этих признаков, тем более сфазированными выглядят их когнитивные состояния, проявляющиеся в принятии тех или иных решений. Точнее говоря, и в том, и другом случае мы имеем дело с когерентными волновыми пакетами, содержащими макроскопически большое число частиц [46].

Выявление макроскопической когерентности для социальных сообществ, состоящих из субъектов ПР – дело сложное и требует изучения коллективного поведения различных социальных групп в сетях Интернет.

Надо сказать, что двухщелевой эксперимент не является единственно возможным проявлением волновых свойств частиц в квантовой физике. В этой связи можно отметить так называемые квантовые блуждания, при которых явление квантовой интерференции также является определяющим. В отличие от традиционного двухщелевого эксперимента, случайные квантовые блуждания имеют несомненно, большую практическую перспективу, так как на их основе могут быть построены алгоритмы обработки информации, а также описаны процессы в сложных структурах (графах) разнообразной природы, в том числе и биологической [47, 48].

Именно задачи случайного блуждания на сложных графах делают эту проблему нетривиальной. Относительно недавно было получено, что топология структур, на которых происходят случайные блуждания, имеет самое непосредственное отношение к скорости блуждания, которая в квантовом случае потенциально должна происходить квадратично быстрее. Но в реальности блуждание классических частиц может быть эффективнее и быстрее именно с учетом топологии графа [49].

Таким образом, подводя итог вышесказанному, можно заключить, что на социальном уровне ПР важной задачей является выявление волновых свойств в распространении информации в сложных социальных структурах, каковыми являются, например, социальные сети и Интернет.

Особую элегантность, если можно так сказать, данной задаче придаёт тот факт, что сами сети формируются (растут) в определенных направлениях в результате усиления такой информации в ходе ее распространения. Точнее говоря, давно известен эффект предпочтительного соединения узлов социального графа, который означает что агенты ПР в сети присоединяются предпочтительным образом, исходя из целого ряда критериев, формируя хабы, которые пользуются высоким доверием и влиянием среди пользователей [1-3]. Интересно заметить, что при этом модификация сети, происходящая по законам фазовых переходов, как раз отражает определенные когерентные волновые свойства пользователей; здесь имеется ввиду формирование новых связей в сети по сценарию БЭК [50].

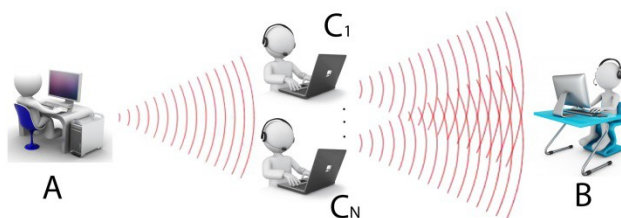
В современных информационных сообществах регулярно наблюдаются примеры спонтанного всплеска и постепенного угасания интереса большого количества людей к определенным явлениям, фактам и событиям реального и

виртуального мира. Как правило, данные процессы следуют одному и тому же сценарию: пользователи средств массовой коммуникации реагируют на информационные поводы и, в зависимости от множества факторов (включая их личный жизненный опыт), начинают испытывать негативные или позитивные эмоции. Дальнейшее развитие сценариев в реальном мире определяется совокупностью начальных условий, действующих внешних сил и стохастических факторов, однако несомненна связь таких процессов с жизненно важными областями жизнедеятельности общества и государства: политической, социальной, экономической, что обуславливает высокую актуальность исследований в области моделирования названных процессов.

При анализе сетевой активности агентов ПР, выражающейся в интенсивности публикации сообщений, ознакомлении с ними и последующим размещением в сети комментариев, можно отметить нерациональность поведения, проявляющаяся в явлении непрямого влияния в сети. Зачастую пользователи никак не реагируют на сообщения, публикуемые некоторым источником, но в тоже время комментируют или размещают у себя на странице ретвиты (репосты) исходного сообщения, полученные из других (не первоначальных) источников.

В рамках квантовой когнитивистики проявление квантовоподобных эффектов выражается в способах описания и анализа распространения информации в социальных сетях и выявления волновых эффектов в условиях непрямого информационного воздействия, (ср. с [51]). Основная идея здесь в том, что так называемая квантовая модель  $q$ -внимания должна учитывать когнитивную интерференцию акторов (агентов ПР) в сети.

На рис. 2 представлен простейший фрагмент социальной сети, представляющий собой аналог (при  $N=2$ ) физического эксперимента на рис.1. Агент ПР А посылает первоначальное сообщение агентам  $C_1$  и  $C_N$  и создает, таким образом, информационную "волну" в виде первичного волнового фронта. Затем агенты  $C_1, \dots, C_N$  транслируют сообщения агента А путем создания вторичных волновых фронтов.



**Рис. 2** Фрагмент некоторой социальной сети с непрямым информационным воздействием агента ПР А на агента ПР В;  $C_1, \dots, C_N$  – акторы сети (агенты ПР), способствующие усилению или ослаблению распространения информации на данном участке сети. При  $N=2$  имеем полный аналог двухцелевого эксперимента на рис.1.

Для двух агентов ПР  $C_1, C_2$  полная вероятность может быть рассчитана по формуле (2). Две (информационные) волны, прибывающие к агенту В,

интерферируют между собой: они могут иметь синфазные ( $\cos\theta=1$ ) или противофазные ( $\cos\theta=-1$ ) состояния, что оказывает влияние на его намерение и далее распространять информационный поток. Если возникает конструктивная интерференция, вероятность намерения агента В осуществить дальнейшее распространение сообщения агента А увеличивается, в противном случае – уменьшается.

Таким образом, при  $\cos\theta=1$  мы имеем максимальное усиление волнообразного распространения информации, обусловленное интерференцией. С физической точки зрения интерпретация данных эффектов может быть дана также в рамках модели трехуровневого атома, имеющего  $\Lambda$ -структуру энергетических состояний, облучаемого двумя световыми полями. Как показано в квантовой оптике, см. напр. [52], из-за эффектов интерференции для атомов в такой схеме могут возникать режимы усиления (лазеры без инверсии населенностей), а также эффекты электромагнитно индуцированной прозрачности, когда излучение распространяется в среде, не испытывая потерь. Такая схема, будучи перенесенная в социальную область исследований, может служить основой «просветления» сетевого сообщества при определенном распространении информации.

В настоящей работе представлены результаты проведения модельного эксперимента, целью которого являлась проверка гипотезы о квантово-подобном характере феноменов, наблюдаемых при непрямом распространении информации в социальных сетях с учётом когнитивных процессов агентов ПР. В частности, была осуществлена попытка обнаружения аналога феномена электромагнитно индуцированной прозрачности в процессах сложного информационного взаимодействия участников сетевых сообществ.

### *3. Постановка задачи модельного эксперимента*

В основу эксперимента положены модель формального представления базовых эмоций в координатном пространстве валентность-эраузал Дж. Рассела [53], модель многоагентного броуновского взаимодействия пользователей социальных сетей в информационном пространстве, а также технология автоматического анализа эмоциональной тональности текстов («сентимент-анализ») [54], адаптированная для русского языка за счёт разработки оригинального набора словарей эмоционально значимых слов и символов («смайлов»).

В ходе проведения экспериментального исследования были выполнены следующие основные этапы: получение доступа к сообщениям открытого сообщества социальной сети «ВКонтакте»; сбор и селекция исходных данных посредством официального программного интерфейса приложения (API) с применением функционально-ориентированного языка программирования высокого уровня Python; формирование априорного признакового пространства



экспериментальной модели; выявление наиболее информативных признаков и значимых факторов с формированием ортогонального базиса некоррелированных главных компонент; статистическая обработка и визуализация результатов исследования. В рамках частных сопутствующих подзадач разработаны специализированные программные модули сбора, обработки и визуализации данных из социальных сетей и сети Интернет.

Эмоциональные состояния субъектов коммуникации, описанные в координатном пространстве двух психологических переменных - валентности и эраузала [55], в рамках проведённого эксперимента интерпретировались как квантовые состояния, причём валентность соотносится с координатой, а эраузала (энергетическая психологическая переменная) – с импульсом частицы. С квантовой точки зрения две данные переменные линейно независимы, то же самое справедливо для предлагаемой концепции представления эмоциональных состояний пользователей в момент отправки сообщений в координатах «валентность-эраузала».

Главными результатами экспериментального исследования являются полученные эмпирические распределения (гистограммы) наблюдаемых признаков, характеризующие состояния акторов социальной сети (агентов ПР) в процессе непрямого распространения эмоционально окрашенной информации в социальных сетях, а также их интерпретация, подтверждающая гипотезу о квантовоподобном характере непрямого взаимодействия акторов социальной сети. В частности, продемонстрирована аналогия феномена светоиндуцированной прозрачности, известного в квантовой оптике, с существенным ослаблением восприимчивости сетевого сообщества к эмоционально нейтральным сообщениям в результате сложного информационного взаимодействия между собой и сильным информационным полем.

#### ***4. Определение параметров эксперимента***

Исключительно важным для планируемого эксперимента является обоснованное допущение о том, что эмоции индивидуальных акторов (агентов ПР) информационно-коммуникационного процесса транслируются обратно в средства массовой коммуникации и становятся, таким образом, достоянием всего сообщества пользователей информационного ресурса. Очевидно, однако, что пользователи обмениваются не самими эмоциями, а сообщениями, несущими определённую эмоциональную нагрузку и способными вызвать изменение эмоционального состояния у других пользователей, прочитавших данное сообщение. В зависимости от результата информационного воздействия, реципиент сообщения может либо принять решение включиться в коммуникацию и передать своё отношение (позитивное или негативное) другим пользователям, либо проигнорировать сообщение. При определённых условиях

описанная модель коммуникации может наблюдаться в малых группах, однако чаще подобный сценарий наблюдается в онлайн сообществах, насчитывающих тысячи пользователей. При этом субъекты коммуникации могут выражать свои эмоции однократно, регулярно-последовательно или спорадически. Возникающий при этом коллективный эмоциональный фон не всегда является однородным. Чаще наблюдается возникновение двух конкурирующих коллективных эмоций: «негативной» и «позитивной», что является отражением социокультурной неоднородности общества. Как правило, интенсивность обмена эмоциями угасает с течением времени, однако при срабатывании определённого триггера (внешнее событие или публикация нового сообщения) может наблюдаться новый всплеск.

Существует ряд важных особенностей, отличающих процессы межличностной коммуникации от общения индивидов в онлайн-сообществах. Назовём наиболее важные на наш взгляд:

1. Скорость реакции на стимулы и, соответственно, динамика эволюции эмоционального фона в средствах массовой коммуникации отличается от соответствующих показателей «традиционной» информационной среды. Часто в процессе коммуникации наблюдаются регулярные сдвиги по времени, связанные с периодичностью обновления того или иного информационного ресурса.

2. Сами стимулы, порождающие феномен коллективных эмоций в онлайн сообществах, как правило, являются специфическими (видеоролики, графические мемы и т. д.) и отличными от информационных поводов, обсуждаемых в оффлайн сообществах.

