

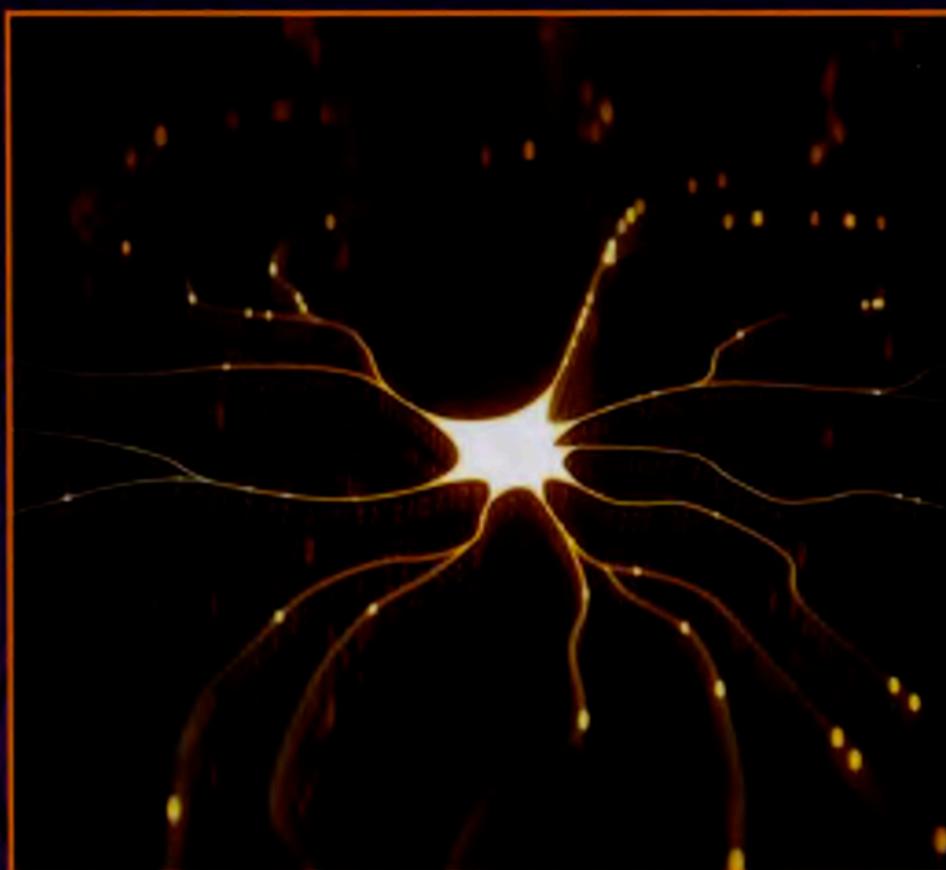
**Математические основы  
классической и квантовой теории интеллекта**

Под редакцией  
Лабунца В.Г.

**Лабунец В.Г., Часовских В.П.**

# **ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ МОЗГ КЛАССИЧЕСКИМ КОМПЬЮТЕРОМ, РАБОТАЮЩИМ В АЛГЕБРЕ КЛИФФОРДА?**

## **1. Математические основы теории**



**Екатеринбург**

**2022**

**Математические основы  
классической и квантовой теории интеллекта**

**Под редакцией  
Лабунца В.Г.**

**Лабунец В.Г., Часовских В.П.**

**ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ МОЗГ КЛАССИЧЕСКИМ  
КОМПЬЮТЕРОМ, РАБОТАЮЩИМ  
В АЛГЕБРЕ КЛИФФОРДА?**

**1. Математические основы теории**

**Екатеринбург**

**2022**

УДК 004.932 УДК 681.323

ББК 32.811.3

Л12



Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № РФФИ № 19-29-09022\19.

Л12 Лабунец В.Г., Часовских В.П. Является ли мозг классическим компьютером, работающим в алгебре Клиффорда? Математические основы теории. М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Урал. гос. экон. ун-т. — Екатеринбург: Изд-во ООО «Акдениз», 2022. — 178 с.

ISBN 978-5-6045940-2-5

**Ключевые слова:** Обработка изображений, распознавание образов, алгебры Клиффорда, гиперспектральные изображения

Мы предлагаем новый теоретический подход для обработки многомерных изображений, основанный на математическом аппарате алгебры Клиффорда и теории гиперкомплексных чисел. Одна из главных целей этого проекта состоит в том, чтобы доказать, что аппарат алгебр Клиффорда более адекватно описывает процессы обработки и распознавания цветных и гиперспектральных изображений, чем векторно-матричный математический аппарат. В нашем подходе мы основываемся на следующих гипотезах:

1) Мозг животных оперирует с гиперкомплексными числами в процессе обработки и распознавания цветных и многокомпонентных изображений.

2) Для решения двух типов задач мозг животных использует два типа гиперкомплексных алгебр на двух уровнях головного мозга. А именно, он использует коммутативные мультиплетные алгебры для обработки цветных и многокомпонентных изображений на уровне сетчатки глаза и некоммутирующие алгебры Клиффорда - для распознавания таких изображений в высших отделах головного мозга (в так называемом отделе “Visual Cortex”).

3) Визуальные системы животных с различной эволюционной историей используют различные коммутативные гиперкомплексные алгебры и алгебры Клиффорда для обработки и распознавания цветных и гиперспектральных изображений.

Например, мозг человека использует триплетные алгебры для обработки цветных изображений и 8-мерные алгебры Клиффорда (бикватернионные алгебры и алгебры октонионов) для их распознавания. С этой точки зрения визуальные системы животных, состоящие из глаз и отдела “Visual Cortex” головного мозга, могут рассматриваться как “компьютеры, работающие в алгебрах Клиффорда”

УДК 004.932 УДК 681.323

ББК32.811.3

© Лабунец В.Г., Часовских В.П., 2022

© Уральский государственный

экономический университет, 2022

ISBN 978-5-6045940-2-5

## Оглавление

Предисловие .....	5
Г л а в а 1.....	10
ГЛАВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ .....	10
<b>1.1. Мультиспектральные и гиперспектральные изображения.....</b>	<b>10</b>
<b>1.2. Как головной мозг распознает объекты внешнего мира? .....</b>	<b>12</b>
<b>1.3. Что такое видение с алгебраической точки зрения? .....</b>	<b>16</b>
<b>1.4. Выводы .....</b>	<b>21</b>
Г л а в а 2.....	22
АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ 2D-, 3D ИЗОБРАЖЕНИЙ .....	22
<b>2.1. Главные предположения и постановка проблемы .....</b>	<b>23</b>
<b>2.2. Алгебро-геометрические модели 2D изображений.....</b>	<b>29</b>
2.2.1. Главные предположения и постановка проблемы .....	29
2.2.2. Алгебры 2D физического и перцептуального пространства.....	31
2.2.3. Геометрии 2D физического и перцептуального пространств .....	32
2.2.4. Алгебраические модели 2D серых изображений.....	36
2.2.5. Алгебраические модели 2D бихроматических изображений.....	38
<b>2.3. Алгебро-геометрические модели 3D- и 4D изображений .....</b>	<b>42</b>
2.3.1. Предварительные замечания .....	42
2.3.2. Классические кватернионы.....	46
2.3.3. Обобщенные кватернионные алгебры.....	51
2.3.4. Свойства обобщенных кватернионных алгебр.....	53
2.3.5. Кватернионные геометрии.....	56
2.3.6. Кватернионные геометрии физического и перцептуального пространств...59	
2.3.7. Алгебраические модели 4D цветных изображений .....	61
2.3.8. Алгебраические модели 3D изображений.....	64
Г л а в а 3.....	68
ТРИПЛЕТНЫЕ МОДЕЛИ ЦВЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ.....	68
<b>3.1. Цветные изображения.....</b>	<b>69</b>
3.1.1. Что есть цвет?.....	69
3.1.2. Векторное представление цвета .....	74

3.1.3. Векторное представление цветных изображений .....	75
<b>3.2. Триpletная (цветная) алгебра RGB-пространства .....</b>	<b>77</b>
3.2.1. Основы tripletной (цветной) алгебры.....	77
3.2.2. Люминансно-хроматическое представление tripletных чисел .....	82
3.2.3 Геометрическое представление tripletных чисел.....	85
<b>3.3. Геометрия и тригонометрия RGB-пространства .....</b>	<b>90</b>
3.3.1. Геометрия RGB-пространства.....	90
3.3.2. Тригонометрическая форма tripletных чисел.....	92
3.3.3. Экспоненциальная форма tripletных чисел .....	94
3.3.4. Tripletные преобразования RGB-пространства .....	95
<b>3.4. Tripletные модели цветных изображений .....</b>	<b>97</b>
<b>3.5. Преобразования цветных изображений .....</b>	<b>102</b>
3.5.1. Орто-унитарные преобразования изображений .....	103
3.5.2. Орто-унитарные (цветные) всплески.....	104
5.2.2. Орто-унитарные сплайны .....	109
Г л а в а 4.....	112
МУЛЬТИПЛЕТНЫЕ МОДЕЛИ МУЛЬТИКОМПОНЕНТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ.....	112
<b>4.1. Что есть мультицветное и гиперспектральное изображения? .....</b>	<b>112</b>
<b>4.2. Мультиpletная (мультицветная) алгебра .....</b>	<b>115</b>
<b>4.3. Люминансно-хроматическое представление мультиpletных чисел .....</b>	<b>118</b>
<b>4.4. Мультиpletные алгебраические модели мультикомпонентных     изображений .....</b>	<b>120</b>
Г л а в а 5.....	124
КЛИФФОРДОВСКИЕ МОДЕЛИ ГИПЕРСПЕКТРАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ....	124
<b>5.1. Псевдо-Евклидовы пространства.....</b>	<b>126</b>
5.1.1. Определение псевдо-Евклидовых пространств .....	126
5.1.2. Свойства псевдо-Евклидовых пространств.....	128
5.1.3 Пространства Клиффорда .....	131
<b>5.2. Алгебры Клиффорда .....</b>	<b>134</b>
5.2.1. Определение алгебры Клиффорда .....	134
5.2.2. Свойства носителя алгебры Клиффорда .....	141

5.2.3. Псевдоскаляр и центр.....	144
5.2.4. Сопряжение и норма.....	146
5.2.5. Нормы и скалярные произведения.....	149
5.2.6. Множество мнимых единиц .....	151
<b>5.3. Алгебраические модели сигналов и изображений .....</b>	<b>156</b>
5.3.1. Геометрия $m$ -D пространства .....	157
5.3.2. Алгебраические модели $n$ -D изображений .....	158
<b>5.4. Преобразования Фурье Клиффорда.....</b>	<b>163</b>
5.4.1. Дискретные преобразования Фурье-Клиффорда.....	165
5.4.2. Дробные дискретные преобразования Фурье-Клиффорда.....	167
5.4.3. Многопараметрические преобразования Фурье-Клиффорда.....	168
5.4.4. Быстрые многопараметрические преобразования Фурье Клиффорда.....	170
Э П И Л О Г .....	171
Литература.....	172

*“Господь создал целые числа, все остальное дело рук человеческих.”*

Леопольд Кронекер

*“Смотри”, говорят они, “Здесь нечто новенькое!”  
Но нет, это случилось довольно давно, задолго до  
того как мы родились.*

Good News Bible, Eccl.1:10

## **Предисловие**

Одной из ведущих тенденций в науке начала XXI века является стремление к синтезу знаний, полученных в рамках отдельных научных дисциплин и развитие исследований на «стыке наук». Наряду с дисциплинарной организацией науки и усиливающейся ее специализацией идет активное формирование междисциплинарного знания. Возникли и успешно развиваются кибернетическая физика, физическая химия, химическая физика, биологическая химия, биологическая физика и многие другие

Приставка «меж» указывает на наличие некоего провала между дисциплинами, «ничейной земли», не являющейся традиционным объектом исследования ни одной из дисциплин. В этом случае на стыке нескольких научных дисциплин может возникнуть новая дисциплина, способная выявить «ничейный» объект исследования и заимствовать язык и методы из «материнских» дисциплин, порождая новый междисциплинарный инструментарий. Причем «материнские» дисциплины после подобного интегрирования не прекращают своего существования, а лишь обогащаются новыми принципами исследования.

С организационной точки зрения, междисциплинарность понимается как взаимодействие двух или более научных дисциплин, каждая из которых

имеет свой предмет, свою терминологию и методы исследования. Непосредственно такое взаимодействие реализуется в форме работы над конкретными исследовательскими проектами, создания междисциплинарных центров при академических организациях, проведения междисциплинарных конференций, издания проблемно, а не дисциплинарно ориентированных журналов и т. п.

Современная научная литература убедительно свидетельствует о том, что алгебраические методы, совершившие подлинный переворот в чистой математике, оказывают теперь не менее сильное влияние на различные разделы биологии. Примером «алгебраизации биологии» может служить алгебраический подход к генетическому коду. Методы общей алгебры, игравшие большую роль при формировании наиболее абстрактных и глубоких разделов современной математики, в последнее время начали приобретать более важное значение при решении фундаментальных физических и биологических проблем. С их помощью оказывается возможным выделять и изучать общие закономерности у сложных биомолекулярных и когнитивных систем и добиваться удивительно сильных результатов в тех случаях, когда старые аналитические методы оказываются или чрезвычайно громоздкими, или совершенно бессильными. Алгебраическая формулировка физики, информатики и биологии обладает большими преимуществами, как в методическом отношении, так и в отношении выяснения нового подхода к нерешенным проблемам и лучшего понимания математических названных выше теорий. Ныне алгебраические методы по праву можно назвать областью, в которой тесно переплелись интересы биологии, физики и математики.

Вопрос о зарождении и существовании живой материи, в том числе высшего ее проявления – интеллекта и сознания, принадлежит к числу величайших проблем естествознания. Научные исследования, проведенные в последние годы, показывают, что эта проблема созрела для того, чтобы

начать ее комплексное рассмотрение силами математиков, физиков, биологов с использованием современного алгебраического аппарата. Стало понятным, что для проведения подобного рода междисциплинарных научных исследований, необходимо объединение усилий научных коллективов с различной специализацией. Именно эту цель преследует серия коллективных монографий по направлению «Математические основы классической и квантовой теории интеллекта», в которой планируется публикация научных исследований по таинственным и захватывающим проблемам возникновения жизни на Земле, ее эволюции вплоть до возникновения сознания и интеллекта.