3. Существуют отличия в значении порогового уровня возбуждения, достигнув которого индивид принимает решение поделиться своей эмоцией с другими, а сама передача эмоционального состояния осуществляется, как правило, посредством размещения на информационном ресурсе текстового сообщения.

4. Анонимность общения в сети зачастую побуждает субъектов массовой коммуникации нарушать принятые в обществе нормы поведения и морали.

Теория слабых связей Грановеттера [56], многократно подтверждённая экспериментами, подчёркивает влияние многочисленных связей малой силы, наблюдаемых между членами онлайн сообществ, на скорость распространения информации. При этом поддержание виртуальных слабых связей требует от субъекта коммуникации существенно меньше усилий, чем поддержание сильных связей в реальной жизни. Специфическим объектом исследования в рамках данной работы являются так называемые базовые аффекты (в терминах работы Дж. Рассела [57]), представляющие собой элементарные («неделимые») эмоциональные состояния, которые могут быть выражены посредством текстового сообщения.

Для понимания закономерностей формирования коллективных эмоций

решалось три сопутствующие задачи:

1. Разработать формальную математическую модель обмена субъектов коммуникации эмоциями. Первым шагом на пути решения данной задачи является построение наиболее общей «классической» модели с последующим введением в неё квантовых формализмов.

2. Разработать математический аппарат для получения количественной оценки эмоционального содержания текстовых сообщений.

3. Подготовить большую обучающую выборку эмоционально окрашенных сообщений, которыми обменивались пользователи онлайн сообществ.

Необходимость разработки модели группового поведения субъектов массовой коммуникации в условиях интерактивного обмена эмоционально значимыми сообщениями в общей информационной среде обусловлена следующим противоречием: некоторые модели, например [58], позволяют формально описать только индивидуальную динамику эмоций и не учитывают эффектов взаимодействия субъектов коммуникации в общей информационной среде. Известные динамические модели предпочтений пользователей (например, [59,60]) и динамические модели индивидуальных и групповых психических процессов [61,62] в настоящее время не способны адекватно описать некоторые принципиально важные свойства эмоций, имеющие теоретическое обоснование и подтверждённые результатами экспериментальных исследований. Модели убеждения и распространения влияний [63], в свою очередь, не учитывают относительно короткий срок существования эмоциональных состояний, их нерациональность, нелинейную зависимость от внешних и внутренних факторов, в том числе имеющих стохастическую природу. Отдельные вычислительные модели [56,64], способны довольно точно воспроизводить динамику макроскопических показателей коллективных эмоций в онлайн сообществах, однако практически непригодны для аналитической интерпретации полученных результатов. Кроме того, значительная часть таких моделей имеют исключительно умозрительный характер и основаны на гипотезах, не имеющих достаточно прочного теоретического обоснования в психологии и социологии. Частные модели, разработанные для конкретных онлайн сообществ (Twitter, Instagram, Facebook), имеют сильную привязку к механизмам информационного взаимодействия членов этих конкретных сообществ и не обладают достаточным уровнем универсальности.

Выбор социальной сети как объекта экспериментального исследования был обусловлен наличием в сетевых сообществах подобного рода непрямого взаимодействия пользователей между собой и «информационным полем», приводящего к возникновению сложных феноменов коллективных эмоций, а также политикой конфиденциальности, ср. напр. с [65]. В качестве инструмента доступа к ресурсам сети «ВКонтакте» выбран модуль (библиотека) *vk* для языка программирования Python, представляющая собой фронтенд для официального

API Вконтакте.

Разработанная модель формирования коллективных эмоций основана на концепции броуновского взаимодействия между агентами [66] в биологических и социальных системах. Данный подход позволяет формализовать динамику коллективных эмоций в фазовом пространстве посредством применения математического аппарата, хорошо зарекомендовавшего себя в области статистической физики.

Пусть моделируемая система состоит из  $N$  взаимодействующих агентов. Броуновский агент может быть описан набором переменных состояния  $u_i^k$ , где  $i = 1, \dots, N$  — номер агента, а  $k$  — номер соответствующей переменной. Переменные состояния могут быть представлены как внешними (то есть доступными для наблюдения) параметрами, так и внутренними степенями свободы, оценка которых возможна лишь по косвенным признакам. Значения переменных (как внешних, так и внутренних) могут изменяться с течением времени, либо вследствие внешних воздействий среды, либо в силу внутренней динамики. Таким образом, в наиболее общем виде динамика изменения переменных состояний может быть описана следующим уравнением:

$$\frac{d u_i^k}{d t} = f_i^k + F_i^{stoch}. \quad (3)$$

Уравнение (3) является отражением принципа причинности: любое изменение состояния агента  $PR$  во времени обусловлено воздействием некоторой совокупности факторов. Для концепции броуновского взаимодействия агентов за основу принято следующее допущение: всякое изменение состояния может быть описано как суперпозиция детерминированного и стохастического воздействия на агента  $i$ . Данное допущение, в свою очередь, базируется на гипотезе Ланжевена относительно описания Броуновского движения.

Таким образом, совокупность ненаблюдаемых воздействий описывается обобщенным стохастическим компонентом  $F_i^{stoch}$ , а совокупность детерминированных воздействий представлена компонентом  $f_i^k$ . При этом стохастическая составляющая вовсе не обязательно должна обладать характеристиками белого шума. Напротив, весьма вероятно присутствие и даже доминирование в ней окрашенных и мультипликативных шумов. Значимость влияния стохастической компоненты на конкретную переменную состояния может варьироваться для различных агентов. Влияние на неё могут оказывать как внешние параметры среды, так и внутренние степени свободы агента. Детерминированная составляющая  $f_i^k$  объединяет все поддающиеся наблюдению и моделированию факторы, которые способны вызвать изменение переменной состояния  $u_i^k$ . К ним может относиться взаимное влияние агентов друг на друга, имеющее нелинейный характер, поэтому в общем случае  $f_i^k$  может быть функцией от всех переменных состояния, описывающих

любого агента, включая агента  $i$ .

Однако, в соответствии с предложенной концепцией, детерминированный компонент  $f_i^k$  должен позволять моделировать результат воздействия на агента со стороны внешней информационной среды, а также реакцию агента на поступившую информацию. Помимо этого, компонент  $f_i^k$  должен отражать внутреннюю динамику эмоций агента, заключающуюся в постепенном затухании значений переменных состояния вследствие достижения эмоционального насыщения или истощения. Для того, чтобы описать моделируемую многоагентную систему, нам необходимо в явном виде указать переменные состояния  $u_i^k$  и динамические законы их изменения с течением времени  $f_i^k$ . При этом следует подчеркнуть, что эмерджентность, проявляющаяся в возникновении феномена коллективных эмоций, порождается не на макроскопическом уровне, а исключительно на «микроскопическом» уровне индивидуальных агентов вследствие их многократного взаимодействия между собой. Для представления состояния агента  $i$  будем использовать две линейно независимые переменные: валентность  $v_i(t)$  и эраузал  $a_i(t)$ , которые задают двумерное фазовое пространство (плоскость) эмоций. Значение валентности отражает позитивный или негативный характер эмоции, а эраузал – уровень активности (возбуждения), порождаемой конкретной эмоцией. Таким образом, эмоциональное состояние агента  $e(t)$  в любой момент времени может быть указано парой координат на плоскости:  $e(t) = \{v_i(t), a_i(t)\}$ . Например, «восхищение» – это состояние, при котором значения эраузала и валентности положительны; «удовлетворённость» – комбинация положительной валентности и отрицательного эраузала; «депрессия» – крайнее проявление отрицательных значений эраузала и валентности; «раздражение» – сочетание отрицательной валентности и положительного эраузала и так далее (рис. 3).

Подчеркнём, что обе переменные ( $v_i(t)$  и  $a_i(t)$ ) описывают внутреннюю динамику состояний агента, не доступны для непосредственного наблюдения и могут быть оценены только по косвенным признакам, например, посредством тестирования или психофизиологического обследования.

В рамках разрабатываемой модели примем в качестве допущения, что при отсутствии внешних возбудителей эмоциональное состояние агента с течением времени стремится к нейтральному равновесному состоянию:

$$e_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \text{ т.е. } v_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, a_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

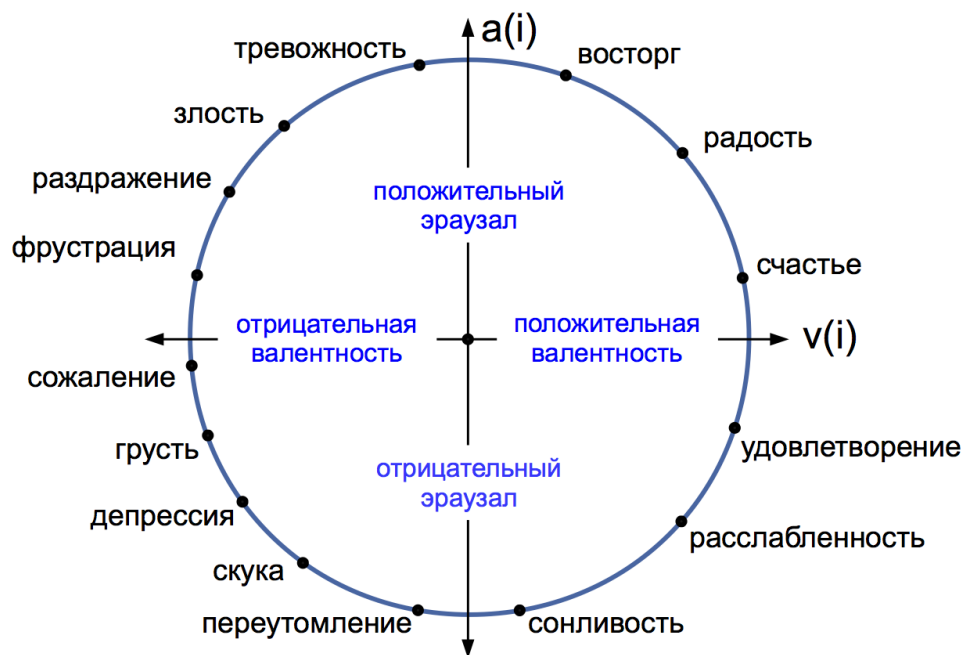


Рис.3 Условное представление различных эмоциональных состояний в координатном пространстве валентность-эраузал

Тогда уравнение (3) может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= -\gamma_{vi} v_i(t) + F_v + A_{vi} \xi_v(t), \\ \dot{a}_i &= -\gamma_{ai} a_i(t) + F_a + A_{ai} \xi_a(t) \end{aligned} \quad (4)$$

где коэффициенты  $\gamma_{vi}$  и  $\gamma_{ai}$ , характеризуют скорость экспоненциального затухания значений валентности и эраузала соответственно для  $i$ -го агента при отсутствии внешних раздражителей;  $F_v$  и  $F_a$  – детерминированные компоненты динамики валентности и эраузала;  $\xi_v(t)$  и  $\xi_a(t)$  – стохастические значения валентности и эраузала;  $A_{vi}$  и  $A_{ai}$  – весовые коэффициенты, отражающие степень влияния стохастических факторов на значения валентности и эраузала  $i$ -го агента. Конкретный вид аналитических выражений, моделирующих детерминированные компоненты  $F_v$  и  $F_a$ , зависит от множества допущений, сделанных нами относительно как внешних факторов (таких, например, как процессы взаимодействия агентов и процедуры их доступа к информационному пространству), так и внутренних (уровень эмпатии агентов в сообществе, активность обмена информацией и прочее). Однако представляется справедливым, что в наибольшей степени данные компоненты должны зависеть от эмоциональных состояний самих агентов. Иными словами, те агенты, которые уже находятся в определённых эмоциональных состояниях, должны демонстрировать более сильную реакцию на эмоционально окрашенные сообщения (того же или противоположного знака), поступившие от других пользователей. Прежде чем подробно рассмотреть вид функций  $F_v$  и  $F_a$ , нам следует расширить описание информационной активности агентов.