В настоящей работе предлагается новый подход к анализу и синтезу систем обработки и распознавания цветных, мультицветных и гиперспектральных изображений, основанный на использовании коммутативных триплетных (мультиплетных) алгебрах и некоммутативных алгебрах Клиффорда. В последние годы выяснилось, что эти алгебры обладают еще неостребованным потенциалом для разработки продвинутых алгоритмов цифровой обработки изображений. Главное достоинство предлагаемого подхода заключается в том, что он опирается на универсальную алгебро-геометрическую теорию и позволяет создавать принципиально новые быстродействующие алгоритмы обработки изображений.

Новый подход к обработке и распознаванию цветных, мультицветных и гиперспектральных изображений, основанный на коммутативных мультиплетных алгебрах и некоммутативных алгебрах Клиффорда в своей основе опирается на три базовых предположения:

- 1 Интерпретация мультиспектральных и гиперспектральных пикселей как гиперкомплексных чисел.
- 2 Интерпретация преобразований цвета, мульти-цвета и гипер-цвета как умножений пикселей на гиперкомплексные числа единичного модуля, которые порождают так называемые перцептуальные преобразования.

3 Интерпретация геометрических изменений в окружающем физическом мире не как матричных преобразований, а как перемножений гиперкомплексных чисел с физическими векторами.

С этой точки зрения предлагаемый подход может быть охарактеризован как универсальный алгебраический метод анализа, обработки и распознавания изображений. В нашем подходе мы основываемся на следующих гипотезах [1-4].

1. Мозг интерпретирует каждый пиксель изображения не как многомерный вектор, а как многомерное гиперкомплексное число. Если мы допускаем существование векторной природы пикселей, то можно пойти и дальше: допустить возможность умножения этих векторов. Тем самым мы не опровергаем векторную природу пикселя, а обогащаем ее дополнительными математическими возможностями. Речь идет о расширении возможностей математического языка описания реальной действительности за счет введения операции умножения пикселей.

2. Для решения двух типов задач мозг животных использует два типа гиперкомплексных алгебр на двух уровнях головного мозга. А именно, он использует коммутативные мультиплетные алгебры для обработки цветных и многокомпонентных изображений на уровне ретины глаза и некоммутативные алгебры Клиффорда - для распознавания таких изображений в высших разделах головного мозга (в так называемом отделе “Visual Cortex”).

3. Визуальные системы животных с различной эволюционной историей используют различные коммутативные гиперкомплексные алгебры и алгебры Клиффорда для обработки и распознавания цветных и мультиспектральных изображений.

Мы знаем, что животные способны почти мгновенно и эффективно распознавать окружающие объекты. Для инженера важно описать это явление на таком математическом языке, который позволил бы ему

построить техническую систему способную работать не менее эффективно, чем исходная биологическая система, а вопрос об адекватности, используемой математической модели для инженера (в отличие от биолога и физика) стоит на втором плане.

Главной целью настоящей работы является демонстрация того факта, что Природа (возможно посредством эволюции) научалась использовать свойства алгебр Клиффорда для конструирования различных визуальных систем животных.

-

PDF

<http://vikchas.ru/Uploads/Biblioteka/MonografMI.pdf>



## Глава 1.

# ГЛАВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

### 1.1. Мультиспектральные и гиперспектральные изображения

В настоящей работе термины «мультиспектральные и гиперспектральные изображения» используются для изображений с более чем одной компонентой. Они представляют собой пакет (серию) изображений, полученных оптическими датчиками в различных частотных диапазонах с длинами волн  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , называемыми спектральными каналами, где  $k$  - число различных оптических каналов [5-8]. Мультицветная техника использует малое число спектральных компонент (меньше, чем  $k=10$ ). Гиперспектральные системы используют несколько десятков и даже сотен спектральных каналов. Гиперспектральная камера формирует пакет из  $k$  одноканальных изображений, каждое из которых получено в одном спектральном диапазоне. В этом случае формируется так называемый “3-мерный куб” с тремя координатными направлениями  $(x, y, \lambda)$ - (две пространственные координаты  $(x, y)$ , а третья  $\lambda$  – спектральная).

Каждый пиксель в  $(x, y, \lambda)$ -кубе, представляет собой дискретный спектр, измеренный на длинах волн  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  и наблюдаемый в точке  $(x, y)$  двумерной сцены. Подобные изображения могут быть охарактеризованы как изображения, состоящие из  $k$ -мерных ( $k$ -D) векторно-значных пикселей:

$$\vec{f}(x, y) = (f_{\lambda_1}(x, y), f_{\lambda_2}(x, y), \dots, f_{\lambda_k}(x, y)) = (f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_k(x, y)).$$

Цветное RGB изображение (3-канальное или 3-компонентное изображение) является примером такого изображения:

$$\vec{f}_{Col}(x, y) = (f_R(x, y), f_G(x, y), f_B(x, y)) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)),$$

где каждый пиксель характеризуется тремя положительными вещественными числами-компонентами R(red)  $f_R(x, y)$ , G (green)  $f_G(x, y)$  и B (blue)  $f_B(x, y)$ .

В алгебраическом подходе каждый пиксель интерпретируется не как многомерный векторный пиксель, а как многомерное гиперкомплексное число. Например, мозг человека использует триплетные алгебры для обработки цветных изображений и 8-мерные алгебры Клиффорда для их распознавания. С этой точки зрения визуальные системы животных, состоящие из глаз и отдела “Visual Cortex” головного мозга, могут рассматриваться как “компьютеры, работающие в алгебрах Клиффорда”. Заметим, что эти предположения (как старое традиционное векторное представление, так и новое оригинальное гиперкомплексное представление) являются гипотезами, неподтвержденными экспериментами. Векторная природа более привычна, в то время как гиперкомплексная – более экзотична в силу ее новизны. Какое из этих представлений точнее отражает реальную действительность, покажут дальнейшие эксперименты.

В настоящее время мы знаем, что животные способны почти мгновенно и эффективно распознавать окружающие объекты. Для инженера важно описать явление на таком математическом языке, который бы позволил ему построить техническую систему способную работать не менее эффективно, чем биологическая система, а вопрос об адекватности, используемой математической модели для инженера (в отличие от биолога), стоит на втором плане.

## 1.2. Как головной мозг распознает объекты внешнего мира?

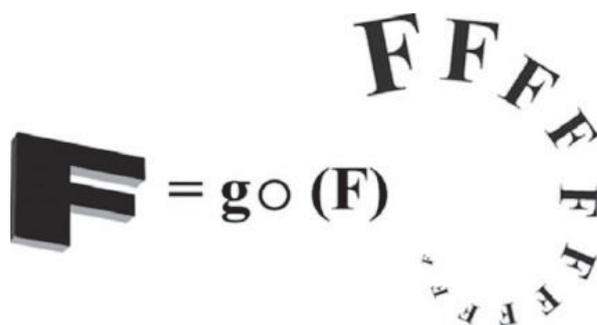
Как было отмечено выше, предлагаемый подход к гиперспектральным изображениям основывается на теории коммутативных гиперкомплексных алгебр и на некоммутативных алгебрах Клиффорда. Классические двумерные комплексные числа могут быть расширены до многомерных гиперкомплексных чисел, которые делятся на два класса: коммутативные и некоммутативные [9-13]. В настоящее время гиперкомплексные алгебры играют центральную роль как в теоретической физике, квантовых вычислениях, в обработке сигналов и изображений, так и в самой математике. Среди различных типов гиперкомплексных чисел, множество так называемых триплетных чисел и чисел Клиффорда имеют специальный статус, потому что первые описывают цветные изображения, возникающие на ретине глаза, а вторые описывают изображения в головном мозге и используются им для различных геометрических и цветовых преобразований этих изображений на “экране” сознания.

Одной из главных и интересных проблем информатики является выяснение того факта, каким образом головной мозг животных обрабатывает цветные и многоспектральные изображения, а также распознает объекты внешнего мира. Мы знаем, что животные с различными эволюционными историями имеют цветные визуальные системы различной размерности. Например, приматы имеют двуххроматические или трихроматические визуальные системы. Рептилии имеют многомерные (многоканальные) визуальные системы. Визуальная система черепах имеет пять типов цветных фоторецепторов (R,G,B, DC,UV). Креветки имеют наибольшую известную размерность у визуальной системы. Она содержит десять различных цветных фоторецепторов, предназначенных для распознавания тонких деталей внешнего мира.

Практика показывает, что мозг животных успешно обрабатывает цветные и многоспектральные изображения и распознает объекты в

различной позиции, при различных ракурсах, при различной иллюминации и при различной цветовой насыщенности. Но как это делает мозг? Как мы видим? Как мы распознаем постоянно движущиеся и изменяющиеся в пространстве и во времени объекты внешнего мира? Движущийся объект фиксируется на сетине как последовательность различных двумерных изображений. Ни одно из этих изображений не дает истинного представления об истинной форме и истинном цвете самого объекта. Но поскольку животные и человек весьма успешно распознают объекты внешнего мира, то это означает, что последовательность двумерных изображений, возникающих на сетине, все-таки содержит «НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ», характерные и уникальные для наблюдаемого изображения, которые не меняются при различных преобразованиях объекта. Благодаря именно таким признакам наблюдаемый объект распознается как единое целое. Эти уникальные признаки называются ИНВАРИАНТАМИ.

Поэтому технические видеосистемы должны быть способны вычислять инварианты изображений по отношению к широкому кругу цветовых и геометрических преобразований, даже если эти изображения являются не только серыми или цветными, но и многоспектральными (где число каналов больше 100).

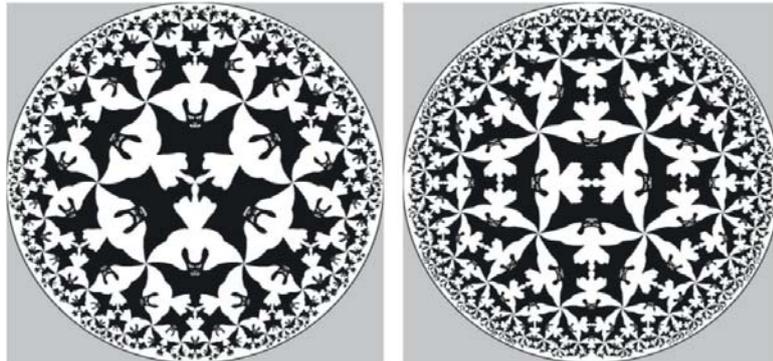


**Рис 1.1.** Геометрически искаженные версии буквы «F»

Например, все буквы «F» на рис 1.1 мозг распознает как одну и ту же букву, несмотря на различные позиции их, на плоскости и, несмотря на

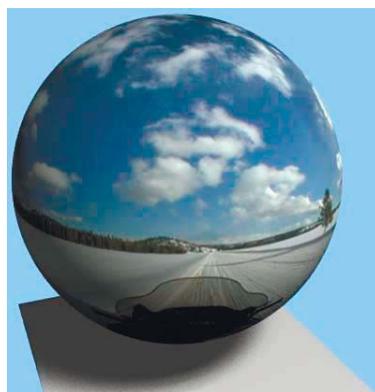
различный их размер (т.е. несмотря на то, что они были подвергнуты различным геометрическим преобразованиям).

Это свидетельствует о том, что, во-первых, геометрически преобразованные буквы «F» содержат инвариантные признаки, не меняющиеся при геометрических преобразованиях и, во-вторых, наш мозг способен вычислять эти инварианты и использовать их для распознавания.



**Рис. 1.2.** Геометрические преобразования в неевклидовом пространстве

На рис. 1.2 мы видим сдвинутые и повернутые изображения летучей мыши по законам гиперболической (неевклидовой геометрии). Все геометрически преобразованные мыши распознаются и интерпретируются как одна и та же мышь. Это означает, что, несмотря на то, что мы живем в трехмерном евклидовом пространстве, наш мозг способен распознавать



**Рис. 1.3.** Изображения на сферической плоскости Римана

объекты, подвергнутые неевклидовым преобразованиям, вычисляя признаки распознаваемых объектов, инвариантные относительно этих преобразований.

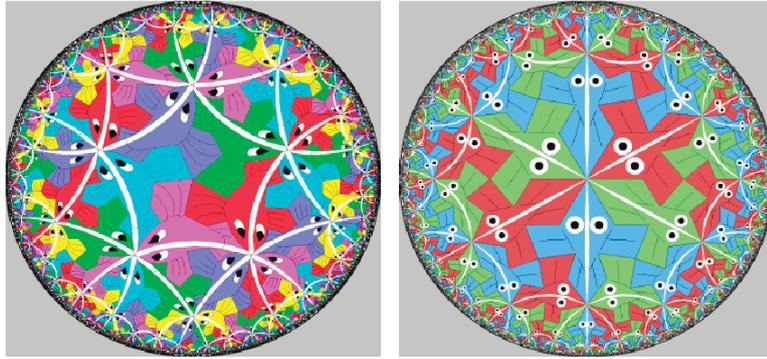
На рис. 1.3 мы видим сферическую плоскость Римана (плоскость положительной кривизны). Объекты, представленные на этой геометрии, также легко распознаются нашим мозгом. Этот факт означает, что наш мозг способен распознавать объект, живущие в мире Римана с положительной кривизной, а наш мозг способен выделять инварианты, по отношению к группе движений плоскости Римана. На рис. 1.4 представлен один и тот же букет цветов, освещенный источниками света с различными спектральными составами, которые меняют цветовой тон, насыщенность и яркость букета. Несмотря на это, наш мозг распознает эти букеты как один и тот же букет.



**Рис. 1.4.** Инвариантность (константность) восприятия по отношению к цветовым преобразованиям объекта

Это означает, что наш мозг способен выделять инвариантные признаки из картинок, которые не меняются при цветовых преобразованиях.

И, наконец, на рис. 1.5. мы видим разноцветные фигуры летающих рыб, каждая из них сдвинута и повернута друг по отношению к другу по законам гиперболической геометрии. Но все фигуры, принадлежащие одному и тому же рисунку, воспринимаются мозгом как один и тот же объект, несмотря на различную их раскраску и их различные геометрические преобразования.



**Рис. 1.5.** Инвариантность (константность) восприятия по отношению к цветовым и геометрическим преобразованиям объекта

Этот факт означает, что все фигуры содержат одинаковые признаки инвариантные относительно всех их световых и геометрических (не-Евклидовых) различий. Очевидно, что системы технического зрения, точно также как глаза и мозг, должны быть способны вычислять инварианты изображений по отношению к широкому кругу цветовых и геометрических евклидовых и неевклидовых преобразований.

### **1.3. Что такое видение с алгебраической точки зрения?**

На основании этих наблюдений можно сделать несколько выводов и сформулировать ряд гипотез относительно того, что представляет собой жизнь и «видение» (ощущение) внешнего Мира с алгебраической точки зрения.

1. Наша способность видеть МИР, и даже само существование ЖИЗНИ возможны по одной единственной причине: МИР в некоторых своих аспектах изменяем (вариабелен), а в каких-то аспектах неизменен (инвариантен).

2. Если бы МИР был абсолютно неизменен (“заморожен”) и в нем бы ничто не менялось, то в таком МИРЕ не смогла бы зародиться жизнь с ее “глазами”, способными наблюдать за этим МИРОМ.

3. Если бы МИР непрерывно менялся, то и в таком МИРЕ не могла бы существовать ЖИЗНЬ: раз возникнув, она должна бы была мгновенно погибнуть и перед ее “глазами”, промелькнул бы только один миг, за который она не смогла бы разглядеть всей красоты вечно меняющегося МИРА.

На основании этих выводов мы можем задать несколько вопросов и сделать ряд предположений относительно того, что представляет собой жизнь и интеллект с алгебраической точки зрения.

1. Это умение вычислять инвариантные свойства объектов и процессов, протекающих в МИРЕ и выявлять в нем инвариантные причинно-следственные связи. Вся совокупность инвариантных свойств и инвариантных причинно-следственных связей, выявленных живым организмом, формирует его “БАЗУ ЗНАНИЙ”, которая составляет одну из важнейших частей ИНТЕЛЛЕКТА живого организма. “БАЗА ЗНАНИЙ” живого организма, а значит, и уровень его ИНТЕЛЛЕКТА, зависит от совокупности накопленных инвариантных причинно-следственных связей, от сложности той ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ НИШИ, в которой он обитает и от сложности той группы преобразований, которая действует в пределах этой ниши.

2. Это способность запоминать “БАЗУ ЗНАНИЙ”, а также передавать ее по наследству с целью опережающего отражения окружающего МИРА и успешной адаптации к изменениям в нем (согласно принципу Анохина).

3. Третье отличительное свойство: это эволюционное накопление все новых и новых инвариантных причинно-следственных связей, т.е. совершенствование “БАЗЫ ЗНАНИЙ”. Согласно принципу Джеймса Дана, эволюция живой материи идет по пути совершенствования центральной нервной системы (ЦНС) и мозга. Этот принцип назван Даном процессом цефализации живой материи. “БАЗА ЗНАНИЙ” живого организма, а значит, и уровень его ИНТЕЛЛЕКТА, зависит от а) совокупности накопленных

инвариантных причинно-следственных связей, б) от сложности той ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ НИШИ, в которой он обитает и в) от той группы преобразований, которая действует в пределах этой НИШИ.

4. Один раз достигнутый эволюцией уровень ЦНС и мозга не идет уже вспять, а может идти только вперед. Эволюция живой материи связана либо с ее переходом из одной экологической ниши в другую, либо с началом действия в исходной нише новой более сложной группы преобразований. В обоих случаях живой материи приходится вычислять новые инвариантные свойства новой ниши, либо выделять новые причинно-следственные связи, появившиеся в связи с действием новой группы преобразований пределах старой ниши.

В связи с изложенным интересно получить ответы на следующие вопросы.

1. Как возникает сознание в процессе антропогенеза (в процессе эволюции)? Известный философ Гильберт Райл назвал проблему сознания и мозга “догмой призрака в машине”. Пользуясь этой метафорой можно задаться вопросом: почему и когда человек в процессе эволюционного развития подхватил “заразу” в виде этого “призрака”? Почему этот ”призрак” не встретился другим живым существам на их эволюционных дорожках? Обладает ли сознанием только человек или же им наделены и другие живые существа? Почему и для чего “призрак” поджидал человека? Почему именно человек получил приоритетное право быть носителем сознания?

2. Подкараулив человека как сознание (призрак) возникает в онтогенезе (т.е. в процессе индивидуального развития)? Оно уже в скрытой форме существует в человеке сразу при его рождении или возникает в процессе его становления? При каких условиях и вследствие чего возникает сознание у человека? Что послужило доминирующей причиной возникновения сознательной формы жизни? Какая группа преобразований, действующая в экологической нише человекоподобных обезьян, заставила последнюю

превратиться в человека разумного? Что представлял собой этот драматический момент в эволюции живой материи на Земле с алгебраической точки зрения? Наиболее популярны среди психологов и философов объяснение возникновения сознания на основе биологической целесообразности, которая диктуется требованиями приспособления к изменению условий внешней среды. Вроде как сознание – это высшая форма адаптации и приспособления в эволюционном развитии. Такое объяснение ни чем не лучше божественного происхождения жизни вообще и сознательной, в частности. Действительно, не имея сознания и руководствуясь наследственно заложенными в “БАЗЕ ЗНАНИЙ” программами поведения, современные животные, некоторые из которых, зародились задолго до появления человека, прекрасно пережили все изменения, происходившие в истории Земли. Они успешно адаптировались к современным условиям, выявляя вновь появляющиеся инвариантные причинно-следственные связи и совершенствуя свою “БАЗУ ЗНАНИЙ”, но у них почему-то не появилось СОЗНАНИЯ.

3. Какая группа преобразований, действующая в экологической нише человекоподобных обезьян, заставила последних превратиться в человека разумного? Что представлял собой этот драматический момент в эволюции живой материи на Земле с алгебраической точки зрения?

4. По мнению палеонтологов, подготовительный период, в течение которого формировались предпосылки возникновения сознания, длился 1,5 млн. лет. Люди со всей полнотой человеческой специфики появились всего 40—35 тысяч лет тому назад. Окончательное оформление Человека Разумного (*Homo Sapiens*) произошло примерно 25-20 тысяч лет тому назад. Именно в этот период человек “подхватил” заразу в виде “призрака” - сознания. Но палеонтологи не заметили никаких катастрофических изменений в составе живого мира Земли, в тот момент, когда у человека появилось сознание. Не отмечены слишком уж существенные изменения

условий внешней среды на Земле, которые поставили бы существующий в то время живой мир на грань выживания и в категорической форме потребовали у единственного рода человекообразных обезьян возникновения сознания как высшей формы адаптации, без наличия которой эти обезьяны прекратили бы свое существование. Апелляция к тому, что, мол, сознание позволяет выжить человеческой особи, не может быть признана научным обоснованием. Достаточно сходить в зоопарк и посмотреть на мартышек, горилл и орангутангов. Почему же и как возникло сознание? Для чего это стало необходимым, ведь все, что обнаруживает себя в потоке жизни, является необходимым? Разве это не так? Или, может быть, это просто случайность? Но тогда это счастливая и очень интересная случайность, достойная самого пристального изучения.

5. Вся деятельность человека направлена на стабилизацию своей экологической ниши (попыткой сделать ее максимально комфортной), что препятствует возникновению в ней новых более сложных преобразований, являющихся причиной биоэволюции. Интересно знать, спровоцирует ли устранение алгебраических причин биоэволюции возникновение биоэволюционного тупика в развитии человека? Что будет означать этот тупик?

6. С появлением человека разумного, освоением им всех экологических ниш Земли и прекращением “борьбы за существования” БИОСФЕРА (места существования живой материи) трансформировалась в соответствии с представлениями Вернадского в НООСФЕРУ, состоящую из биосферы, “МИРА ВЕЩЕЙ” (созданных человеком), а также из “МИРА ИДЕЙ” (мира Платона). В МИРЕ ИДЕЙ стала накапливаться БАЗА ЗНАНИЙ человеческой цивилизации. Таким образом, процесс цефализации, по-видимому, перешел в эволюцию ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА. Означает ли это, что эволюционного тупика не будет, а начнется эволюция ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА?

## 1.4. Выводы

Надо признать, что по сей день, нет удовлетворительных ответов на перечисленные выше вопросы. Но тем не менее интересен вопрос о формировании инвариантных причинно-следственных связей. В настоящей работе излагаются математические основы новой теории гиперкомплексно-значных инвариантов, остающихся неизменными при различных геометрических (Евклидовых и не-Евклидовых) искажениях. Во второй части работы будет доказано, что вычисление подобных инвариантов можно осуществлять с использованием теоретико-числовых преобразований Фурье-Клиффорда, сверхбыстрая реализация которых возможна на квантовых компьютерах. Это обстоятельство объясняет причину сверхбыстрого распознавания объектов окружающего мира. С этой точки зрения визуальные системы животных, состоящие из глаз и отдела “Visual Cortex” головного мозга, могут рассматриваться как “ компьютеры, работающие в алгебрах Клиффорда”



## Глава 2

# АЛГЕБРО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ 2D-, 3D ИЗОБРАЖЕНИЙ

В основу этой главы положено предположение о том, что мозг оперирует гиперкомплексными числами, когда обрабатывает изображения и распознает объекты, присутствующие в этом изображении. Гиперкомплексные алгебры являются обобщениями комплексных, кватернионы и октавных алгебр. Их алгебраическая природа должна соответствовать свойствам физического и перцептуального пространств. Для распознавания 2D, 3D и  $nD$  изображений мы превращаем физические пространства  $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$  и  $\mathbf{R}^n$  в соответствующие им алгебры Клиффорда гиперкомплексных чисел (и называем их пространственными алгебрами). При этом изменения в окружающем нас мире (такие как геометрические преобразования в виде трансляций, вращений и масштабных искажений) могут быть описаны на языке пространственных алгебр как действия на физических пространствах  $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$  и  $\mathbf{R}^n$  некоторой совокупности гиперкомплексных чисел, образующих пространственные - спинорные группы Клиффорда. Мы предполагаем, что мозг человека может использовать спинорные группы для реализации ментальных движения образов, возникающих на экране сознания, когда, например, человек спит или когда он в состоянии измененного сознания видит галлюцинации.

## 2.1. Главные предположения и постановка проблемы

Многоканальные изображения нашли широкое применение в системах дистанционного зондирования Земли при решении различных научных и прикладных задач [5-8]. В этой работе мы предлагаем новые модели многоканальных изображений с использованием коммутативных гиперкомплексных алгебр. Термин “многоканальные” изображения используется для обозначения изображений с более чем одной компонентой. Они формируются из ряда изображений  $f_{\lambda_0}(\mathbf{x}), f_{\lambda_1}(\mathbf{x}), \dots, f_{\lambda_{k-1}}(\mathbf{x})$ , полученных в различных оптических диапазонах с длинами волн  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ , называемых спектральными каналами, где  $k$  – число различных каналов. Простым примером является цветное изображение  $\mathbf{f}_{Col}(x, y) = (f_R(x, y), f_G(x, y), f_B(x, y))$  с красной  $f_R(x, y)$ , зеленой  $f_G(x, y)$  и голубой  $f_B(x, y)$  компонентами. Если изображение собрано из нескольких единиц каналов (меньше, чем 10), то оно называется мультиспектральным, в то время как изображение, состоящее из нескольких десятков или сотен каналов, называется гиперспектральным (конечно, это деление носит условный характер). Многоканальные изображения рассматриваются как  $n$ -D  $k$ -компонентные сигналы:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{k-1}(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{V}^k$$

со значениями, лежащими в  $k$ -D перцептуальном векторном пространстве  $\mathbf{V}^k$ , где  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ .

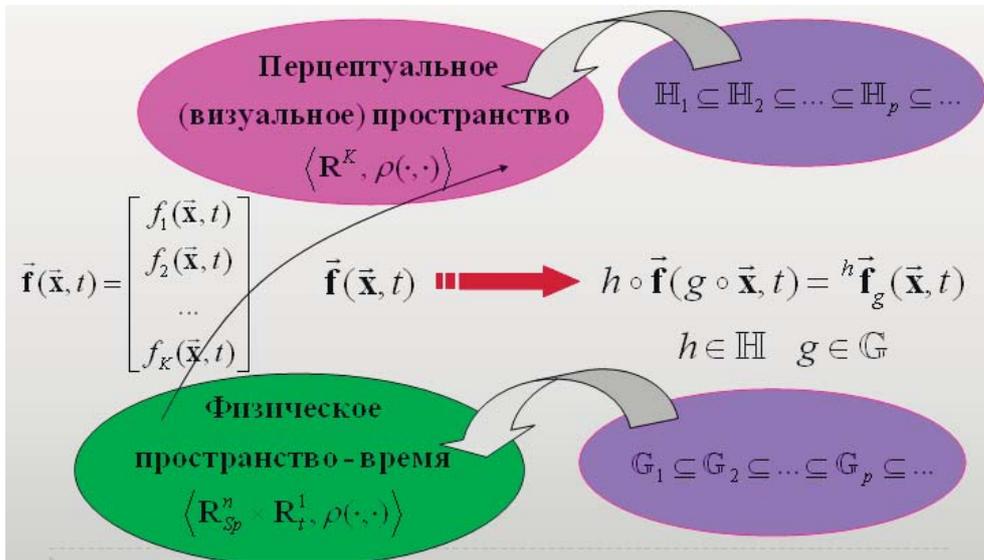
В действительности изображение меняется во времени. Поэтому его моделью является изменяющаяся функция времени (см. рис. 2.1):

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = (f_0(\mathbf{x}, t), f_1(\mathbf{x}, t), \dots, f_{k-1}(\mathbf{x}, t)) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{V}^k.$$

Нетрудно видеть, что основными атрибутами изображения являются:

- 1) Физическое пространство-время  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1$  – область определения изображения.