В случае, если совокупное влияние детерминированной и стохастической компонент настолько мало, что им можно пренебречь, динамика

эмоциональных состояний, определяемая (4), подразумевает наличие стационарного состояния  $e_i(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . Однако если агент получает из внешней среды эмоционально значимую информацию то детерминистская и стохастическая компоненты уравнения (4) могут компенсировать естественное затухание абсолютных значений валентности и эраузала, а в ряде случаев приводят к их скачкообразному увеличению. В этом случае агент переходит в возбуждённое состояние, которое, однако, не является наблюдаемым до тех пор, пока агент не проявит данный факт посредством публикации сообщения в средствах массовой коммуникации.

Иными словами, гипотеза заключается в том, что агент косвенным образом демонстрирует текущее значение переменной валентности (т.е. своё позитивное или негативное отношение к чему-либо) лишь в тех случаях, когда значение эраузала превышает некоторое пороговое значение  $\tau_i$ , индивидуальное для каждого агента. В целях упрощения дальнейших рассуждений, будем исходить из допущения, что, если пороговое значение эраузала достигнуто, то агент в своем сообщении передаёт лишь часть информации о своём эмоциональном состоянии, а именно – знак валентности  $v_i$  (+1 или -1):

$$s_i(t + \delta t) = \text{sign}(v_i(t)) \Theta[a_i(t) - \tau_i] \quad (5)$$

где  $\Theta[a_i(t)]$  – оператор Хевисайда от переменной эраузала, который принимает значение 1, если  $a_i \geq 0$  и 0 – в остальных случаях.

Введённое допущение о бинарном характере проявляемых значений валентности не ведёт к потере общности следующих рассуждений и является необходимым с практической точки зрения для проведения экспериментальных исследований и программной реализации динамической модели коллективных эмоций, поскольку современные методы оценивания эмоциональной содержания текстов на естественном языке (технологии сантимент анализа) все ещё находятся в состоянии разработки и не обладают достаточной точностью при применении сложных шкал. По мере совершенствования технологий оценивания эмоциональной тональности текста, вместо качественной дихотомической порядковой шкалы вполне может быть использована количественная интервальная шкала оценок. Уравнение (5) также отражает тот факт, что агент не демонстрирует изменение своей валентности посредством публикации в средствах массовой коммуникации непосредственно в момент, когда значение эраузала превышает некое индивидуальное пороговое значение. Чаще между данным событием и публикацией сообщения наблюдается временная задержка  $\Delta t$ , которая может быть обусловлена такими причинами как, например, отсутствие доступа к средствам передачи информации или высокая загруженность текущими делами. Очевидно, что должна существовать зависимость между субъективной значимостью эмоции и длительностью задержки (чем эмоции сильнее, тем меньше задержка). Исходя из результатов известных исследований по определению закона распределения времени задержки между возникновением потребности (постановкой задачи) и началом

ее реализации в различных видах человеческой деятельности (например, при ответе на электронные письма), мы можем предположить, что случайная величина  $\Delta t$  распределена по степенному закону  $P(\Delta t) \propto \Delta t^{-\alpha}$ , где параметр  $\alpha$  должен быть определен эмпирическим путем.

Из выражения (5) мы можем вывести оценку количества публикаций эмоционально окрашенных сообщений за данный промежуток времени как

$$N_s(t) = \sum_i \Theta[a_i(t) - \tau_i] \quad (6)$$

В случае непрерывного времени, среднее количество таких сообщений за заданный интервал времени может быть получено в виде:

$$n_s(t) = \frac{1}{t_{end}} \int_0^{t_{end}} N_s dt \quad (7)$$

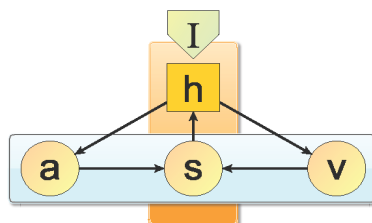
Таким образом, мы описали внутреннюю динамику эмоций отдельно взятого агента, которая приводит к внешне наблюдаемому проявлению эмоционального состояния через публикацию сообщения в сетевом сообществе. Для того, чтобы перейти к моделированию коллективных эмоций, необходимо формально описать процесс взаимодействия этого сообщения с другими агентами, действующими в общем информационном пространстве. Следуя результатам исследования [66], будем считать, что сообщения, имеющую позитивную или негативную эмоциональную окраску, формируют, в соответствии со знаком своей валентности, информационные поля  $h_+(t)$  и  $h_-(t)$ . Совокупность этих полей  $h_{\pm}$  образует коммуникационную среду, в которой происходит обмен эмоциональными сообщениями между авторами и читателями блогов, участниками форумов и так далее. Пусть публикация сообщения  $s_i(t)$  каждым из агентов увеличивает значение  $h_+$  или  $h_-$  на фиксированное значение  $s$  в промежуток времени  $t$ . Также примем в качестве допущения, что значимость и мера влияния сообщения на других агентов убывает с течением времени (то есть, например, старые сообщения в блоге вызывают меньший эмоциональный отклик у подписчиков, чем недавно размещённые). Наконец, на динамику информационного поля могут оказывать влияние внешние факторы, имеющие, в общем случае, стохастическую природу. Тогда динамика количества сообщений, имеющих положительную и отрицательную окраску, в нашей модели может быть описана следующим аналитическим выражением:

$$\dot{h}_{\pm} = -\gamma_{\pm} h_{\pm}(t) + s N_{\pm}(t) + I_{\pm}(t), \quad (8)$$

где  $\gamma$  – коэффициент затухания эмоциональной значимости сообщения;  $N_{\pm}(t)$



– совокупное количество агентов, оставивших положительные или отрицательные сообщения в промежуток времени  $t$ ;  $I_{\pm}(t)$  – влияние стохастических факторов на соответствующее информационное поле. Схематичное изображение связей между основными элементами разработанной многоагентной модели представлено на рис. 4.



*Рис. 4. Связи между основными элементами разработанной многоагентной модели коллективных эмоций*

Отметим, что представленную модель можно условно разделить на два слоя: внутренний слой, отражающий динамику изменения переменных агента (на рисунке изображен горизонтально) и внешний слой, описывающий непосредственно процесс коммуникации (изображен вертикально). На внутреннем слое психологические переменные (эраузал и валентность) определяют наличие и знак тональности сообщения  $s$ , которое достигает внешнего слоя посредством публикации в информационном поле  $h$ . Поле  $h$ , в свою очередь обладает собственной динамикой (см. (8)) и подвержено влиянию внешних стохастических факторов  $I$ . Замыкание причинно-следственных связей модели происходит за счет наличия обратного воздействия информационного поля  $h$  на валентность и эраузал каждого агента.

Для получения количественных оценок значений скрытых психологических переменных (валентности и эраузала) сообщений, оставляемых пользователями сообщества социальной сети, на главной странице и в комментариях к публикациям, была применена технология sentiment-анализа, а также стороннее ПО *SentiStrength*, реализующее данную технологию. Адаптация методики sentiment-анализа для русского языка потребовала разработки собственного набора словарей эмоционально значимых слов и символов («смайлов») с количественной оценкой валентности по каждому из входящих в словари объектов. Всего было разработано три словаря: словарь слов-усилителей, общий словарь эмоционально значимых слов и словарь «смайлов». Для оценивания валентности (положительной или отрицательной) была использована пятибалльная шкала, где оценка «-5» соответствует крайне негативному отношению пользователя, а «+5» — крайне позитивному. Примеры разработанных словарей представлены на рис. 5.

EmotionLookupTable	BoosterWordList.txt	EmoticonLookupTable.t
говн* -2	был -1	:) 1
гомофоб* -3	гребан -3	:-) 1
горд* 3	действительно 1	:* 3
гордел* -3]	делал 1	:-* 1
горест* -3	должен -1	:-* 1
горяченн* -3	должн -1	:*( -1
горячност* 3	еще -2	:( -1
гребанн* -2	замечательно 1	:/ -1
гребанн* -2	значит 1	:-/ -1
грех* -4	иногда -1	:-/ 0
греш* -4	исключительно 2	:-@ -1
грози* -2	искренне 2	:[ -1
грозн* -3	итого 1	:[ -1
грознящ* -3	крайне 3	:\ -1
груб* -3	миленько 3	:-\ -1
	мог 1	

Рис. 5. Словари, используемые в процедуре оценивания эмоциональной тональности текстовых сообщений

Для обоснованного применения методов машинного обучения, интеллектуального анализа данных и сентимент-анализа требовалось обеспечить сбор 103 –104 текстовых сообщений и комментариев к ним, публикуемых пользователями на страницах сообществ в социальных сетях. Всего по итогам проведения экспериментального исследования анализу подвергнуто 2246 сообщений на главной странице («стене») сообщества «Мировая политика» (id сообщества -50377583, адрес: [https://vk.com/world\\_policy](https://vk.com/world_policy)), опубликованных в период с 04.12.2017 г. по 10.06.2018 г., а также 50326 комментариев к ним (с 04.12.2017 г. по 11.06.2018 г.). Длина анализируемого текста для каждого сообщения или комментария ограничивалась 500 символами в силу технических ограничений стороннего программного обеспечения SentiStrength, а также с целью борьбы с возможным «переобучением» автоматических классификаторов, генерируемых в ходе применения методов интеллектуального анализа данных. Для удобства последующего анализа, обеспечения воспроизводимости полученных результатов эксперимента и возможного применения собранных исходных данных в последующих исследовательских проектах, было принято решение сохранять данные и результаты их первичной обработки в базе данных формата SQLite. Общая структура сформированной базы данных представлена на рис. 6.