- 2) Перцептуальное пространство  $V^k$  – область значений изображения.
- 3) Возрастающая по сложности последовательность групп преобразований физического пространства-времени  $R^n \times R^1$   $\mathfrak{G}: G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_p \subseteq \dots$   $G_l \in \mathfrak{G}$ .
- 4) Возрастающая по сложности последовательность  $\mathfrak{H}: H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_p \subseteq \dots$  групп преобразований  $H_p \in \mathfrak{H}$  перцептуального пространства  $V^k$ .
- 5) На каждом историческом этапе действует некоторая пара групп  $G_l$  и  $H_m$ .



**Рис. 2.1.** Основные атрибуты изображения: физическое пространство-время  $R^n$  – область определения изображения; перцептуальное пространство  $V^k$  – область значений изображения; возрастающая по сложности последовательность групп  $\mathfrak{G}: G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_p \subseteq \dots$  преобразований физического пространства-времени  $R^n$ ; возрастающая по сложности последовательность  $\mathfrak{H}: H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_p \subseteq \dots$  групп преобразований перцептуального пространства  $V^k$ .

В результате действия двух групп  $G_l$  и  $H_m$  преобразований физического пространства-времени  $R^n \times R^1$  и визуальном пространстве  $V^k$ , соответственно, возникающие на сетине глаза изображения

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = (f_0(\mathbf{x}, t), f_1(\mathbf{x}, t), \dots, f_{k-1}(\mathbf{x}, t))$  искажаются  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \rightarrow h \circ \mathbf{f}(g \circ \mathbf{x}, t) = {}^h \mathbf{f}_g(\mathbf{x}, t)$  под действием двух преобразований  $g \in \mathbb{G}_l, h \in \mathbb{H}_m$ .

Первое преобразование  $g \in \mathbb{G}_l$  действует в физическом пространстве-времени  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^1$  и принадлежит некоторой группе преобразований  $\mathbb{G}_l$  этого пространства-времени. Именно эта группа на данном историческом этапе важна для выживания организма. Второе преобразование  $h \in \mathbb{H}_m$  действует в перцептуальном пространстве и принадлежит другой группе преобразований  $h \in \mathbb{H}_m$ , которая действует в перцептуальном (визуальном) пространстве. Эта группа преобразований также важна на данном историческом этапе для выживания рассматриваемого организма. Группы преобразований  $\mathbb{G}_l$  и  $\mathbb{H}_m$  характерны для некоторого исторического периода развития организма. При переходе к следующему периоду эти группы меняются  $\mathbb{G}_l \rightarrow \mathbb{G}_{l+1}$  и  $\mathbb{H}_m \rightarrow \mathbb{H}_{m+1}$ . При прогрессивном развитии организмов группы  $\mathbb{G}_{l+1}, \mathbb{H}_{m+1}$  более сложные, чем группы  $\mathbb{G}_l, \mathbb{H}_m$ .

Визуальная система живого организма должна идентифицировать искаженное изображение, т.е. должна произвести обратное преобразование  ${}^h \mathbf{f}_g(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ , не зная при этом ни  $h \in \mathbb{H}_m$ , ни  $g \in \mathbb{G}_l$

В данной работе мы рассматриваем фиксированный период развития визуальных систем живых организмов и рассматриваем следующие случаи наиболее интересные для нас:

- 2-D и 3-D бихроматические изображения

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2), f_1(x_1, x_2)): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}^2,$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2, x_3), f_1(x_1, x_2, x_3)): \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}^2.$$

- 2-D и 3-D трихроматические (цветные) изображения

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2), f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}_{rgb}^3,$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2, x_3), f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3)): \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}_{rgb}^3.$$

- 2-D и 3-D  $k$ -канальные изображения

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2), f_1(x_1, x_2), \dots, f_{k-1}(x_1, x_2)) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}^k,$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_0(x_1, x_2, x_3), f_1(x_1, x_2, x_3), \dots, f_{k-1}(x_1, x_2, x_3)) : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{V}^k.$$

- 2-D и 3-D бихроматические бинокулярные (двухкамерные) изображения

$$\mathbf{f}^{Bin}(x_1, x_2) = (\mathbf{f}^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^2 \rightarrow {}^L\mathbf{V}^2 \oplus {}^R\mathbf{V}^2,$$

$$\mathbf{f}^{Bin}(x_1, x_2, x_3) = (\mathbf{f}^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^3 \rightarrow {}^L\mathbf{V}^2 \oplus {}^R\mathbf{V}^2.$$

- 2-D и 3-D трихроматические (цветные) бинокулярные изображения

$$\mathbf{f}^{Bin}(x_1, x_2) = (\mathbf{f}^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^2 \rightarrow {}^L\mathbf{V}_{rgb}^3 \oplus {}^R\mathbf{V}_{rgb}^3,$$

$$\mathbf{f}^{Bin}(x_1, x_2, x_3) = (\mathbf{f}^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^3 \rightarrow {}^L\mathbf{V}_{rgb}^3 \oplus {}^R\mathbf{V}_{rgb}^3.$$

- 2-D и 3-D  $k$ -канальные бинокулярные изображения

$$\mathbf{f}^{Bin}(x_1, x_2) = (\mathbf{f}^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^2 \rightarrow {}^L\mathbf{V}^k \oplus {}^R\mathbf{V}^k,$$

$$\mathbf{f}^{Bin}(x_1, x_2, x_3) = (\mathbf{f}^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}^R(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^3 \rightarrow {}^L\mathbf{V}^k \oplus {}^R\mathbf{V}^k,$$

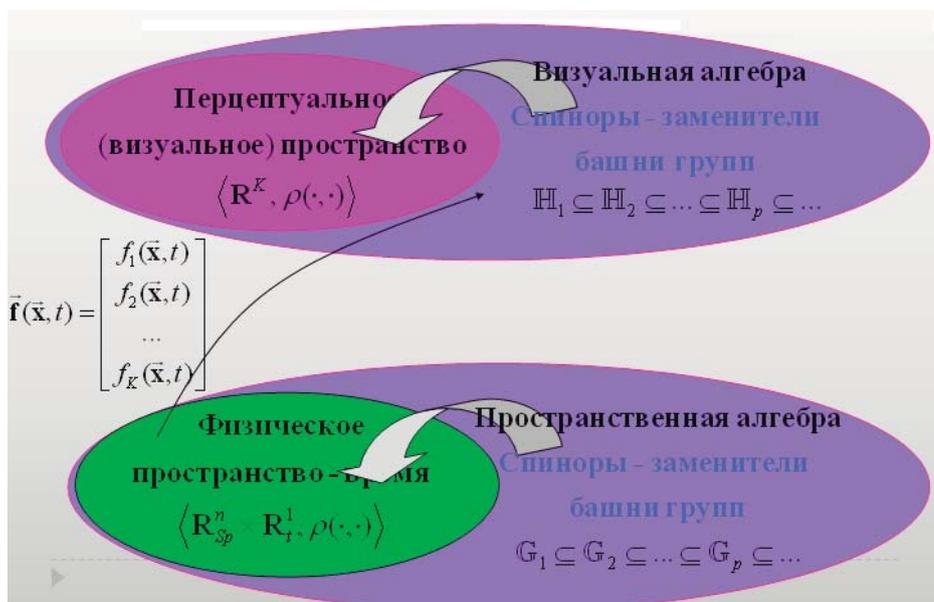
где  $\mathbf{f}^L(\mathbf{x}), \mathbf{f}^R(\mathbf{x})$  – изображения на сетине левого и правого глаз.

Для обработки и распознавания изображений мы превращаем физическое и перцептуальное пространства ( $\mathbf{R}^n$  и  $\mathbf{V}^k$ ) в гиперкомплексные алгебры (см. рис. 2.2):

$$\begin{aligned} & \vec{\mathbf{f}}(\underbrace{x_0 I_0 + x_1 I_1 + \dots + x_{n-1} I_{n-1}}_{\substack{n\text{-мерное} \\ \text{гиперкомплексное пространственное} \\ \text{число}}}) = \\ & = \underbrace{J_0 \cdot f_0(x_0 I_0 + x_1 I_1 + \dots + x_{n-1} I_{n-1}) + \dots + J_{k-1} \cdot f_{k-1}(x_0 I_0 + x_1 I_1 + \dots + x_{n-1} I_{n-1})}_{\substack{k\text{-мерное} \\ \text{гиперкомплексное число}}} \\ & = \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} J_i \cdot f_i(x_0 I_0 + x_1 I_1 + \dots + x_{n-1} I_{n-1})}_{\substack{k\text{-мерное} \\ \text{гиперкомплексное гиперцветное число}}}. \end{aligned}$$



могут быть описаны на языке пространственных алгебр как действия на физических пространствах  $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$  и  $\mathbf{R}^n$  некоторой совокупности гиперкомплексных чисел, образующих пространственные группы Клиффорда. Мы предполагаем, что мозг человека может использовать эти группы для реализации ментальных движения образов, возникающих на экране сознания, когда, например, человек спит или когда он в состоянии измененного сознания видит галлюцинации.



**Рис. 2.3.** Основные атрибуты изображения: физическое пространство-время  $\mathbf{R}^n$ , погруженное в пространственно-временную алгебру, перцептуальное (визуальное) пространство  $\mathbf{V}^k$ , погруженное в визуальную алгебру.

Аналогично мы поступаем с перцептуальным пространством  $\mathbf{V}^k$ . Для обработки и распознавания изображений мы превращаем его в соответствующую гиперкомплексную алгебру (и называем ее перцептуальной алгеброй).

Мы разрабатываем алгебраические модели для двух уровней мозга (первый уровень – ретина, второй – Visual Cortex), используя различные гиперкомплексные алгебры: коммутативные – для первого уровня, где идет обработка и преобразование изображения и некоммутативные – для второго

уровня, где происходит их распознавание. Привлечение некоммутативных алгебр связано с тем, что многие геометрические преобразования изображений (совместные растяжения, вращения, аффинные, проективные) принадлежат некоммутативным группам. Оказывается, что каждое такое преобразование можно описать подходящим многомерным гиперкомплексным числом (например, кватернионом – для вращения 3-D изображений). Одна из наших гипотез состоит в том, что мозг животных должен иметь врожденные знания о подобных числах и уметь ими оперировать в режиме распознавания образов. В следующем томе нашей работы мы покажем, что алгебраические модели многоканальных изображений позволяют разрабатывать простые, наглядные и эффективные (с вычислительной точки зрения) инвариантные алгоритмы распознавания таких изображений с использованием быстрых преобразований Фурье-Клиффорда-Галуа.

## 2.2. Алгебро-геометрические модели 2D изображений

**2.2.1. Главные предположения и постановка проблемы.** Изображения  $\mathbf{f}(x_1, x_2) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}^2$  обладают двумя атрибутами: физическим  $\mathbf{R}^2$  и визуальным  $\mathbf{V}^2 = \mathbf{R}^2$  пространствами, где  $\mathbf{R}$  - алгебра вещественных чисел. В настоящем разделе мы предлагаем интерпретировать 2D изображения  $\mathbf{f}(x_1, x_2)$  как сигналы, зависящие от обобщенных комплексных переменных и принимающие аналогичные значения. С этой целью мы оснащаем пространства  $\mathbf{R}^2$  и  $\mathbf{V}^2 = \mathbf{R}^2$  структурами следующих 2D алгебр (так называемых обобщенных комплексных чисел [9-13])  $\text{Alg}_2^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | I)$  и  $\text{Alg}_2^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | J)$ , соответственно:

$$\mathbf{R}^2 \rightarrow \text{Alg}_2^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | I) := \mathbf{R} + \mathbf{R}I = \{ \mathbf{x} = x + Iy \mid x, y \in \mathbf{R} \},$$

$$\mathbf{V}^2 \rightarrow \text{Alg}_2^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | J) := \mathbf{R} + \mathbf{R}J = \{ \mathbf{f} = f + Jg \mid f, g \in \mathbf{R} \},$$

где  $I, J$  - обобщенные мнимые единицы  $I^2 = \delta_1 = -1, 0, +1$  и  $J^2 = \delta_2 = -1, 0, +1$ .

Здесь числа  $p_-$  и  $u_-$  показывают количество мнимых единиц со свойствами  $I^2 = \delta_1 = -1$  и  $J^2 = \delta_2 = -1$ , числа  $q_+$  и  $v_+$  - количество единиц со свойствами  $I^2 = \delta_1 = +1$  и  $J^2 = \delta_2 = +1$ , наконец, числа  $r_0$  и  $w_0$  - количество мнимых единиц со свойствами  $I^2 = \delta_1 = 0$  и  $J^2 = \delta_2 = 0$ . Очевидно, что обе суммы  $p_- + q_+ + r_0$  и  $u_- + v_+ + w_0$  в данном случае должны равняться 1. В общем случае мы имеем алгебры, зависящие от большего числа мнимых единиц  $\mathcal{Alg}_2^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | I_1, I_2, \dots, I_n)$  и  $\mathcal{Alg}_2^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | J_1, J_2, \dots, J_m)$ . В этом случае мы будем иметь следующие равенства  $p_- + q_+ + r_0 = n$  и  $u_- + v_+ + w_0 = m$ .

Таким образом, мы получаем следующую алгебро-геометрическую модель 2D изображения:  $f(x_1, x_2): \mathcal{Alg}_2^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | I) \rightarrow \mathcal{Alg}_2^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | J)$  или

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1 + Ix_2) = f(x + Iy) + Jg(x + Iy)$$

В частности, серые 2D изображения  $f(x_1, x_2): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}$  имеют следующее представление  $f(x_1 + Ix_2): \mathcal{Alg}_2^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | I) \rightarrow \mathbf{R}$ . Очевидно, что алгебры  $\mathcal{Alg}_2^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | I)$  и  $\mathcal{Alg}_2^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | J)$  изоморфны и поэтому мы имеем возможность обозначить обе алгебры одним символом:

$$\mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | K) = \begin{cases} \mathcal{Alg}_2^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | I), & K = I, \\ \mathcal{Alg}_2^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | J), & K = J. \end{cases}$$

Переменную, принадлежащую алгебре  $\mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | K)$ , будем обозначать символом  $\mathbf{z} = v + Kw \in \mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | K)$ . Она может принимать два облика

$$\mathbf{z} = v + Kw = \begin{cases} \mathbf{x} = x + Iy \in \mathcal{Alg}_2^{Sp(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | I), \\ \mathbf{f} = f + Jg \in \mathcal{Alg}_2^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | J). \end{cases}$$

С помощью алгебры  $\mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | K)$  мы изучим общие алгебраические свойства областей определения и значений изображений.