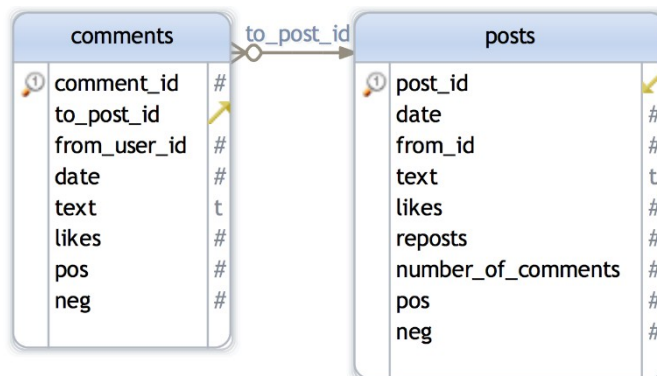
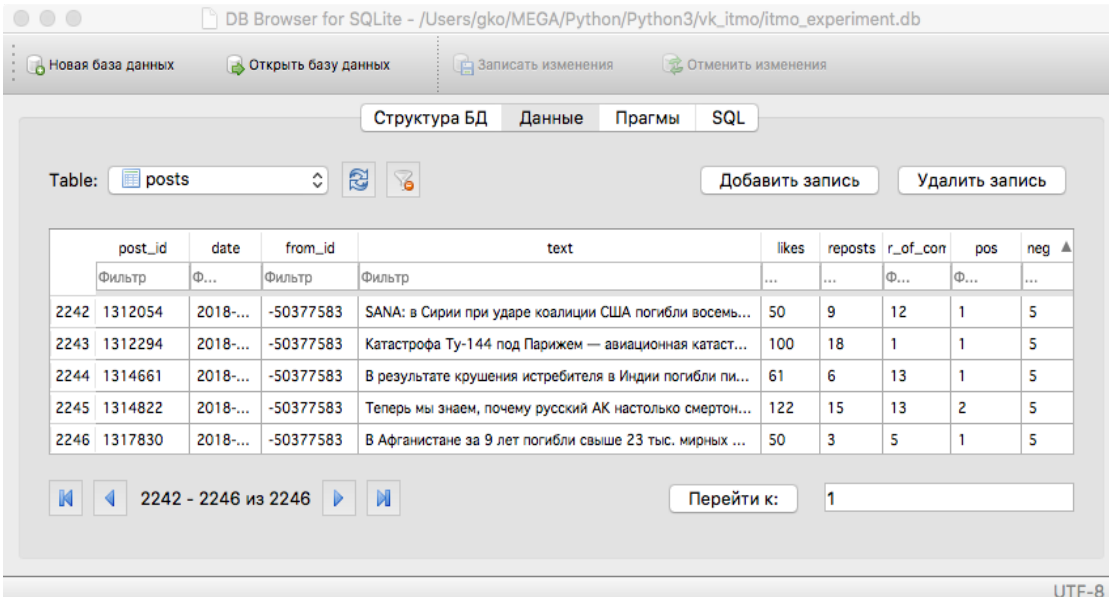


Рис. 6. Структура базы данных SQLite, использованной в эксперименте

Таблица posts базы данных SQLite, содержащая обработанные сообщения со страницы сообщества «Мировая политика» и результаты их сентимент-анализа, представлена на рис. 7.

Столбцы таблицы posts имеют следующие значения: post\_id –уникальный идентификационный номер сообщения на «стене» сообщества; date – дата и время публикации сообщения; from\_id – уникальный идентификационный номер отправителя сообщения (для постов на «стене» – идентификационный номер группы сообщества «Мировая политика» –50377583); text – текст сообщения, очищенный от xml и html тегов; likes –количество «лайков», собранных сообщением; reposts – количество «репостов», number\_of\_comments – количество комментариев к сообщению; pos – количественная оценка позитивной составляющей тональности сообщения (по шкале от 1 до 5), вычисленная на основе применения ПО SentiStrength; neg – количественная оценка негативной составляющей тональности сообщения (по шкале от 1 до 5).



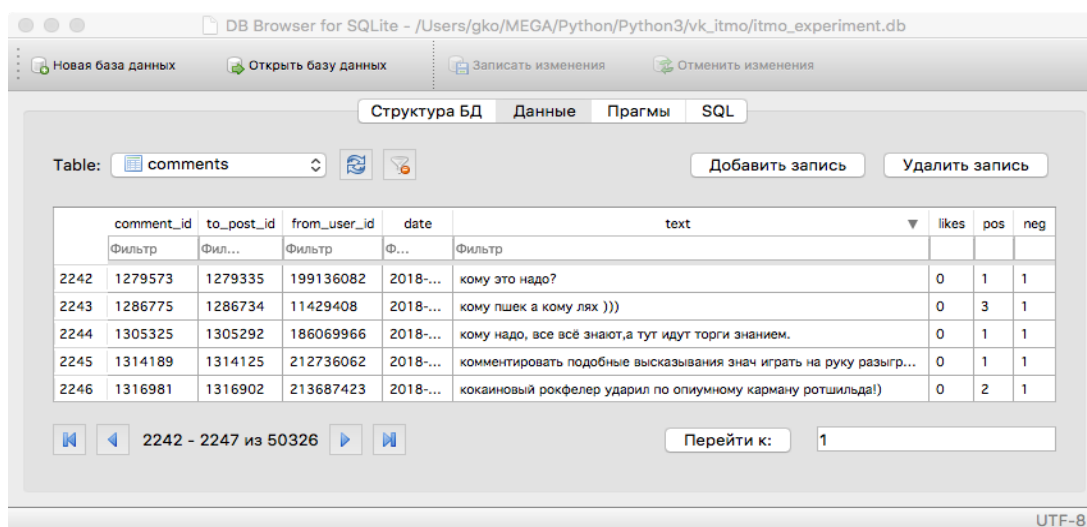
post_id	date	from_id	text	likes	reposts	r_of_con	pos	neg	
2242	1312054	2018-...	-50377583	SANA: в Сирии при ударе коалиции США погибли восемь...	50	9	12	1	5
2243	1312294	2018-...	-50377583	Катастрофа Ту-144 под Парижем — авиационная катаст...	100	18	1	1	5
2244	1314661	2018-...	-50377583	В результате крушения истребителя в Индии погибли пи...	61	6	13	1	5
2245	1314822	2018-...	-50377583	Теперь мы знаем, почему русский АК настолько смертон...	122	15	13	2	5
2246	1317830	2018-...	-50377583	В Афганистане за 9 лет погибли свыше 23 тыс. мирных ...	50	3	5	1	5

Рис. 7. Таблица posts базы данных SQLite, содержащая обработанные сообщения со страницы сообщества «Мировая политика» и результаты их сентимент-анализа

Необходимо особо отметить, что, в соответствии с методикой, изложенной в работе [59], для каждого сообщения одновременно оценивалось обе составляющих тональности сообщения: позитивная и негативная, что является отражением эллипсности естественного языка и невозможности точно зафиксировать эмоциональное состояние как в результате внешнего наблюдения, так и в результате рефлексии (например, словосочетание «геройская смерть» несёт в себе как негативную (смерть), так и позитивную (геройская) компоненты. Вне контекста практически невозможно дать точную оценку тональности данного сообщения одной переменной).

Таблица `comments` базы данных SQLite, содержащая обработанные комментарии к сообщениям со страницы сообщества «Мировая политика» и результаты их сентимент-анализа, представлена на рис. 8.

Столбцы таблицы `comments` имеют следующие значения: `comment_id` – уникальный идентификационный номер комментария; `to_post_id` – уникальный идентификационный номер сообщения, к которому адресован комментарий; `from_user_id` – уникальный идентификационный номер пользователя, разместившего комментарий; `date` – дата и время публикации комментария; `text` – текст комментария, очищенный от `xml` и `html` тегов; `likes` – количество «лайков», собранных комментарием;



comment_id	to_post_id	from_user_id	date	text	likes	pos	neg	
2242	1279573	1279335	199136082	2018-...	кому это надо?	0	1	1
2243	1286775	1286734	11429408	2018-...	кому пшек а кому лял )))	0	3	1
2244	1305325	1305292	186069966	2018-...	кому надо, все всё знают, а тут идут торги знанием.	0	1	1
2245	1314189	1314125	212736062	2018-...	комментировать подобные высказывания знач играть на руку разыгр...	0	1	1
2246	1316981	1316902	213687423	2018-...	кокаиновый рокфелер ударил по опиумному карману ротшильда!	0	2	1

*Рис. 8. Таблица `comments` базы данных SQLite, содержащая обработанные комментарии пользователей и результаты их сентимент-анализа*

`pos` – количественная оценка позитивной составляющей тональности комментария (по шкале от 1 до 5), вычисленная на основе применения ПО SentiStrength; `neg` – количественная оценка негативной составляющей тональности комментария (по шкале от 1 до 5).

## 5. Обработка данных и анализ результатов эксперимента

Как было указано во Введении, целью проведения модельного эксперимента являлась проверка гипотезы о квантовоподобном характере процессов, происходящих при непрямом распространении информации в социальных сетях с учетом когнитивных процессов их акторов. Дополнительной целью являлась проверка адекватности аналогии между эффектами, наблюдаемыми в ходе непрямого информационно-эмоционального взаимодействия пользователей социальных сетей и интерференционной картиной, получаемой в ходе широко известного в квантовой физике

эксперимента с двумя щелями.

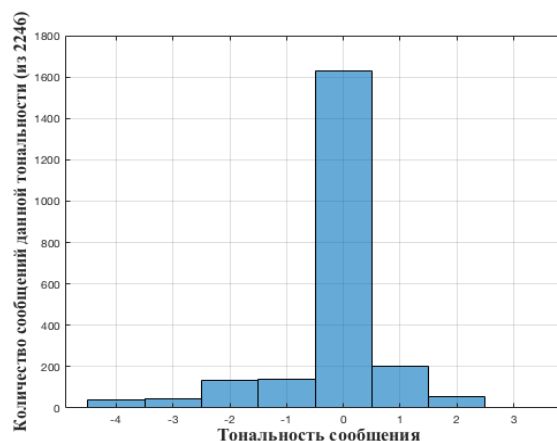
Интерференция или эксперимент с двумя щелями (см. рис.1), согласно Фейнману, «заключает в себе сердце квантовой механики» и является квинтэссенцией принципа квантовой суперпозиции. Принцип интерференции как основной принцип волновой оптики впервые был сформулирован в 1801 году Т.Юнгом. Ученый так наглядно поясняет открытый им принцип (эксперимент, известный в наше время под названием «двухщелевой эксперимент Юнга»): «для получения эффектов наложения двух порций света необходимо, чтобы они исходили из одного источника и приходили в одну и ту же точку по разным путям, но по близким между собой направлениям». В рамках рассматриваемой аналогии интерференционная картина сложных коллективных эмоций формируется в результате прохождения одного и того же (априори эмоционально нейтрального) информационного сообщения, размещаемого на «стене» сообщества через когнитивные каналы пользователей, опосредованно взаимодействующих между собой и оказывающих влияние на эмоциональное состояние других пользователей.

Важным элементом данного эксперимента является тот факт, что акторы сети, которые регулярно читают сообщения на стене конкретного сообщества, уже являются некоторым образом «сфазированными», т.к. объединены признаками этого сообщества.

В ходе планирования эксперимента было сделано предположение о том, что сообщения на стене сообщества социальной сети, в отличие от пользовательских комментариев к ним, несут, в первую очередь, информационную нагрузку и имеют в большинстве своём нейтральную эмоциональную окраску. Исходя из выдвинутого предположения, для первичного анализа полученных в ходе экспериментального исследования результатов были вычисленные усреднённые оценки тональности сообщений, размещённых на стене сообщества «Мировая политика». Для этого значения оценок положительной составляющей были просуммированы с оценками негативной составляющей тональности, взятыми со знаком минус. Результаты вычислений представлены в виде гистограммы на рис. 9.

Далее для анализа корреляционных зависимостей между полученными числовыми характеристиками и обоснованного сокращения размерности признакового пространства к данным таблицы posts применён метод главных компонент (МГК). При этом осуществлена проверка на выполнение необходимых условий применения МГК:

- все признаки должны быть количественными, поэтому матрица исходных данных составлена из столбцов (5-9 таблицы posts);
- число наблюдений должно быть не менее чем в два раза больше числа переменных;
- выборка должна быть однородна;
- исходные переменные должны быть распределены симметрично.



*Рис. 9. Гистограмма результатов оценок тональности сообщений постов сообщества «Мировая политика» за период с 04.12.2017 г. по 10.06.2018 г.*

Для обеспечения выполнения последнего условия для данных выполнена процедура  $z$ -стандартизации (приведение данных к центрированным нормированным значениям) по формуле:  $z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$ , где  $\bar{x}$  выборочное среднее,  $\sigma$  — оценка среднеквадратического отклонения. Строкам матрицы исходных данных соответствуют наблюдения, столбцам — переменные. Полученная по итогам вычислений, матрица коэффициентов (факторных нагрузок) представлена в таблице 1.

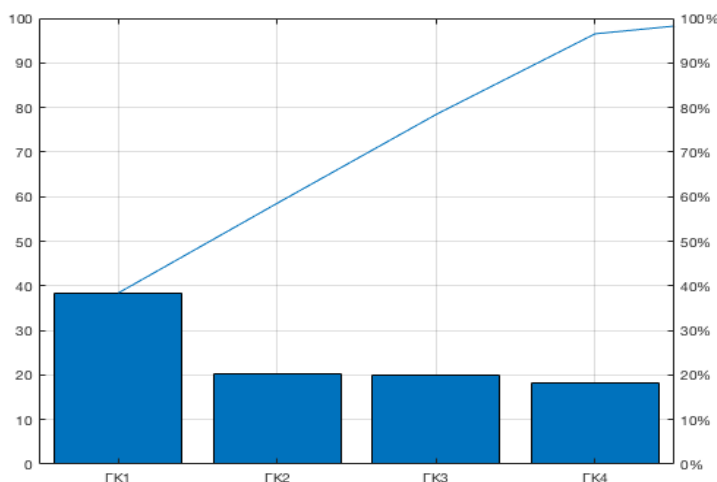
*Таблица 1. Матрица факторных нагрузок, полученная по итогам применения метода главных компонент*

Исходные переменные	Главные компоненты				
	1	2	3	4	5
1	<b>0,6706</b>	-0,0787	-0,1096	-0,1874	-0,7050
2	<b>0,6732</b>	-0,1051	-0,0894	-0,1600	<b>0,7086</b>
3	0,2913	0,2841	0,1251	<b>0,9047</b>	-0,0146
4	0,1056	<b>0,6065</b>	<b>0,7184</b>	-0,3237	0,0072
5	-0,0319	<b>0,7309</b>	-0,6695	-0,1263	0,0257

Столбцам матрицы факторных нагрузок соответствуют главные компоненты (в порядке значимости вклада в описываемую дисперсию), строкам — исходные переменные. Полученный базис является строго ортонормированным, в чем можно убедиться, путем умножения полученной матрицы коэффициентов на себя же транспонированную. В результате получим матрицу, у которой значения элементов на главной диагонали равны 1, а все остальные 0. Полученная матрица оценок (координаты исходных наблюдений в ортогональном базисе полученных главных компонент) имеет размерность  $2246 \times 5$  и не приводится в целях экономии места.

Процентный вклад главных компонент в описание суммарной дисперсии

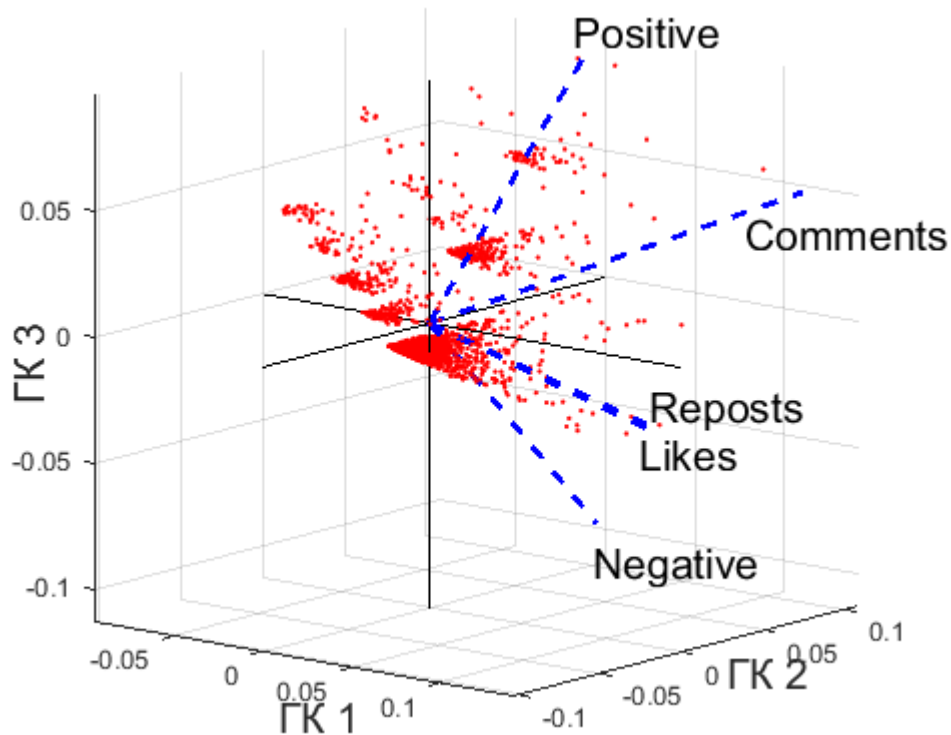
выглядит следующим образом: 1-я – 38,4%; 2-я – 20,1%, 3-я – 19,9%; 4-я – 18,1%; 5-я – 3,5%. Диаграмма Парето для 95% описываемой главными компонентами дисперсии исходных данных представлена на рис. 10.



*Рис. 10. Диаграмма Парето для описываемой главными компонентами дисперсии исходных данных*

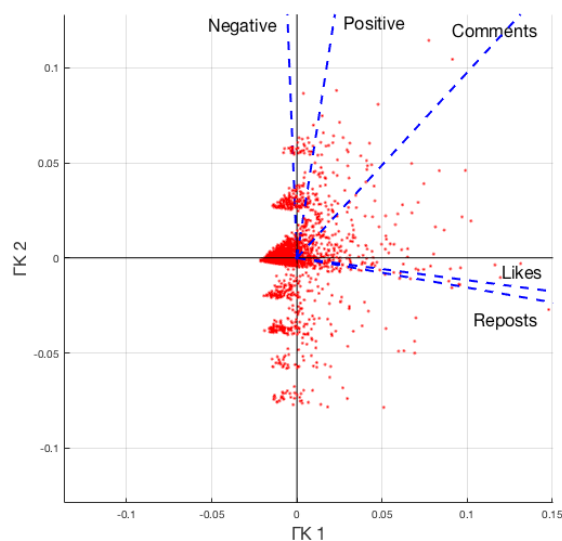
Определим те исходные переменные (измеренные в ходе эксперимента параметры), которые вносят наиболее значимый вклад в выявленные главные компоненты. Для этого проанализируем столбцы столбца матрицы факторных нагрузок и выберем строки с максимальными значениями ячеек. Очевидно, что для первой главной компоненты максимальный вклад вносят переменные №2 («репосты») и №1 («лайки»). Для второй ГК основной вклад вносят переменные №5 (оценка негативной тональности) и №4 (оценка позитивной тональности). Для третьей ГК наибольший по абсолютному значению вклад вносят переменные №4 и №5 (с отрицательным знаком). Таким образом, может быть сделан следующий вывод: первая главная компонента, которая в ходе проводимого эксперимента проявляется в количестве «лайков» и «репостов», характеризует «побудительную силу» или «импульс» анализируемого текстового сообщения.

А вторая главная компонента, в свою очередь — эмоциональную окраску или «валентность», что полностью соответствует принятой в психологии системе координат «валентность-эраузал», в которой может быть описано любое психоэмоциональное состояние индивида — от депрессии до эйфории. Представим наглядно полученные главные компоненты и исходные переменные в новом базисе (рис. 11 – 14):



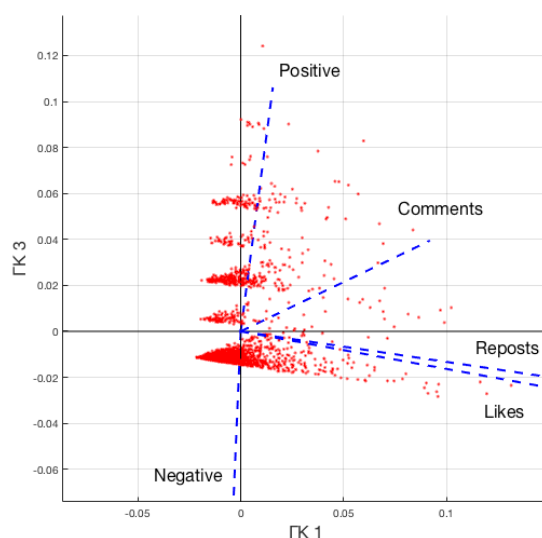
*Рис. 11. Исходные переменные в новом ортогональном базисе главных компонент: демонстрирует интерференционную картину эмоциональных состояний агентов ПР.*

Радиальными пунктирными линиями на рис. 11 показаны исходные 5 параметров («лайки», «репосты», комментарии, позитивная и негативная оценки тональности соответственно) в новом ортонормированном базисе 3-х главных компонент. Каждая отдельная точка представляет публикацию на стене сообщества.