## 2.2.2. Алгебры 2D физического и перцептуального пространства.

Перед нами стоит задача изучения свойств алгебры  $\mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | K)$ .

Существует три таких алгебры [14-19]:

- $\mathcal{Alg}_2^{(1,0,0)}(\mathbf{R} | K_-) = \mathbf{COM} = \{z = v + K_- w = |v, w \in \mathbf{R}; K_-^2 = -1\}$  - поле комплексных чисел, где  $K_-^2 = -1$ .
- $\mathcal{Alg}_2^{(0,1,0)}(\mathbf{R} | K_+) = \mathbf{DOU} = \{z = v + K_+ w = |v, w \in \mathbf{R}; K_+^2 = -1\}$  - кольцо двойных чисел, где  $K_+^2 = +1$ .
- $\mathcal{Alg}_2^{(0,0,1)}(\mathbf{R} | K_0) = \mathbf{DUA} = \{z = v + K_0 w = |v, w \in \mathbf{R}; K_0^2 = 0\}$  - кольцо дуальных чисел, где  $K_0^2 = 0$ .

В зависимости от того что мы подразумеваем под мнимой единицей:

$K = I$  или  $K = J$ , мы получаем три пары 2D алгебр

$$\begin{array}{cc} \mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | K) & \\ K = I & K = J \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathcal{Alg}_2^{Sp(1,0,0)}(\mathbf{R} | I_-) & \mathcal{Alg}_2^{Vis(1,0,0)}(\mathbf{R} | J_-) \\ \mathcal{Alg}_2^{Sp(0,0,1)}(\mathbf{R} | I_0) & \mathcal{Alg}_2^{Vis(0,0,1)}(\mathbf{R} | J_0) \\ \mathcal{Alg}_2^{Sp(0,1,0)}(\mathbf{R} | I_+) & \mathcal{Alg}_2^{Vis(0,1,0)}(\mathbf{R} | J_+) \end{array}$$

элементы которых мы будем обозначать так:

$$\begin{array}{c} z = v + Kw \\ K = I \quad K = J \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \mathcal{Alg}_2^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | I) \ni x = x + Iy \quad f = f + Jg \in \mathcal{Alg}_2^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | J). \end{array}$$

Сложение и произведение двух обобщенных комплексных чисел

$z_1 = v_1 + Kw_1$  и  $z_2 = v_2 + Kw_2$  определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (v_1 + Kw_1) + (v_2 + Kw_2) = (v_1 + v_2) + K(w_1 + w_2), \\ z_1 \cdot z_2 &= (v_1 + Kw_1) \cdot (v_2 + Kw_2) = (v_1 v_2 + K^2 w_1 w_2) + K(v_1 w_2 + v_2 w_1) = \\ &= (v_1 v_2 + \delta w_1 w_2) + K(v_1 w_2 + v_2 w_1). \end{aligned}$$

В алгебре  $\mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | K)$  введем операцию сопряжения, отображающую каждое число  $z = v + Kw$  в новое число вида  $\bar{z} = \overline{v + Kw} = v - Kw$ . Используя эту операцию можно легко превратить обобщенную комплексную плоскость в псевдонормированное пространство, определив на ней псевдонорму  $N(z)$ .

**Определение 2.1.** Пусть  $z = v + Kw$ , тогда форма

$$N_{\mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | K)}(z) := \|z\|_{\mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | K)} = z\bar{z} = v^2 + K^2w^2 = \begin{cases} v^2 + w^2, & z \in \mathcal{Alg}_2^{(1,0,0)}(\mathbf{R} | K_-), \\ v^2 - w^2, & z \in \mathcal{Alg}_2^{(0,1,0)}(\mathbf{R} | K_+), \\ v^2, & z \in \mathcal{Alg}_2^{(0,0,1)}(\mathbf{R} | K_0) \end{cases}$$

называется квадратичной псевдонормой обобщенного комплексного числа. Легко проверить, что  $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$ .

**Определение 2.2.** Арифметическое значение корня квадратного из произведения  $z\bar{z} = N(z)$  называется модулем обобщенного комплексного числа  $z$  и обозначается как

$$|z|_{\mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}} = \sqrt{N_{\mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}}(z)} := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{v^2 + K^2w^2} = \begin{cases} \sqrt{v^2 + w^2}, & z \in \mathcal{Alg}_2^{(1,0,0)}(\mathbf{R} | K_-), \\ \sqrt{v^2 - w^2}, & z \in \mathcal{Alg}_2^{(0,1,0)}(\mathbf{R} | K_+), \\ |v|, & z \in \mathcal{Alg}_2^{(0,0,1)}(\mathbf{R} | K_0), \end{cases}$$

или, коротко  $|z|$ , если это не вызывает недоразумений. Модуль можно интерпретировать как расстояние от начала координат до точки  $z$ . В первом случае модуль называется эллиптическим, во втором – гиперболическим и в третьем – параболическим.

### 2.2.3. Геометрии 2D физического и перцептуального пространств.

Превратим теперь обобщенную комплексную плоскость в двумерное псевдометрическое пространство:  $\mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | K) \rightarrow \mathbf{Geo}_2^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathbf{R}^2, \rho_{(1, K^2)}(z_1, z_2))$ , определив на этой алгебре псевдометрику:

$$\rho_{(1, K^2)}(z_1, z_2) := \sqrt{(z_2 - z_1)(\overline{z_2 - z_1})} = \sqrt{(v_2 - v_1)^2 - K^2(w_2 - w_1)^2} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{(v_2 - v_1)^2 + (w_2 - w_1)^2}, & \mathbf{z} \in \mathcal{Alg}_2^{(1,0,0)}(\mathbf{R}|K_-) \& (K_-^2 = -1), \\ \sqrt{(v_2 - v_1)^2 - (w_2 - w_1)^2}, & \mathbf{z} \in \mathcal{Alg}_2^{(0,1,0)}(\mathbf{R}|K_+) \& (K_+^2 = +1), \\ |v_2 - v_1|, & \mathbf{z} \in \mathcal{Alg}_2^{(0,0,1)}(\mathbf{R}|K_0) \& (K_0^2 = 0), \end{cases}$$

где  $\mathbf{z}_1 = v_1 + Kw_1$ ,  $\mathbf{z}_2 = v_2 + Kw_2$ .

Поэтому алгебра  $\mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R}|K)$  обобщенных комплексных чисел трансформируется в следующие псевдометрические пространства:

- Плоскость классических комплексных чисел превращается в Евклидову геометрию

$$\mathbf{Geo}_2^{(1,0,0)}(\mathbf{R}^2, \rho_{(1,-1)}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)) = \langle \langle \mathcal{Alg}_2^{(1,0,0)}(\mathbf{R}|K_-); \rho(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \rangle \rangle.$$

- Плоскость двойных чисел трансформируется в двумерное пространство Минковского

$$\mathbf{Geo}_2^{(0,1,0)}(\mathbf{R}^2, \rho_{(1,1)}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)) = \langle \langle \mathcal{Alg}_2^{(0,1,0)}(\mathbf{R}|K_+); \rho(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \rangle \rangle.$$

- Плоскость дуальных чисел трансформируется в двумерное пространство Галилея

$$\mathbf{Geo}_2^{(0,0,1)}(\mathbf{R}^2, \rho_{(1,0)}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)) = \langle \langle \mathcal{Alg}_2^{(0,0,1)}(\mathbf{R}|K_0); \rho(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \rangle \rangle.$$

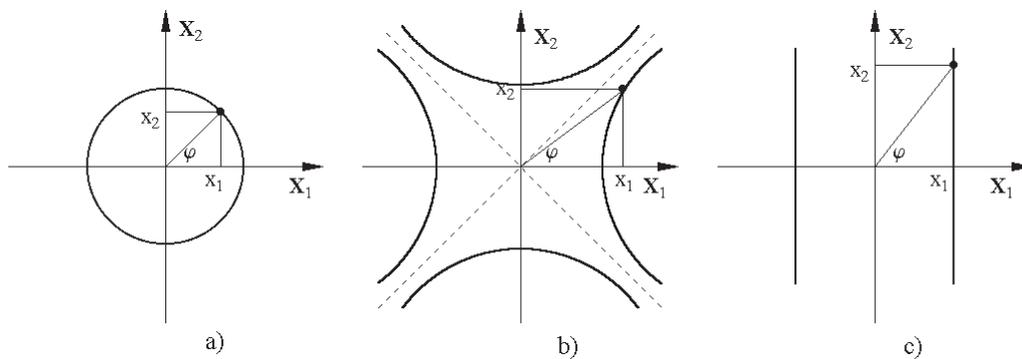
В зависимости оттого, что мы подразумеваем под мнимой единицей:  $K = I$  или  $K = J$ , мы получаем три пары  $2D$  пространств:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Geo}_2^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathbf{R}^2, \rho_{(1, K^2)}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)) & & \\ \begin{array}{cc} K = I & K = J \\ \downarrow & \downarrow \end{array} & & \\ \mathbf{Geo}_2^{(1,0,0)} = \langle \langle \mathcal{Alg}_2^{(1,0,0)}(\mathbf{R}|I_-); \rho(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \rangle \rangle, & \mathbf{Geo}_2^{(1,0,0)} = \langle \langle \mathcal{Alg}_2^{(1,0,0)}(\mathbf{R}|J_-); \rho(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \rangle \rangle, & \\ \mathbf{Geo}_2^{(0,1,0)} = \langle \langle \mathcal{Alg}_2^{(0,1,0)}(\mathbf{R}|I_+); \rho(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \rangle \rangle, & \mathbf{Geo}_2^{(0,1,0)} = \langle \langle \mathcal{Alg}_2^{(0,1,0)}(\mathbf{R}|J_+); \rho(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \rangle \rangle, & \\ \mathbf{Geo}_2^{(0,1,0)} = \langle \langle \mathcal{Alg}_2^{(0,1,0)}(\mathbf{R}|I_0); \rho(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \rangle \rangle, & \mathbf{Geo}_2^{(0,0,1)} = \langle \langle \mathcal{Alg}_2^{(0,0,1)}(\mathbf{R}|J_0); \rho(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) \rangle \rangle. & \end{array}$$

Если говорят обо всех трех алгебрах (или геометриях) одновременно, то они обозначаются одним символом  $\mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R}|K)$  (или  $\mathbf{Geo}_2^{(a_+, b_-, c_0)}$ ).

Алгебры комплексных, дуальных и двойных чисел позволяют конструировать простые алгоритмы вычисления инвариантов изображений по отношению к широкому классу движений и преобразований двумерных пространственных и цветовых геометрий Евклида, Минковского и Галилея.

**Определение 2.3.** Множество точек обобщенной комплексной плоскости  $\text{Geo}_2^{(a_+, b_-, c_0)}$ , удовлетворяющее уравнению  $|z|_{\text{Alg}_2^{(a, b, c)}(\mathbb{R}/\mathbb{K})}^2 = r^2$ , называется  $\text{Geo}_2^{(a_+, b_-, c_0)}$ -окружностью радиуса  $r$  centered относительно начала координат.



**Рис. 2.4.** Окружности в пространствах  $\text{Geo}_2^{(a_+, b_-, c_0)}$ .

Уравнение  $|z|_{\text{Alg}_2^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathbb{R}/\mathbb{K})}^2 = v^2 - K^2 w = r^2$  определяет  $\text{Geo}_2^{(a_+, b_-, c_0)}$ -окружность. Существует три типа окружностей:  $\text{Geo}_2^{(+1, 0, 0)}$ -окружность – классическая Евклидова окружность (рис. 2.4а),  $\text{Geo}_2^{(0, 1, 0)}$ -окружность – гиперболическая окружность Минковского (рис. 2.4б) и  $\text{Geo}_2^{(0, 0, 1)}$ -окружность – параболическая окружность Галилея - две параллельные линии (рис. 2.4с).

Если  $z = v^2 - K^2 w$ , то обобщенное комплексное число  $z_0 = z/|z|$  имеет единичный модуль в том случае, когда  $|z| \neq 0$ . Нетрудно видеть, что

$$z = |z| \left( \frac{v}{|z|} + K \frac{w}{|z|} \right) = |z| (\cos \varphi + K \cdot \sin \varphi), \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{cos} \varphi := \frac{v}{|z|} = \frac{v}{\sqrt{v^2 - K^2 w^2}} = \begin{cases} v/\sqrt{v^2 + w^2} = \cos \varphi, & \text{если } K = K_-, \\ v/\sqrt{v^2 - w^2} = \operatorname{ch} \varphi, & \text{если } K = K_+, \\ v/|v| = \pm 1 = \operatorname{cg} \varphi, & \text{если } K = K_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{sin} \varphi := \frac{w}{|z|} = \frac{w}{\sqrt{v^2 - K^2 w^2}} = \begin{cases} w/\sqrt{v^2 + w^2} = \sin \varphi, & \text{если } K = K_-, \\ w/\sqrt{v^2 - w^2} = \operatorname{sh} \varphi, & \text{если } K = K_+, \\ w/|w| = \pm 1 = \operatorname{sg} \varphi, & \text{если } K = K_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь  $\mathbf{cos} \varphi$ ,  $\mathbf{sin} \varphi$  - обобщенные тригонометрические функции. В первом случае (когда  $K = K_-$ ) обобщенные тригонометрические функции совпадают с классическими (эллиптическими) функциями:  $\mathbf{cos} \varphi = \cos \varphi$ ,  $\mathbf{sin} \varphi = \sin \varphi$ . Во втором случае (когда  $K = K_+$ ) они совпадают с гиперболическими функциями  $\mathbf{cos} \varphi = \operatorname{ch} \varphi$ ,  $\mathbf{sin} \varphi = \operatorname{sh} \varphi$ . Третий случай (когда  $K = K_0$ ) дает новые тригонометрические функции:  $\mathbf{cos} \varphi = \operatorname{cg} \varphi$ ,  $\mathbf{sin} \varphi = \operatorname{sg} \varphi$ , которые будем называть параболическими (или Галилеевскими) функциями.

Согласно (2.1)-(2.3) произвольное обобщенное комплексное число единичного модуля  $|z_0| = 1$  имеет следующую форму

$$z_0 = e^{K\varphi} = (\mathbf{cos} \varphi + K \cdot \mathbf{sin} \varphi) = \begin{cases} \cos \varphi + K_- \cdot \sin \varphi, & \text{если } K = K_-, \\ \operatorname{ch} \varphi + K_+ \cdot \operatorname{sh} \varphi, & \text{если } K = K_+, \\ \pm 1 + K_0 \cdot \varphi, & \text{если } K = K_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Рассмотрим два обобщенных комплексных числа

$$z_1 = |z_1| e^{K\varphi_1} = |z_1| (\mathbf{cos} \varphi_1 + K \mathbf{sin} \varphi_1) \quad \text{и} \quad z_2 = |z_2| e^{K\varphi_2} = |z_2| (\mathbf{cos} \varphi_2 + K \mathbf{sin} \varphi_2).$$

Их произведение может быть записано в двух формах

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| e^{K\varphi_1} |z_2| e^{K\varphi_2} = |z_1| |z_2| e^{K(\varphi_1 + \varphi_2)} = |z_1| |z_2| [\mathbf{cos}(\varphi_1 + \varphi_2) + K \mathbf{sin}(\varphi_1 + \varphi_2)], \\ z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| (\mathbf{cos} \varphi_1 + K \mathbf{sin} \varphi_1) (\mathbf{cos} \varphi_2 + K \mathbf{sin} \varphi_2) = \\ &= |z_1| |z_2| \left[ (\mathbf{cos} \varphi_1 \mathbf{cos} \varphi_2 + K^2 \mathbf{sin} \varphi_1 \mathbf{sin} \varphi_2) + K (\mathbf{sin} \varphi_1 \mathbf{cos} \varphi_2 + \mathbf{cos} \varphi_1 \mathbf{sin} \varphi_2) \right]. \end{aligned}$$

Сравнивая последние два выражения, получаем теорему для косинуса и синуса суммы двух углов:

$$\mathbf{cos}(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbf{cos}\varphi_1 \cdot \mathbf{cos}\varphi_2 + K^2 \cdot \mathbf{sin}\varphi_1 \cdot \mathbf{sin}\varphi_2 =$$

$$= \begin{cases} \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2, & K = K_-, \\ \operatorname{ch}\varphi_1 \cdot \operatorname{ch}\varphi_2 + \operatorname{sh}\varphi_1 \cdot \operatorname{sh}\varphi_2, & K = K_+, \\ (\pm 1) \cdot (\pm 1), & K = K_0, \end{cases}$$

$$\mathbf{sin}(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathbf{sin}\varphi_1 \cdot \mathbf{cos}\varphi_2 + \mathbf{cos}\varphi_1 \cdot \mathbf{sin}\varphi_2 =$$

$$= \begin{cases} \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2, & K = K_-, \\ \operatorname{sh}\varphi_1 \cdot \operatorname{ch}\varphi_2 + \operatorname{ch}\varphi_1 \cdot \operatorname{sh}\varphi_2, & K = K_+, \\ \varphi_1 \cdot (\pm 1) + (\pm 1)\varphi_2, & K = K_0. \end{cases}$$

Из выражения (2.4) мы выводим, что степень обобщенного комплексного числа  $\mathbf{z} = r(\mathbf{cos}\varphi + K\mathbf{sin}\varphi)$  можно записать так  $\mathbf{z}^n = r^n(\mathbf{cos}n\varphi + K \cdot \mathbf{sin}n\varphi)$ .

Эта формула тривиальна для случая  $n=0$ , и так как  $\mathbf{z}^{-1} = r^{-1}(\mathbf{cos}(-\varphi) + K \cdot \mathbf{sin}(-\varphi))$ , то она верна и для отрицательных  $n$ . Для  $r=1$  мы получаем формулу Муавра  $(\mathbf{cos}\varphi + K \cdot \mathbf{sin}\varphi)^n = (\mathbf{cos}n\varphi + K \cdot \mathbf{sin}n\varphi)$ , которая позволяет просто выразить значения  $\mathbf{cos}n\varphi$  и  $\mathbf{sin}n\varphi$  в  $\mathbf{cos}\varphi$  и  $\mathbf{sin}\varphi$ .

Для вычисления корня  $n$ -ой степени из  $\mathbf{w}$  необходимо решить уравнение  $\mathbf{z}^n = \mathbf{w}$ . Полагая, что  $\mathbf{w} \neq 0$ , записываем  $\mathbf{w} = \rho(\mathbf{cos}\varphi + K \cdot \mathbf{sin}\varphi)$  и  $\mathbf{z} = r(\mathbf{cos}\theta + K \cdot \mathbf{sin}\theta)$ . Тогда уравнение  $\mathbf{z}^n = \mathbf{w}$  принимает форму  $r^n(\mathbf{cos}n\theta + K \cdot \mathbf{sin}n\theta) = \rho(\mathbf{cos}\varphi + K \cdot \mathbf{sin}\varphi)$ . Это уравнение выполняется, если положить  $r^n = \rho$  и  $n\theta = \varphi$ . Следовательно,

$$\mathbf{z} = \sqrt[n]{r} \left( \mathbf{cos} \frac{\varphi}{n} + K \cdot \mathbf{sin} \frac{\varphi}{n} \right). \quad (2.5)$$

**2.2.4. Алгебраические модели 2D серых изображений.** Серые 2D изображения  $f(x, y) = \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  обладают двумя атрибутами:  $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}$  – физическим и визуальным пространствами. Мы оснащаем пространство  $\mathbf{R}^2$

структурой 2D алгебры обобщенных комплексных чисел  $\text{Alg}_2^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R}|1, I)$ , т.е.  $\mathbf{R}^2 \rightarrow \text{Alg}_2^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R}|1, I) := \mathbf{R} + \mathbf{R}I = \{z = x + Iy | x, y \in \mathbf{R}\}$ , где  $I$  – мнимая единица со свойством  $I^2 \in \{-1, 0, +1\}$ .

Поэтому серые 2D изображения  $f(\mathbf{z}): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}$  имеют следующее представление  $f(x + Iy): \text{Alg}_2^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R}|I) \rightarrow \mathbf{R}$ . Существует три типа таких изображений:

$$\begin{aligned} & {}^0 f(\mathbf{z}): \text{Alg}_2^{Sp(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, I_0) \rightarrow \mathbf{R}, \\ & {}^- f(\mathbf{z}): \text{Alg}_2^{Sp(1,0,0)}(\mathbf{R}|1, I_-) \rightarrow \mathbf{R}, \quad {}^+ f(\mathbf{z}): \text{Alg}_2^{Sp(0,1,0)}(\mathbf{R}|1, I_+) \rightarrow \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Первые изображения определены на евклидовой плоскости, вторые – на плоскости Минковского, третьи – на плоскости Галилея [9-13].

**Определение 2.4.** Преобразования  $\mathbf{z}' = \mathbf{z} + \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{z}' = \lambda \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{z}' = e^{I\varphi} \mathbf{z}$ , где  $\mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{w} \in \text{Alg}_2^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R}|I)$  называются трансляцией, масштабированием и вращением физического пространства  $\text{Geo}_2^{(p_+, q_-, r_0)}$ .

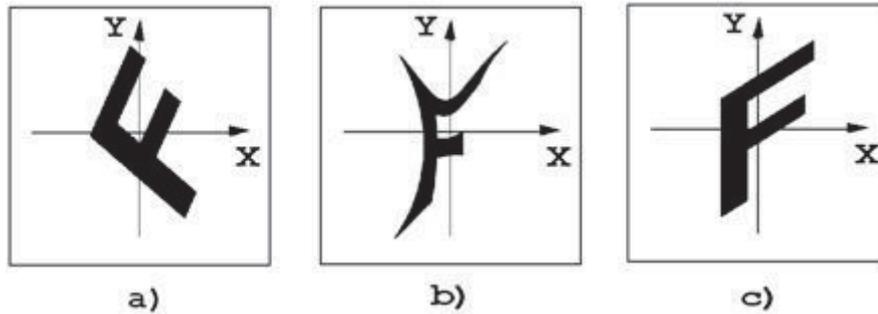
В матричной форме эти преобразования имеют следующий вид:

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{z}' = \lambda \mathbf{z} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z}' = e^{I\varphi} \mathbf{z} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & I^2 \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, & I = I_-, \\ \begin{bmatrix} \text{ch } \varphi & \text{sh } \varphi \\ \text{sh } \varphi & \text{ch } \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, & I = I_+, \\ \begin{bmatrix} \pm 1 & \\ \varphi & \pm 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, & I = I_0, \end{cases}$$

где  $\mathbf{z} = (x + Iy)$ ,  $\mathbf{z}' = (x' + Iy')$ ,  $\mathbf{w} = (w_x + Iw_y) \in \text{Geo}_2^{(p_+, q_-, r_0)}$ . Они формируют следующие три группы: 1) группу пространственных трансляций  $\text{Tr}(\text{Geo}_2^{(p_+, q_-, r_0)})$ , 2) группу масштабных преобразований  $\text{Sc}(\text{Geo}_2^{(p_+, q_-, r_0)})$  и группу вращений  $\text{Rot}(\text{Geo}_2^{(p_+, q_-, r_0)})$ . Преобразования серых изображений в

физическом пространстве могут быть описаны на языке пространственных алгебр  $\text{Alg}_2^{Sp}(\mathbf{R}|1,I)$  единым (универсальным) способом. Эти искажения могут быть вызваны: 1) пространственными трансляциями  $\mathbf{z}' = \mathbf{z} + \mathbf{w}$ , вращениями  $\mathbf{z}' = e^{I\varphi_{sp}} \mathbf{z}$  и, наконец, изменениями масштаба  $\mathbf{z}' = \lambda \mathbf{z}$ .



**Рис. 2.5.** Вращения  $\mathbf{f}_\varphi(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(e^{I\varphi} \mathbf{z})$  в: а) Евклидовом пространстве  $\text{Geo}_2^{(1,0,0)}$ , б) пространстве Минковского  $\text{Geo}_2^{(0,1,0)}$  и в) пространстве Галилея  $\text{Geo}_2^{(0,0,1)}$

Если  $f(\mathbf{z})$  - исходное изображение, а  $f_{\lambda,\varphi,\mathbf{w}}(\mathbf{z})$  - его искаженная версия, то  $f_{\lambda,\varphi,\mathbf{w}}(\mathbf{z}') = f(\lambda e^{I\varphi_{sp}} \mathbf{z} + \mathbf{w})$ . Пространственные искажения здесь вызваны преобразованиями физического пространства:  $\mathbf{z}' \rightarrow \lambda e^{K\varphi_{sp}} \mathbf{z}$  (см. рис. 2.5 и рис. 2.6), где

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= e^{\varphi \cdot K} \mathbf{z} = (\cos \varphi + K \cdot \sin \varphi)(x + K \cdot y) = \\ &= (x \cos \varphi + K^2 y \sin \varphi) + K \cdot (x \sin \varphi + y \cos \varphi). \end{aligned}$$

Это вызывает то же самый эффект как и вращение изображения  $f(\mathbf{z})$  на угол  $\varphi$  в Евклидовой плоскости  $\text{Geo}_2^{(p_+,q_-,r_0)}$  (см. рис. 2.5а).

### 2.2.5. Алгебраические модели 2D бихроматических изображений.

Бихроматические 2-D изображения  $\mathbf{f}(x_1, x_2) = (f_0(x_1, x_2), f_1(x_1, x_2)): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{V}^2$  обладают двумя атрибутами:  $\mathbf{R}^2, \mathbf{V}^2$  – физическим и визуальным пространствами. Мы оснащаем эти пространства двумя структурами 2D алгебр обобщенных комплексных чисел  $\text{Alg}_2^{Sp(p_-,q_+,r_0)}(\mathbf{R}|1,I)$  и  $\text{Alg}_2^{Vis(u_-,v_+,w_0)}(\mathbf{R}|1,J)$ , т.е.

$$\mathbf{R}^2 \rightarrow \text{Alg}_2^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R}|1, I) := \mathbf{R} + \mathbf{R}I = \{z = x + Iy | x, y \in \mathbf{R}\},$$

$$\mathbf{V}^2 \rightarrow \text{Alg}_2^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R}|1, J) := \mathbf{R} + \mathbf{R}J = \{f = f + Jg | f, g \in \mathbf{R}\},$$

где  $I$  и  $J$  – пространственная и бихроматическая мнимые единицы, соответственно, со свойствами  $I^2 = \delta^{in} \in \{-1, 0, +1\}$  и  $J^2 = \delta^{out} \in \{-1, 0, +1\}$ . Эти алгебры называются пространственной и бихроматической алгебрами [14-19] физического  $\mathbf{R}^2$  и визуального (перцептуального)  $\mathbf{V}^2$  пространств.



**Рис. 2.6.** Вращения Евклида и Галилея серого изображения  $\mathbf{f}_\varphi(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(e^{I\varphi}\mathbf{z})$

Как и в пространственном случае, визуальное пространство может быть оснащено тремя перцептуальными алгебрами.

- Если  $J^2 \equiv J_-^2 = -1$ , то перцептуальная алгебра

$$\text{Alg}_2^{Vis(1,0,0)}(\mathbf{R}|1, J_-) = \{f = f + J_-g | f, g \in \mathbf{R}; J_-^2 = -1\}$$

– суть обычное поле комплексных чисел, где  $J_-$  бихроматическая мнимая единица, подобная обычной классической мнимой единице  $J_- \approx i$ .

- Если  $J^2 \equiv J_+^2 = +1$ , то перцептуальная алгебра

$$\text{Alg}_2^{Vis(0,1,0)}(\mathbf{R}|1, J_+) = \{f = f + J_+g | f, g \in \mathbf{R}; J_+^2 = +1\}$$

– суть кольцо двойных бихроматических чисел, где  $J_+$  – бихроматическая мнимая единица, подобная обычной двойной единице  $J_+ \approx e$ .

- Если  $J^2 \equiv J_0^2 = 0$ , то перцептуальная алгебра

$$\mathcal{Alg}_2^{Vis(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, J_0) = \{f = f + J_0 g \mid f, g \in \mathbf{R}; J_0^2 = 0\}$$

представляет собой кольцо дуальных бихроматических чисел, где  $J_0$  – бихроматическая мнимая единица, подобная обычной дуальной единице.