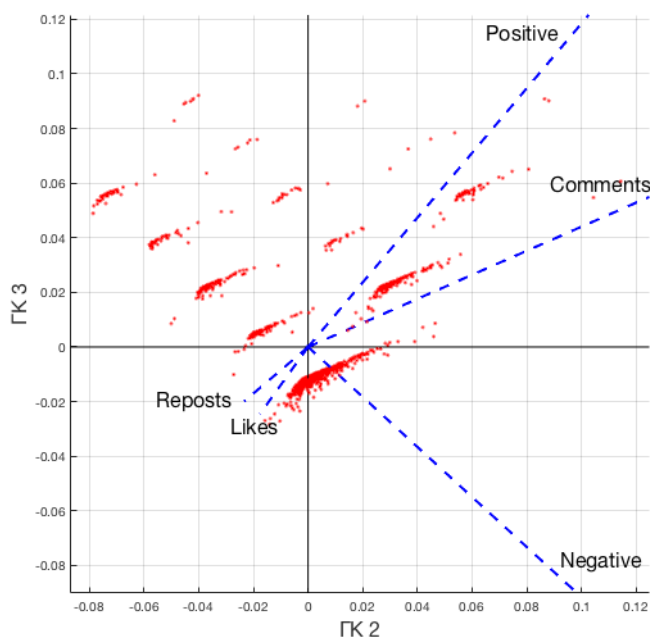


*Рис. 12. Проекция исходных данных на первые две главные компоненты*





*Рис. 13. Проекция исходных данных на первую и третью главные компоненты*



*Рис. 14. Проекция исходных данных на вторую и третью главные компоненты*

При этом хорошо видно расслоение и кластеризация анализируемых текстовых сообщений как по тональности (эмоциональной окраске) (главная компонента №2), так и по «побудительной силе» (главная компонента №1).

Важным свойством наблюдаемого расслоения и кластеризации является наличие интерференционной картины, агентов ПР, аналогичной той которая приведена на рис. 1(б). Эта картина образована интерференцией когнитивных эмоциональных состояний акторов сети. Эмоциональные состояния

пользователей в рамках проведенного эксперимента могут быть рассмотрены в качестве аналогов квантовых состояний состояния, причём валентность соотносится с координатой, а эраузл (энергетическая психологическая переменная) — с импульсом частицы.

С квантовой точки зрения две данные переменные линейно независимы, то же самое справедливо для полученного ортогонального базиса главных компонент. При этом проекции исходных данных на соответствующие главные компоненты, изображенные на рис.12-14 позволяют выявить практически строгую периодичность в формируемой интерференционной картинке, ср. с рис.1(б).

### Заключение

Подведем итог данной работы. Нами представлены результаты оригинального экспериментального исследования по проверке гипотезы о квантовоподобных свойствах процессов непрямого распространения информации в социальных сетях с учётом когнитивных процессов их акторов.

Эксперимент «пассивного» типа выполнен посредством ретроспективного анализа текстовых сообщений и комментариев пользователей на странице сообщества «Мировая политика» социальной сети «ВКонтакте». В результате было собрано более 2000 публикаций и более 50000 комментариев пользователей за период 2017-2018 гг. Для автоматизированной оценки тональности текстовых сообщений использована технология *SentiStrength*, статистическая обработка и визуализация результатов экспериментальных исследований осуществлена с применением инженерного пакета *Matlab*.

По итогам проведенного эксперимента может быть сделан вывод о квантовоподобном (волновом) характере распространении информации в социальных сетях. Он непосредственно связан с наблюдаемой интерференционной картиной в пространстве параметров, описывающих когнитивные (эмоциональные) состояния акторов сети, являющихся агентами ПР. При этом валентность соотнесена с координатой, а «побуждающая сила», выраженная в количестве «лайков» и «репостов» — с импульсом частицы. С квантовой точки зрения две данные переменные линейно независимы, то же самое справедливо для полученной ортогональной системы координат в базисе вычисленных главных компонент.

В проведенном нами экспериментальном исследовании информационное поле (размещаемые на странице социальной сети новости на тему мировой политики) воздействует на акторов социальной сети, изначально находящихся в различных эмоциональных состояниях, характеризующихся квантовоподобной неопределенностью. Неопределенность проявляется в невозможности одновременного точного измерения пары характеризующих эти состояния параметров – тональности сообщений (квантовоподобная координата) и их энергетической характеристики, проявляющейся в количестве собранных

«лайков» и «репостов». Взаимодействие акторов посредством публикации комментариев и непрямого обмена эмоциями приводит к взаимному усилению или ослаблению восприимчивости к эмоционально окрашенным сообщениям в определенных диапазонах тональности что непосредственно может быть соотнесено с наблюдаемой интерференционной картиной пространстве главных компонент, и может быть источником усиления или ослабления (на более глобальном уровне) распространения информации в сетях Интернет. Несомненно, данные исследования могут иметь большой практический интерес в связи с концепцией так называемого социального лазера, заключающейся в гигантском усилении информации в социальных сетях благодаря эффектам информационной накачки, усиления влияния в сетевых сообществах, и действия эхо камер (аналогичных физическим резонаторам) [67-69]. Данные исследования в мире только набирают свои обороты и требуют проведения дополнительных (более глубоких) исследований по распространению информации в сложных сетевых структурах.

Результаты работы также позволяют выдвинуть гипотезу о квантовоподобном (волновом) характере обработки информации сложными сетями и гиперсетями, в основе которого лежат интерференционные явления; именно эти явления в конечном итоге являются ответственными за скорость распространения информации в таких структурах.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гос. задания №2019-1339 Министерства науки и высшего образования РФ. Экспериментальная часть работы была поддержана проектом №217718 Фонда перспективных исследований, а также грантом РФФИ № 18-29-22064.*

### *Литература*

1. Barrat A., Barthelemy M., Vespignani A. Dynamical processes on complex networks, Cambridge university press, 2008.
2. Fortunato S. Community detection in graphs. Physics reports. 2010. Vol. 486, №. 3-5. P. 75-174.
3. Губанов Д. А., Новиков Д. А., Чхартишвили А. Г. Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства, 2010.
4. Vespignani A., Caldarelli G. Large Scale Structure and Dynamics of Complex Networks: From information technology to finance and natural science. World scientific, 2007. Vol. 2.
5. Easley D. et al. Networks, crowds, and markets. Cambridge: Cambridge university press, 2010. Vol. 8.
6. Guleva V. et al. Emerging Complexity in Distributed Intelligent Systems. *Entropy*. 2020. Vol. 22, № 12. P. 1437.
7. Moore S., Rogers T. Predicting the speed of epidemics spreading in networks,

*Physical review letters*. 2020. Vol. 124, № 6. P. 068301.

8. Kempe D., Kleinberg J., Tardos É. Maximizing the spread of influence through a social network. Proceedings of the ninth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining, 2003. P. 137-146.

9. Leskovec J., Adamic L. A., Huberman B. A. The dynamics of viral marketing. *ACM Transactions on the Web (TWEB)*. 2007. Vol. 1, № 1. P. 5-es.

10. Анохин К. В. Когнитом: в поисках общей теории когнитивной науки. Шестая междунар. конф. по когнитивной науке: тез. докл./под общ. ред. Б. Величковского, В. Рубцова, Д. Ушакова, Калининград, 2014. С. 27-27.

11. Asano M. et al. Quantum adaptivity in biology: from genetics to cognition. Springer Netherlands, 2015. Vol. 1080.

12. Busemeyer J. R., Bruza P. D. Quantum models of cognition and decision. Cambridge University Press, 2012.

13. Шендяпин В. М., Скотникова И. Г. Моделирование принятия решения и уверенности в сенсорных задачах. М., Изд-во «Институт психологии РАН, 2015.

14. Райфа Г. Анализ решений. Пер. с англ. Пер. З. Н. Кравец. 1977.

15. Ногин В. Д. Принятие решений в многокритериальной среде. Количественный подход. Общество с ограниченной ответственностью Издательская фирма "Физико-математическая литература", 2004.

16. Ellsberg D. Risk, ambiguity, and the Savage axioms. *The quarterly journal of economics*, 1961. Vol. 643-669.

17. Allais M. Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école américaine. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1953. Vol. 503-546.

18. Thaler R. H. Misbehaving The Making of Behavioral Economics. 2017.

19. Bagarello F. et al. Quantum like modeling of decision making: Quantifying uncertainty with the aid of Heisenberg–Robertson inequality. *Journal of mathematical psychology*. 2018. Vol. 84. P. 49-56.

20. Пенроуз Р. Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики. М., Эдиториал УРСС, 2003. С. 384.

21. Пенроуз Р. Тени разума: В поисках науки о сознании. Часть II: Новая физика, необходимая для понимания разума. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. С. 688.

22. Khrennikov A. Y. Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models. Dordrecht: Springer Netherlands, 1997. P. 312.

23. Khrennikov A. et al. Quantum probability in decision making from quantum information representation of neuronal states. *Scientific reports*. 2018. Vol. 8, № 1. P. 16225.

24. Гуревич И.В., Фейгенберг В.В. Какие вероятности «работают» в психологии. Вероятностное прогнозирование в деятельности человека. М.: Наука, 1977. P. 9–21.

25. Koellner P. On the Question of Whether the Mind Can Be Mechanized, I: From Gödel to Penrose. *The Journal of Philosophy*. 2018. Vol. 115, № 7. P. 337–360.
26. Koellner P. On the Question of Whether the Mind Can Be Mechanized, II: Penrose’s New Argument. *The Journal of Philosophy*. 2018. Vol. 115, № 9. P. 453–484.
27. Khrennikov A. Y. Ubiquitous quantum structure. Berlin : Springer, 2014.
28. Baaquie B. E. Quantum finance: Path integrals and Hamiltonians for options and interest rates. Cambridge University Press, 2007.
29. Galam S. Sociophysics: A Physicist’s Modeling of Psycho-political Phenomena. Springer, 2012.
30. Ehtibar N., Dzhafarov J. Scott Jordan, Ru Zhang, Victor H Cervantes, Contextuality From Quantum Physics To Psychology (Advanced Series On Mathematical Psychology Book 6). World Scientific, 2016
31. Haven E., Khrennikov A. Introduction: Quantum probability and the mathematical modelling of decision-making. *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2016. Vol. 374, № 2058. P. 1-3.
32. Bagarello F. An operator view on alliances in politics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2015. Vol. 75, № 2. P. 564-584.
33. Yukalov V. I., Sornette D. Quantum decision theory as quantum theory of measurement. *Physics Letters A*. 2008. Vol. 372, № 46. P. 6867-6871.
34. Yukalov V. I., Sornette D. Physics of risk and uncertainty in quantum decision making. *The European Physical Journal B*. 2009. Vol. 71, № 4. P. 533-548.
35. Busemeyer J. R., Wang Z., Townsend J. T. Quantum dynamics of human decision-making. *Journal of Mathematical Psychology*. 2006. Vol. 50, № 3. P. 220-241.
36. Busemeyer J. R., Wang Z., Lambert-Mogiliansky A. Empirical comparison of Markov and quantum models of decision making. *Journal of Mathematical Psychology*. 2009. Vol. 53, № 5. P. 423-433.
37. Pothos E. M., Busemeyer J. R. Can quantum probability provide a new direction for cognitive modeling? *Behavioral and brain sciences*. 2013. Vol. 36, № 3. P. 255-274.
38. Kahneman D. et al. (ed.). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. Cambridge university press, 1982.
39. Tversky A., Shafir E. The disjunction effect in choice under uncertainty. *Psychological science*. 1992. Vol. 3, № 5. P. 305-310.
40. Lambdin C., Burdsal C. The disjunction effect reexamined: Relevant methodological issues and the fallacy of unspecified percentage comparisons. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*. 2007. Vol. 103, № 2. – P. 268-276.
41. Kühberger A., Komunská D., Perner J. The disjunction effect: Does it exist for two-step gambles? *Organizational Behavior and Human Decision Processes*. 2001. Vol. 85, № 2. P. 250-264.