**Определение 2.5.** Бихроматическим изображением называется  $\mathcal{Alg}_2^{Vis}(\mathbf{R}|J)$ -значная функция  $f(\mathbf{z}) : \mathcal{Alg}_2^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R}|1, I) \rightarrow \mathcal{Alg}_2^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R}|1, J)$ , зависящая от комплексной переменной  $\mathbf{z} \in \mathcal{Alg}_2^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R}|1, I)$ :

$$f(\mathbf{z}) = f(x + Iy) + J \cdot g(x + Iy). \quad (2.6)$$

Таким образом, существует девять моделей бихроматических изображений  $f(\mathbf{z})$ , представленных ниже

$$\begin{aligned} \neg, - f(\mathbf{z}) &: \mathcal{Alg}_2^{Sp(1,0,0)}(\mathbf{R}|1, I_-) \rightarrow \mathcal{Alg}_2^{Vis(1,0,0)}(\mathbf{R}|1, J_-), \\ 0, - f(\mathbf{z}) &: \mathcal{Alg}_2^{Sp(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, I_0) \rightarrow \mathcal{Alg}_2^{Vis(1,0,0)}(\mathbf{R}|1, J_-), \\ +, - f(\mathbf{z}) &: \mathcal{Alg}_2^{Sp(0,1,0)}(\mathbf{R}|1, I_+) \rightarrow \mathcal{Alg}_2^{Vis(1,0,0)}(\mathbf{R}|1, J_-), \\ \neg, 0 f(\mathbf{z}) &: \mathcal{Alg}_2^{Sp(1,0,0)}(\mathbf{R}|1, I_-) \rightarrow \mathcal{Alg}_2^{Vis(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, J_0), \\ 0, 0 f(\mathbf{z}) &: \mathcal{Alg}_2^{Sp(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, I_0) \rightarrow \mathcal{Alg}_2^{Vis(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, J_0), \\ +, 0 f(\mathbf{z}) &: \mathcal{Alg}_2^{Sp(0,1,0)}(\mathbf{R}|1, I_+) \rightarrow \mathcal{Alg}_2^{Vis(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, J_0), \\ \neg, + f(\mathbf{z}) &: \mathcal{Alg}_2^{Sp(1,0,0)}(\mathbf{R}|1, I_-) \rightarrow \mathcal{Alg}_2^{Vis(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, J_+), \\ 0, + f(\mathbf{z}) &: \mathcal{Alg}_2^{Sp(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, I_0) \rightarrow \mathcal{Alg}_2^{Vis(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, J_+), \\ +, + f(\mathbf{z}) &: \mathcal{Alg}_2^{Sp(0,1,0)}(\mathbf{R}|1, I_+) \rightarrow \mathcal{Alg}_2^{Vis(0,0,1)}(\mathbf{R}|1, J_+). \end{aligned}$$

В предыдущем разделе мы рассмотрели геометрические искажения изображений в физическом пространстве на языке пространственных алгебр  $\mathcal{Alg}_2^{Sp}(\mathbf{R}|1, I)$ . Аналогично можно рассмотреть преобразования и в перцептуальном пространстве.

**Теорема 2.1.** Преобразования вида  $\mathbf{f}' = e^{J\varphi_{ch}}\mathbf{f} + \mathbf{w} \in \text{Alg}_2^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, J)$  (где  $\mathbf{w}$  – векторная константа) или они же в матричной форме

$$\begin{bmatrix} f' \\ g' \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos \varphi_{ch} & J^2 \sin \varphi_{ch} \\ \sin \varphi_{ch} & \cos \varphi_{ch} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} = \begin{cases} \lambda \begin{bmatrix} \cos \varphi_{ch} & -\sin \varphi_{ch} \\ \sin \varphi_{ch} & \cos \varphi_{ch} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}, & J = J_-, \\ \lambda \begin{bmatrix} \text{ch } \varphi_{ch} & \text{sh } \varphi_{ch} \\ \text{sh } \varphi_{ch} & \text{ch } \varphi_{ch} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}, & J = J_+, \\ \lambda \begin{bmatrix} \pm 1 & \\ \varphi_{ch} & \pm 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}, & J = J_0, \end{cases}$$

формируют группу аффинных преобразований  $\text{Aff}\{\text{Geo}_2^{\text{Vis}(u_+, v_-, w_0)}\}$ .

**Определение 2.6.** Преобразования

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \mathbf{z} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{z}' = \lambda \cdot \mathbf{z}, \quad \mathbf{z}' = e^{I\varphi_{sp}} \mathbf{z}; \\ \mathbf{z}' &= \mathbf{z} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{z}' = \mu \cdot \mathbf{z}, \quad \mathbf{z}' = e^{J\theta_{ch}} \mathbf{z}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{w} \in \text{Alg}_2^{\text{Sp}(p_+, q_-, r_0)}(\mathbf{R}|1, I)$  и  $\mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{w} \in \text{Alg}_2^{\text{Vis}(u_+, v_-, w_0)}(\mathbf{R}|1, J)$ , называются трансляцией, масштабированием и вращением физического  $\text{Geo}_2^{\text{Sp}(p_+, q_-, r_0)}$  и бихроматического  $\text{Geo}_2^{\text{Vis}(u_+, v_-, w_0)}$  пространств, соответственно.

Эти преобразования формируют группы: 1) две группы пространственных  $\text{Tr}(\text{Geo}_2^{\text{Sp}(p_+, q_-, r_0)})$  и бихроматических  $\text{Tr}(\text{Geo}_2^{\text{Vis}(u_+, v_-, w_0)})$  трансляций, 2) две группы пространственных  $\text{Sc}(\text{Geo}_2^{\text{Sp}(p_+, q_-, r_0)})$  и бихроматических  $\text{Sc}(\text{Geo}_2^{\text{Vis}(u_+, v_-, w_0)})$  масштабных преобразований, 3) две группы физических  $\text{Rot}(\text{Geo}_2^{\text{Sp}(p_+, q_-, r_0)})$  и бихроматических  $\text{Rot}(\text{Geo}_2^{\text{Vis}(u_+, v_-, w_0)})$  вращений.

Преобразования изображений (геометрические и цветовые) в физическом и в перцептуальном пространствах могут быть описаны на языках пространственной и перцептуальной алгебр. Эти искажения могут быть вызваны пространственными преобразованиями:

- 1) пространственными трансляциями:  $\mathbf{z}' = \mathbf{z} + \mathbf{w}$ ,
- 2) вращениями  $\mathbf{z}' = e^{I\varphi_{sp}} \mathbf{z}$ ,

3) изменениями масштаба  $\mathbf{z}' = \lambda \mathbf{z}$ ,

и цветовыми преобразованиями:

1) бихроматической трансляцией  $\mathbf{f} + \mathbf{w}$ ,

2) преобразованием цвета  $e^{J\theta_{ch}} \mathbf{f}$ , и

3) преобразованием насыщенности  $\mu \cdot \mathbf{f}$ .

Если  $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ - некоторое исходное бихроматическое изображение, то изображение

$$\mu, \theta_{ch}, \mathbf{w} \mathbf{f}_{\lambda, \varphi_{sp}, \mathbf{w}}(\mathbf{z}) = \mu e^{J\theta_{ch}} \cdot \mathbf{f}(\lambda e^{I\varphi_{sp}} \mathbf{z} + \mathbf{w}) + \mathbf{w} \quad (2.7)$$

является его искаженной версией. Пространственные искажения здесь вызваны преобразованиями физического пространства:  $\mathbf{z} \rightarrow \lambda e^{I\varphi_{sp}} \mathbf{z} + \mathbf{w}$ , а цветовые – преобразованиями перцептуального пространства  $\mathbf{f} \rightarrow \mu e^{J\theta_{ch}} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{w}$ .

Оказывается что алгебраические модели бихроматического изображения (2.6) и его искаженной версии (2.7) имеют универсальный характер в том смысле, что многие типы многоканальных изображений, определенные на евклидовых и неевклидовых пространствах могут быть записаны в аналогичной форме с применением гиперкомплексных алгебр.

## 2.3. Алгебро-геометрические модели 3D- и 4D изображений

**2.3.1. Предварительные замечания.** Серое и цветное изображения, возникающие на ретине глаза человека, могут рассматриваться как двумерное четырехкомпонентное векторно-значное  $(Y, R, G, B)$ -изображение

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x, y) &= \begin{bmatrix} f_Y(x, y) \\ f_R(x, y) \\ f_G(x, y) \\ f_B(x, y) \end{bmatrix} = f_Y(x, y) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + f_R(x, y) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + f_G(x, y) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + f_B(x, y) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= f_Y(x, y) \mathbf{i}_Y + f_R(x, y) \mathbf{i}_R + f_G(x, y) \mathbf{j}_G + f_B(x, y) \mathbf{k}_B. \end{aligned}$$

где

$$f_Y(x, y) = \int_{\lambda} s(x, y, \lambda) Y(\lambda) d\lambda,$$

$$f_R(x, y) = \int_{\lambda} s(x, y, \lambda) R(\lambda) d\lambda,$$

$$f_G(x, y) = \int_{\lambda} s(x, y, \lambda) G(\lambda) d\lambda,$$

$$f_B(x, y) = \int_{\lambda} s(x, y, \lambda) B(\lambda) d\lambda,$$

а  $s(x, y, \lambda)$  - спектр электромагнитного излучения, принимаемый от объекта,  $Y(\lambda), R(\lambda), G(\lambda), B(\lambda)$  - суть четыре спектральные функции прозрачности фоторецепторов (колбочек и палочек), а  $\lambda$  есть длина волны.

Цифровое изображение представляется  $2D$  дискретным сигналом  $f(n, m)$  (где  $n, m = 0, 1, \dots, N-1$ ) размером  $(N \times N)$ , которое описывает дискретное по пиксельное распределение яркости (рис.2.7).

$$\begin{bmatrix} \text{gray} \\ \text{red} \\ \text{green} \\ \text{blue} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_Y(x, y) \\ \mathbf{f}_R(x, y) \\ \mathbf{f}_G(x, y) \\ \mathbf{f}_B(x, y) \end{bmatrix} = \mathbf{f}_Y(x, y) + \mathbf{f}_R(x, y)\mathbf{i}_R + \mathbf{f}_G(x, y)\mathbf{i}_G + \mathbf{f}_B(x, y)\mathbf{i}_B$$

**Рис. 2.7.** В классическом подходе каждый пиксель - четырехмерный вектор, принадлежащий 4-мерному YRGB-векторному пространству. В алгебраическом подходе каждый пиксель ассоциируется с кватернионом (4-мерным гиперкомплексным числом)

В случае цветного изображения цвет должен быть определен для каждого пикселя тремя числами в соответствии с трех хроматической теорией. Эти числа определяют яркости изображения в трех спектральных каналах и для своего представления требуют трехмерного цветового пространства.

Совместно серое и цветное изображения требуют четырех независимых монохромных изображения и рассматриваются как четырехкомпонентное двумерное векторное поле:

$$\mathbf{f}(n,m) = \begin{bmatrix} f_Y(n,m) \\ f_R(n,m) \\ f_G(n,m) \\ f_B(n,m) \end{bmatrix} = f_Y(n,m) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + f_R(n,m) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + f_G(n,m) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + f_B(n,m) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= f_Y(n,m)\mathbf{1}_Y + f_R(n,m)\mathbf{i}_R + f_G(n,m)\mathbf{j}_G + f_B(n,m)\mathbf{k}_B.$$

Мы предлагаем рассматривать подобные изображения как сигнал

$$\mathbf{f}(n,m) = f_Y(n,m) + f_R(n,m)J_2 + f_G(n,m)J_2 + f_B(n,m)J_1J_2,$$

который принимает свои значения в обобщенной кватернионной алгебре

$\mathcal{Alg}_4^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1J_2)$ , где  $J_1, J_2, J_1J_2 = J_{12}$  - гипермнимые единицы, обладающие следующими свойствами  $J_1^2 = \delta_1^{out}$ ,  $J_2^2 = \delta_2^{out}$ ,  $(J_1J_2)^2 = -\delta_1^{out}\delta_2^{out}$ .

Мы конструируем девять перцептуальных алгебр обобщенных кватернионов

$$\mathcal{Alg}_4^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1J_2) := \left\{ \mathbf{f} = f_y + f_r J_1 + f_g J_2 + f_b J_1 J_2 \mid f_y, f_r, f_g, f_b \in \mathbf{R} \right\}$$

в зависимости от того, какая из девяти возможностей реализуется для двух независимых гипермнимых единиц  $J_1^2 = \delta_1^{out} \in \{+1, 0, -1\}$  и  $J_2^2 = \delta_2^{out} \in \{+1, 0, -1\}$ .

Таким образом, изображения, возникающие на ретине – это функции типа:

$$\mathbf{f}(n,m) : \mathbf{Z}_N^2 \rightarrow \mathcal{Alg}_4^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1J_2), \text{ где } \mathbf{Z}_N^2 = \{0, 1, \dots, N-1\}^2.$$

Более того, область определения изображения может быть расширена до трехмерного дискретного пространства  $\mathbf{Z}_N^3 = \{0, 1, \dots, N-1\}^3$ :

$$\mathbf{f}(k,n,m) : \mathbf{Z}_N^3 \rightarrow \mathcal{Alg}_4^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1J_2),$$

что дает возможность рассмотреть девять типов трехмерных изображений:

$$\mathbf{f}(k,n,m) = f_Y(k,n,m) + f_R(k,n,m)J_2 + f_G(k,n,m)J_2 + f_B(k,n,m)J_1J_2,$$

которые формируются, например, 3D томографами.