42. Surov I. A. et al. Quantum phase stability in human cognition. *Frontiers in psychology*. 2019. Vol. 10. P. 929.
43. Бажанов В. А. Дополнительности (принцип). Энциклопедия эпистемологии и философии науки. Российская академия наук, Институт философии РАН, 2009.
44. Grib A. A., Zapatrin R. R. Macroscopic realizations of quantum logics. *International Journal of Theoretical Physics*. 1992. Vol. 31. № 9. P. 1669-1687.
45. Гриб А. А. Квантовая физика и отказ от наивного реализма. *Метафизика*. 2015, № 2. С. 48-71.
46. Ораевский А. Н. Бозе-конденсаты с точки зрения лазерной физики. *Квантовая электроника*. 2001. Т. 31, № 12. С. 1038-1057.
47. Venegas-Andraca S. E. Quantum walks for computer scientists. *Synthesis Lectures on Quantum Computing*. 2008. Vol. 1, № 1. P. 1-119.
48. Mohseni M. et al. Environment-assisted quantum walks in photosynthetic energy transfer. *The Journal of chemical physics*. 2008. Vol. 129, № 17. P. 17B603.
49. Melnikov A. A., Fedichkin L. E., Alodjants A. Predicting quantum advantage by quantum walk with convolutional neural networks. *New Journal of Physics*. 2019. Vol. 21, № 12. P. 125002.
50. Albert R., Barabási A. L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of modern physics*. 2002. Vol. 74, № 1. P. 47.
51. Shuai X. et al. Modeling indirect influence on twitter. *International Journal on Semantic Web and Information Systems (IJSWIS)*. 2012. Vol. 8, № 4. P. 20-36.
52. Scully M. O. et al. *Quantum optics* cambridge university press. Cambridge, CB2 2RU, UK, 1997.
53. Russell J.A. A circumplex model of affect. *Journal of Personality and Social Psychology*. 1980. Vol. 39, № 6. P. 1161–1178.
54. Berrios R., Totterdell P., Kellett S. Eliciting mixed emotions: a meta-analysis comparing models, types, and measures. *Frontiers in psychology*. 2015. Vol. 6. P. 428.
55. Preoțiuc-Pietro D. et al. Modelling valence and arousal in facebook posts. *Proceedings of the 7th Workshop on Computational Approaches to Subjectivity, Sentiment and Social Media Analysis*. 2016. P. 9–15.
56. Granovetter M.S. The strength of weak ties. *American Journal of Sociology*. 1973. Vol. 78, № 6. P. 1360–1380.
57. Posner J., Russell J.A., Peterson B.S. The circumplex model of affect: An integrative approach to affective neuroscience, cognitive development, and psychopathology. *Development and psychopathology*. 2005. Vol. 17, № 3. P. 715–734.
58. Гнидко К.О., Ломако А.Г. Оценивание уровня контаминации сознания в ультраметрическом пространстве состояний р-адической модели поведения субъекта. *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. № 9(59). С. 729–734.

59. Алексеев А.О., Алексеева И.Е. Математическое моделирование предпочтений экономических субъектов (агентов). Управление экономическими системами. 2015. № №4 (76).
60. Yang L.K. Protecting youth from dangerous media: online predators. Adolescents, rapid social change, and the law. Springer, 2016. P. 75–92.
61. Christakis N.A., Fowler J.H. The collective dynamics of smoking in a large social network. The New England Journal of Medicine. 2008. Vol. 358, №21. P. 2249–2258.
62. Lehmann J., Gonçalves B., Cattuto C. Dynamical Classes of Collective Attention in Twitter. Traffic. 2012. P. 10.
63. Bolzern P., Colaneri P., De Nicolao G. Opinion influence and evolution in social networks: A Markovian agents model. *Automatica*. 2019. Vol. 100. P. 219–230.
64. Lee W., Park S., Moon I.-C. Modeling multiple fields of collective emotions with brownian agent-based model. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2014. P. 797–804.
65. Schroepfer M. An Update on Our Plans to Restrict Data Access on Facebook [Electronic resource], FB Newsroom. URL: <https://newsroom.fb.com/news/2018/04/restricting-data-access/> (accessed: 19.06.2018).
66. Garcia D., Garas A., Schweitzer F. An agent-based modeling framework for online collective emotions, Cyberemotions: Collective Emotions in Cyberspace. Understanding Complex Systems. Springer, 2017. P. 187–206.
67. Khrennikov Andrei. ‘Social Laser’: action amplification by stimulated emission of social energy. Phil. Trans. R. Soc. A. 2016, **374** 20150094
68. Tsarev D., Trofimova A.M., Alodzjants A., Khrennikov A.Y. Phase transitions, collective emotions and decision-making problem in heterogeneous social systems. *Scientific Reports*, 2019, Vol. 9, No. 1, pp. 18039
69. Khrennikov A.Y., Alodzjants A., Tsarev D., Trofimova A.M. On interpretational questions for quantum-Like modeling of social lasing. *Entropy*, 2018, V. 20, P.921.

***Quantum-like propagation enhancement phenomena emotionally colored messages in online communities***

***Alodzjants A.P.<sup>1</sup>, Bazhenov A.Yu.<sup>2</sup>, Gnidko K.O.<sup>3</sup>***

<sup>1</sup>Doctor of Physics and Mathematics, Professor, ITMO University, St. Petersburg, Russia, e-mail: [alexander\\_ap@list.ru](mailto:alexander_ap@list.ru)

<sup>2</sup>graduate student, ITMO University, St. Petersburg, Russia, e-mail: [b.a.y@mail.ru](mailto:b.a.y@mail.ru)

<sup>3</sup>Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, A.F. Mozhaisky, St. Petersburg Russia, e-mail: [greeny598@gmail.com](mailto:greeny598@gmail.com)

**Abstract.** The paper discusses the goals, objectives and approaches of a new interdisciplinary direction - quantum cognitive science, formed at the junction of the humanities and natural sciences,

and which is associated with the use of quantum theory to study cognitive and psychological processes in terms of modeling information processing by the human brain, decision-making, concept formation, reasoning, perception of the world, etc., which are undoubted attributes of strong artificial intelligence.

In this regard, when describing the cognitive states of agents making contextually dependent decisions at both the individual and collective levels, deep analogies are drawn with fundamental physical experiments demonstrating wave-particle duality in Nature, an integral part of which is the ability to interfere with various states of the system. To test this property, a model experiment was carried out, the purpose of which was to test the hypothesis about the quantum-like nature of the phenomena observed during the indirect dissemination of emotionally colored information in network communities. The experiment is based on the technology of automatic analysis of the emotional sentiment of texts ("sentiment analysis"), adapted for the Russian language through the development of an original set of dictionaries of emotionally significant words and symbols ("smiles"). The experimental part of the work included: gaining access to messages from the open community "World Politics" of the social network "Vkontakte"; collection and primary processing of initial data; the formation of an a priori feature space of the experimental model; reducing the dimension of the feature space and identifying the most informative features and significant factors with the formation of an orthogonal basis of uncorrelated principal components; statistical processing and visualization of research results.

The emotional states of the subjects of communication in the framework of the experiment were interpreted as quantum states, with the valence being correlated with the coordinate, and the causal (energetic psychological variable) - with the momentum of the particle. It was found that the interaction of actors through the publication of comments and indirect exchange of emotions leads to a mutual strengthening or weakening of receptivity to emotionally colored messages in certain ranges of tonality, which can be directly correlated with the observed interference pattern of the space of the main components, and can be a source of amplification or weakening (on more global level) dissemination of information on the Internet. The results of the work allow us to put forward a hypothesis about the quantum-like (wave) nature of information processing by complex networks and hypernets, which is based on interference phenomena, and which are ultimately responsible for the speed of information propagation in such structures.

**Keywords:** information modeling, quantum cognitive science, social networks, sentiment analysis

### *References*

1. Barrat A., Barthelemy M., Vespignani A. Dynamical processes on complex networks, Cambridge university press, 2008.
2. Fortunato S. Community detection in graphs. Physics reports. 2010. Vol. 486, №. 3-5. P. 75-174.
3. Gubanov D. A., Novikov D. A., Chkhartishvili A.G. Sotsialnie seti: modeli informatsionnogo vliyaniya upravleniya i protivoborstva [Social networks: models of information influence, management and confrontation], 2010.
4. Vespignani A., Caldarelli G. Large Scale Structure and Dynamics of Complex Networks: From information technology to finance and natural science. World scientific, 2007. Vol. 2.
5. Easley D. et al. Networks, crowds, and markets. Cambridge: Cambridge university press, 2010. Vol. 8.
6. Guleva V. et al. Emerging Complexity in Distributed Intelligent Systems. *Entropy*. 2020. Vol. 22, № 12. P. 1437.
7. Moore S., Rogers T. Predicting the speed of epidemics spreading in networks, *Physical*



*review letters*. 2020. Vol. 124, № 6. P. 068301.

8. Kempe D., Kleinberg J., Tardos É. Maximizing the spread of influence through a social network. Proceedings of the ninth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining, 2003. P. 137-146.

9. Leskovec J., Adamic L. A., Huberman B. A. The dynamics of viral marketing. ACM Transactions on the Web (TWEB). 2007. Vol. 1, № 1. P. 5-es.

10. Anokhin K.V. Kognitom: v poiskakh obshey teorii kognitivnoy nauki [Cognitom: in search of a general theory of cognitive science]. Sixth Intern. conf. on cognitive science: abstracts. reports / under total. ed. B. Velichkovsky, V. Rubtsov, D. Ushakova, Kaliningrad, 2014.pp. 27-27.

11. Asano M. et al. Quantum adaptivity in biology: from genetics to cognition. Springer Netherlands, 2015. Vol. 1080.

12. Busemeyer J. R., Bruza P. D. Quantum models of cognition and decision. Cambridge University Press, 2012.

13. Shendyapin V.M., Skotnikova I.G. Modelirovanie prinyatiya resheniya I uverenosti v sensornikh zadachakh [Modeling of decision making and confidence in sensory problems]. Moscow, Institute of Psychology RAS, 2015.

14. Райфа Г. Анализ решений. Пер. с англ. Пер. 3. Н. Кравец. 1977.

15. Nogin V.D. Prinyatie resheniy v mnogokriterialnoy srede [Decision-making in a multicriteria environment. Quantitative approach]. Limited Liability Company Publishing Company "Physics and Mathematics Literature", 2004.

16. Ellsberg D. Risk, ambiguity, and the Savage axioms. The quarterly journal of economics, 1961. Vol. 643-669.

17. Allais M. Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école américaine. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 1953. Vol. 503-546.

18. Thaler R. H. Misbehaving The Making of Behavioral Economics. 2017.

19. Bagarello F. et al. Quantum like modeling of decision making: Quantifying uncertainty with the aid of Heisenberg–Robertson inequality. *Journal of mathematical psychology*. 2018. Vol. 84. P. 49-56.

20. Penrose R. Noviy um korolya [New mind of the king. About computers, thinking and the laws of physics]. M., Editorial URSS, 2003.S. 384.

21. Penrose R. Teni razuma [Shadows of the Mind: In Search of the Science of Consciousness]. Part II: New physics needed to understand the mind. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Research, 2005. P. 688.

22. Khrennikov A.Y. Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models. Dordrecht: Springer Netherlands, 1997. P. 312.

23. Khrennikov A. et al. Quantum probability in decision making from quantum information representation of neuronal states. Scientific reports. 2018. Vol. 8, № 1. P. 16225.

24. Гуревич И.В., Фейгенберг В.В. Какие вероятности «работают» в психологии. Вероятностное прогнозирование в деятельности человека. М.: Наука, 1977. P. 9–21.

25. Koellner P. On the Question of Whether the Mind Can Be Mechanized, I: From Gödel to Penrose. *The Journal of Philosophy*. 2018. Vol. 115, № 7. P. 337–360.

26. Koellner P. On the Question of Whether the Mind Can Be Mechanized, II: Penrose's New Argument. *The Journal of Philosophy*. 2018. Vol. 115, № 9. P. 453–484.

27. Khrennikov A. Y. Ubiquitous quantum structure. Berlin : Springer, 2014.

28. Baaquie B. E. Quantum finance: Path integrals and Hamiltonians for options and interest rates. Cambridge University Press, 2007.

29. Galam S. Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psycho-political Phenomena. Springer, 2012.

30. Ehtibar N., Dzhafarov J. Scott Jordan, Ru Zhang, Victor H Cervantes, Contextuality From Quantum Physics To Psychology (Advanced Series On Mathematical Psychology Book 6). World Scientific, 2016
31. Haven E., Khrennikov A. Introduction: Quantum probability and the mathematical modelling of decision-making. *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2016. Vol. 374, № 2058. P. 1-3.
32. Bagarello F. An operator view on alliances in politics. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2015. Vol. 75, № 2. P. 564-584.
33. Yukalov V. I., Sornette D. Quantum decision theory as quantum theory of measurement. *Physics Letters A*. 2008. Vol. 372, № 46. P. 6867-6871.
34. Yukalov V. I., Sornette D. Physics of risk and uncertainty in quantum decision making. *The European Physical Journal B*. 2009. Vol. 71, № 4. P. 533-548.
35. Busemeyer J. R., Wang Z., Townsend J. T. Quantum dynamics of human decision-making. *Journal of Mathematical Psychology*. 2006. Vol. 50, № 3. P. 220-241.
36. Busemeyer J. R., Wang Z., Lambert-Mogiliansky A. Empirical comparison of Markov and quantum models of decision making. *Journal of Mathematical Psychology*. 2009. Vol. 53, № 5. P. 423-433.
37. Pothos E. M., Busemeyer J. R. Can quantum probability provide a new direction for cognitive modeling? *Behavioral and brain sciences*. 2013. Vol. 36, № 3. P. 255-274.
38. Kahneman D. et al. (ed.). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge university press, 1982.
39. Tversky A., Shafir E. The disjunction effect in choice under uncertainty. *Psychological science*. 1992. Vol. 3, № 5. P. 305-310.
40. Lambdin C., Burdsal C. The disjunction effect reexamined: Relevant methodological issues and the fallacy of unspecified percentage comparisons. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*. 2007. Vol. 103, № 2. – P. 268-276.
41. Kühberger A., Komunská D., Perner J. The disjunction effect: Does it exist for two-step gambles? *Organizational Behavior and Human Decision Processes*. 2001. Vol. 85, № 2. P. 250-264.
42. Surov I. A. et al. Quantum phase stability in human cognition. *Frontiers in psychology*. 2019. Vol. 10. P. 929.
43. Bazhanov V. A. Dopolnitelnosti (printsip) [Complementarities (principle)]. *Encyclopedia of Epistemology and Philosophy of Science*. Russian acad. Sciences, Institute of Philosophy RAS, 2009. 2001. T. 31, No. 12. P. 1038-1057.
44. Grib A. A., Zapatin R. R. Macroscopic realizations of quantum logics. *International Journal of Theoretical Physics*. 1992. Vol. 31. №. 9. P. 1669-1687.
45. Grib A.A. Kvantovaya fizika I otkaz ot naivnogo realizma [Quantum physics and the rejection of naive realism]. *Metaphysics*. 2015, No. 2. S. 48-71.
46. Oraevsky A.N. Boze-kondensati s tochki zreniya lazernoi fiziki [Bose condensates from the point of view of laser physics]. *Quantum electronics*. 2001. T. 31, № 12. pp. 1038-1057
47. Venegas-Andraca S. E. Quantum walks for computer scientists. *Synthesis Lectures on Quantum Computing*. 2008. Vol. 1, № 1. P. 1-119.
48. Mohseni M. et al. Environment-assisted quantum walks in photosynthetic energy transfer. *The Journal of chemical physics*. 2008. Vol. 129, № 17. P. 11B603.
49. Melnikov A. A., Fedichkin L. E., Alodjants A. Predicting quantum advantage by quantum walk with convolutional neural networks. *New Journal of Physics*. 2019. Vol. 21, № 12. P. 125002.
50. Albert R., Barabási A. L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of modern physics*. 2002. Vol. 74, № 1. P. 47.
51. Shuai X. et al. Modeling indirect influence on twitter. *International Journal on Semantic Web and Information Systems (IJSWIS)*. 2012. Vol. 8, № 4. P. 20-36.

52. Scully M. O. et al. Quantum optics cambridge university press. Cambridge, CB2 2RU, UK, 1997.
53. Russell J.A. A circumplex model of affect. *Journal of Personality and Social Psychology*. 1980. Vol. 39, № 6. P. 1161–1178.
54. Berrios R., Totterdell P., Kellett S. Eliciting mixed emotions: a meta-analysis comparing models, types, and measures. *Frontiers in psychology*. 2015. Vol. 6. P. 428.
55. Preoțiuc-Pietro D. et al. Modelling valence and arousal in facebook posts. Proceedings of the 7th Workshop on Computational Approaches to Subjectivity, Sentiment and Social Media Analysis. 2016. P. 9–15.
56. Granovetter M.S. The strength of weak ties. *American Journal of Sociology*. 1973. Vol. 78, № 6. P. 1360–1380.
57. Posner J., Russell J.A., Peterson B.S. The circumplex model of affect: An integrative approach to affective neuroscience, cognitive development, and psychopathology. *Development and psychopathology*. 2005. Vol. 17, № 3. P. 715–734.
58. Gnidko K.O., Lomako A.G. Otsenivanie urovnya kontaminatsii soznaniya v ultrametricheskom prostranstve sostoyaniy p-adicheskoy modeli povedeniya subyekta [Assessment of the level of consciousness contamination in the ultrametric state space of the p-adic model of the subject's behavior]. Proceedings of higher educational institutions. Instrumentation. No. 9 (59). S. 729-734.
59. Alekseev A.O., Alekseeva I.E. Matematicheskoe modelirovanie predpochteniy ekonomicheskikh subyektov [Mathematical modeling of the preferences of economic subjects (agents)]. Management of economic systems. 2015. No. 4 (76).
60. Yang L.K. Protecting youth from dangerous media: online predators. Adolescents, rapid social change, and the law. Springer, 2016. P. 75–92.
61. Christakis N.A., Fowler J.H. The collective dynamics of smoking in a large social network. *The New England Journal of Medicine*. 2008. Vol. 358, №21. P. 2249–2258.
62. Lehmann J., Gonçalves B., Cattuto C. Dynamical Classes of Collective Attention in Twitter. *Traffic*. 2012. P. 10.
63. Bolzern P., Colaneri P., De Nicolao G. Opinion influence and evolution in social networks: A Markovian agents model. *Automatica*. 2019. Vol. 100. P. 219–230.
64. Lee W., Park S., Moon I.-C. Modeling multiple fields of collective emotions with brownian agent-based model. International Foundation for Autonomous Agents and Multiagent Systems, 2014. P. 797–804.
65. Schroeffer M. An Update on Our Plans to Restrict Data Access on Facebook [Electronic resource], FB Newsroom. URL: <https://newsroom.fb.com/news/2018/04/restricting-data-access/> (accessed: 19.06.2018).
66. Garcia D., Garas A., Schweitzer F. An agent-based modeling framework for online collective emotions, Cyberemotions: Collective Emotions in Cyberspace. Understanding Complex Systems. Springer, 2017. P. 187–206.
67. Khrennikov Andrei. ‘Social Laser’: action amplification by stimulated emission of social energy. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2016, **374** 20150094
68. Tsarev D., Trofimova A.M., Alodjants A., Khrennikov A.Y. Phase transitions, collective emotions and decision-making problem in heterogeneous social systems. *Scientific Reports*, 2019, Vol. 9, No. 1, pp. 18039
69. Khrennikov A.Y., Alodjants A., Tsarev D., Trofimova A.M. On interpretational questions for quantum-Like modeling of social lasing. *Entropy*, 2018, V. 20, P.921.

## Авторский указатель

### А

*Алексеев А.Ю.* 5, 20

*Алоджанц А.П.* 511

*Анохин К.В.* 5

### Б

*Баженов А.Ю.* 511

### В

*Витяев Е.Е.* 238

### Г

*Ганиев Р.Ф.* 5

*Гнидко К.О.* 511

### Д

*Дорохов А.С.* 5

### Е

*Ершов Ю.Л.* 5

### Ж

*Жданов А.А.* 393

### Л

*Лабунец В.Г.* 293

*Лекторский В.А.* 5

### М

*Мазуров М.Е.* 445

### О

*Островский М.А.* 5, 77

### П

*Перцов С.С.* 5

*Петухов С.В.* 5, 20, 82

### С

*Савельев А.В.* 20

*Савостьянов Г.А.* 466

*Сигов А.С.* 5

*Судаков С.К.* 5, 8

### Т

*Толоконников Г.К.* 8, 20, 148

### У

*Умрюхин А.Е.* 5

### Ч

*Часовских В.П.* 293

*Черноиванов В.И.* 5, 8

### Ю

*Юматов Е.А.* 419

### **Типография «Группа МФЦ»**

*изготовит быстро и качественно на современной полиграфической  
базе самую разнообразную листовую и многостраничную продукцию:*



*книги, брошюры, буклеты, каталоги,  
рефераты, авторефераты, бюллетени,  
газеты, журналы, бланки, визитные  
карточки, папки, плакаты,  
постеры, афиши, чертежи, стикеры,  
этикетки, наклейки*

*Адрес: Москва, Буженинова, д. 30  
Телефон: 495-963-4146, 495-778-3263  
Факс: 495-963-5581  
<http://www.print99.ru>*

Типография «Группа МФЦ», Москва, Буженинова, 30  
Подписано в печать 15.04.2021 г.  
ООО «ЦИТ», формат 70x100/16  
Усл.п.л. 30,6. Тираж 500 экз., заказ №12