Если подобные изображения формируются периодически через равные промежутки времени, то формируется зависящее от времени 4D изображение

$$\mathbf{f}(t, k, n, m): \mathbf{Z}_N^3 \rightarrow \mathcal{Alg}_4^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1 J_2),$$

где  $\mathbf{Z}_N^4 = \{0, 1, \dots, N-1\}^4$ , следующего вида:

$$\mathbf{f}(t, k, n, m) = f_Y(t, k, n, m) + f_R(t, r, n, m)J_2 + f_G(t, r, n, m)J_2 + f_B(t, r, n, m)J_1 J_2.$$

Область определения у таких функций можно также наделить девятью кватернионными алгебрами, что дает кватернионно-значную функцию

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = f_Y(\mathbf{q}) + f_R(\mathbf{q})J_2 + f_G(\mathbf{q})J_2 + f_B(\mathbf{q})J_1 J_2 \in \mathcal{Alg}_4^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1 J_2),$$

Зависящую от кватернионно-значной переменной  $\mathbf{q} = t + kI_1 + nI_2 + mI_1 I_2 \in \mathcal{Alg}_4^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2)$ :

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}): \mathcal{Alg}_4^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2) \rightarrow \mathcal{Alg}_4^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1 J_2),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t + kI_1 + nI_2 + mI_1 I_2) &= f_Y(t + kI_1 + nI_2 + mI_1 I_2) + \\ &+ f_R(t, r, n, m)J_2 + f_G(t + kI_1 + nI_2 + mI_1 I_2)J_2 + f_B(t + kI_1 + nI_2 + mI_1 I_2)J_1 J_2, \end{aligned}$$

где  $I_1, I_2, I_1 I_2$  - новые мнимые единицы  $I_1^2 = \delta_1^{in} \in \{-1, 0, +1\}$ ,  $I_2^2 = \delta_2^{in} \in \{-1, 0, +1\}$ .

Таким образом, мы имеем 81 тип изображений, зависящий от 9 типов кватернионов, принадлежащих области определения функции

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}): \mathcal{Alg}_4^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2) \rightarrow \mathcal{Alg}_4^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1 J_2).$$

Нашей целью является изучение функций  $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ , зависящих от кватернионной переменной типа  $\mathbf{q} \in \mathcal{Alg}_4^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2)$  и принимающих значения  $\mathbf{f} \in \mathcal{Alg}_4^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1 J_2)$ . Для обозначения обеих алгебр кватернионов мы используем один символ

$$\mathcal{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, K_1, K_2, K_1 K_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{Alg}_4^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1 J_2), \\ \mathcal{Alg}_4^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2) \end{cases}$$

и будем изучать функции типа:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}): \mathcal{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, K_1, K_2, K_1 K_2) \rightarrow \mathcal{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, K_1, K_2, K_1 K_2).$$

Переход же от функций общего вида к функциям интересующего нас вида будет осуществляться по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccc}
 f(\mathbf{q}): \text{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, K_1, K_2, K_1 K_2) & \rightarrow & \text{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, K_1, K_2, K_1 K_2) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f(\mathbf{q}): \text{Alg}_4^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2) & \rightarrow & \text{Alg}_4^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1 J_2).
 \end{array}$$

Прежде чем перейти к кватернионам общего вида (а их 81 вид) мы изучим классические кватернионы.

**2.3.2. Классические кватернионы.** Геометрическая интерпретация комплексных чисел с помощью точек обычной двумерной плоскости сыграла исключительную роль в разрушении мистики вокруг этих чисел в XVIII веке, когда Лейбниц называл их *"the marvel of analysis, the monster of ideas world, almost amphibian between existence and non-existence"*. В противоположность этому кватернионы с самого начала их создания были связаны с насущными задачами алгебры и геометрии.

Когда было окончательно выяснено, что трехмерные алгебры (триpletные алгебры) обладают делителями нуля, Гамильтон решил попытаться найти экзотические числа в четырехмерных пространствах, которые бы обладали всеми свойствами вещественных и комплексных чисел. Такие обобщения Гамильтон назвал кватернионами (по латыни *"quaternus"* – *"четырежды"*). Гамильтон опубликовал свои исследования в работах [20-25].

Введем кватернионную алгебру, следуя подходу Гамильтона. Для начала рассмотрим числа формы  $\mathbf{r} = x + yi + zj$  с  $i^2 = j^2 = -1$ , которые будут формировать трехмерное пространство.

Факт существования нормы комплексного числа  $\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} = x^2 + y^2$  заставляет ввести ее обобщение для новых трехмерных комплексных чисел по правилу  $\mathbf{r}\bar{\mathbf{r}} = (x + yi + zj)\overline{(x + yi + zj)} = x^2 + y^2 + z^2 - (ij + ji)yz$ . Для того, чтобы это число оказалось вещественным, необходимо постулировать анти-

коммутативность правила умножения мнимых единиц, а именно  $ij = -ji$ . Обратим внимание на тот факт, что имея в своем распоряжении только две мнимые единицы, мы не в состоянии построить нового числового поля, потому что из предположений  $ij = a_0 + a_1i + a_2j$  и  $ji = b_0 + b_1i + b_2j$  и  $ji = ij$ , следует, что  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ ,  $b_0 = b_1 = b_2 = 0$ . Поэтому необходимо ввести третью мнимую единицу такую, что  $k \neq i \neq j$  со свойством  $k = ij = -ji$ . Эта новая некоммутативная числовая система характеризуется, следовательно, тремя мнимыми единицами  $i, j, k$ , которые удовлетворяют следующим правилам умножения  $i^2 = j^2 = k^2 = ji = -1$ . Числа формы  $\mathbf{q} = w + xi + yj + zk$ , где  $t, x, y, z \in \mathbf{R}$ , называются кватернионами. Они формируют 4D алгебру

$$\text{Alg}_4^{Sp(3,0,0)}(\mathbf{R} | i, j, k) := \mathbf{R} + \mathbf{R}i + \mathbf{R}j + \mathbf{R}k = \{\mathbf{q} = t + xi + yj + zk | t, x, y, z \in \mathbf{R}\}$$

над полем вещественных чисел  $\mathbf{R}$ , натянутую на 4 мнимые единицы  $1, i, j, k$ .

Числовая  $w$  и векторная  $\vec{\mathbf{r}} = xi + yj + zk$  составляющие были названы Гамильтоном скалярной и векторной частями кватерниона, соответственно. Теперь эти компоненты обозначаются так  $w := \text{Sc}(\mathbf{q})$  и  $\vec{\mathbf{r}} = xi + yj + zk = \text{Vec}(\mathbf{q})$ . Следовательно, согласно Гамильтону каждый кватернион является суммой скалярного числа и вектора  $\mathbf{q} = w + \vec{\mathbf{r}}$ , где  $w := \text{Sc}(\mathbf{q})$  и  $\vec{\mathbf{r}} = \text{Vec}(\mathbf{q}) \in \mathbf{R}^3$ . Сложение и вычитание двух векторов  $\mathbf{r}_1 = x_1i + y_1j + z_1k$  и  $\mathbf{r}_2 = x_2i + y_2j + z_2k$  определяется так:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 &= (x_1i + y_1j + z_1k) \pm (x_2i + y_2j + z_2k) = \\ &= (x_1 \pm x_2)i + (y_1 \pm y_2)j + (z_1 \pm z_2)k. \end{aligned}$$

Их произведение дает кватернион общего вида  $\mathbf{q} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = -(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2]$ , скалярную часть  $\text{Sc}(\mathbf{q}) = \text{Sc}(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = -(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  которого Гамильтон назвал скалярным произведением векторов  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ , а векторную часть  $\text{Vec}(\mathbf{q}) = \text{Vec}(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$  – векторным произведением этих векторов (заметим, что определение скалярного произведения по Гамильтону отличается от современного определения только знаком, хотя векторное произведение – то

же самое). В частности,  $\dot{i}^2 = -(\dot{i}, \dot{i}) + [\dot{i} \times \dot{i}] = -(\dot{i}, \dot{i}) = -1$  для векторов  $\dot{i}$  с единичной нормой  $\|\dot{i}\|=1$ . Это означает, что в кватернионной теории существует бесконечно много квадратных корней из  $-1$ , расположенных на сфере единичного радиуса  $\dot{i} = i \cos \varphi + j \sin \varphi \cdot \cos \theta + k \sin \varphi \cdot \sin \theta$ . Для них  $\dot{i}^2 = -1$ . Числа  $\dot{i}$ , будучи точками на единичной сфере, имеют следующие координаты  $\dot{i} = (\cos \varphi, \sin \varphi \cdot \cos \theta, \sin \varphi \cdot \sin \theta)$ . Это обстоятельство послужит основой для введения новых преобразований Фурье с новым ядром типа  $e^{-i\langle \omega | x \rangle}$ , где  $\dot{i}^2 = -1$ , вместо  $e^{-i\langle \omega | x \rangle}$ ,  $e^{-j\langle \omega | x \rangle}$  или  $e^{-k\langle \omega | x \rangle}$ .

Произведение кватернионов Гамильтон определил следующим образом

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 &= (w_1 + \vec{r}_1) \cdot (w_2 + \vec{r}_2) = w_1 w_2 + w_2 \vec{r}_1 + w_1 \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \\ &= [w_1 w_2 - (\vec{r}_1, \vec{r}_2)] + [w_2 \vec{r}_1 + w_1 \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2], \end{aligned}$$

где  $\text{Sc}(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2) = [w_1 w_2 - (\vec{r}_1, \vec{r}_2)]$ ,  $\text{Vec}(\mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2) = [w_2 \vec{r}_1 + w_1 \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2]$ .

Стандартное определение сопряжения таково  $\bar{\mathbf{q}} = w - xi - yj - zk$ . Легко проверить, что  $\overline{\mathbf{q} + \mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{q}}$ ,  $\overline{\mathbf{q}\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{q}}$ ,  $\overline{\overline{\mathbf{q}\mathbf{p}}} = \mathbf{q}\mathbf{p}$ . Самосопряженные кватернионы ( $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$ ) принадлежат полю реальных чисел, а произведение  $\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}$  эквивалентно

$$\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| = w_0^2 + x^2 + y^2 + z^2.$$

**Определение 2.7.** Квадратичная форма  $N(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| = w_0^2 + x^2 + y^2 + z^2$  называется нормой кватерниона  $\mathbf{q}$ .

Она может принимать только положительные значения. Легко проверить, что  $N(\mathbf{q}\mathbf{p}) = N(\mathbf{p}\mathbf{q}) = N(\mathbf{q})N(\mathbf{p})$ . Действительно,  $\overline{\mathbf{q}\mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{q}} = \|\mathbf{p}\|\|\mathbf{q}\|$ .

**Определение 2.8.** Квадратный корень из произведения  $\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}}$  называется модулем кватерниона  $\mathbf{q}$  и обозначается как  $|\mathbf{q}| = \sqrt{N(\mathbf{q})} = \sqrt{\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}}$ .

Заметим, что  $\|1\|=1$ ,  $\|i\|=\|j\|=\|k\|=1$ . Каждый кватернион  $\mathbf{q} \neq 0$ , такой, что  $\|\mathbf{q}\| \neq 0$ , имеет обратный относительно умножения  $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}/\|\mathbf{q}\|$ . Следующие равенства верны:  $(\mathbf{p}\mathbf{q})^{-1} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{p}^{-1}$ ,  $\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{q} = 1$ .

**Определение 2.9.** Кватернионы  $\{\mathbf{q} | N(\mathbf{q}) = 1\}$  единичной нормы называются единичными кватернионами.

Единичные кватернионы  $\mathbf{q} = t + xi + yj + zk$  формируют  $3D$  гиперсферу  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^4$ . Для каждого кватерниона  $\mathbf{q}$  с ненулевой нормой следующий кватернион

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}} &= \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} = \frac{t + \mathbf{r}}{\|\mathbf{q}\|} = \frac{t}{\|\mathbf{q}\|} + \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{q}\|} = \frac{t}{\|\mathbf{q}\|} + \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{q}\|} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{t}{\|\mathbf{q}\|} + \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{q}\|} \hat{\mathbf{i}} = \\ &= \cos \alpha + \hat{\mathbf{i}} \cdot \sin \alpha = \cos \alpha + (\mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}) \sin \alpha = \cos \alpha + \hat{\mathbf{i}} \sin \alpha \end{aligned}$$

является единичным кватернионом, где

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}\| &= \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}, \quad \hat{\mathbf{i}} = \mathbf{r} / \|\mathbf{r}\|, \quad \cos \alpha = t / \|\mathbf{q}\|, \quad \sin \alpha = \|\mathbf{r}\| / \|\mathbf{q}\|, \\ \mu_1 &= x / \|\mathbf{r}\|, \quad \mu_2 = y / \|\mathbf{r}\|, \quad \mu_3 = z / \|\mathbf{r}\|, \end{aligned}$$

и  $\hat{\mathbf{i}} = \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}$ . Очевидно,

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| \cdot [\cos \alpha + \hat{\mathbf{i}}(\gamma, \theta) \sin \alpha] = \|\mathbf{q}\| \cdot [\cos \alpha + (\mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k}) \sin \alpha],$$

где  $\hat{\mathbf{i}}(\gamma, \theta) = \mathbf{i} \cos \gamma + \mathbf{j} \sin \gamma \cos \theta + \mathbf{k} \sin \gamma \sin \theta \in \mathbb{S}^2$ , и  $\theta, \varphi \in [0, \pi]$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi)$  суть полярные координаты мнимой единицы на сфере. Очевидно,

$$t = \|\mathbf{q}\| \cdot \cos \alpha, \quad x = \|\mathbf{q}\| \cdot \cos \gamma \cdot \sin \alpha, \quad y = \|\mathbf{q}\| \cdot \sin \gamma \cdot \cos \theta \cdot \sin \alpha, \quad z = \|\mathbf{q}\| \cdot \sin \gamma \cdot \sin \theta \cdot \sin \alpha.$$

В частности, для  $\mathbf{q}_1 \equiv \mathbf{r}_1 = b_1 \mathbf{i} + c_1 \mathbf{j} + d_1 \mathbf{k}$  и  $\mathbf{q}_2 \equiv \mathbf{r}_2 = b_2 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + d_2 \mathbf{k}$  мы получаем

$$\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 = -\langle \mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2 \rangle + [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2], \quad \mathbf{r}^2 = \mathbf{r} \mathbf{r} = -\langle \mathbf{r} | \mathbf{r} \rangle = -\|\mathbf{r}\|^2,$$

и для чистого кватерниона  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$  с единичной нормой  $\|\boldsymbol{\mu}\| = 1$  мы имеем  $\boldsymbol{\mu}^2 = -\|\boldsymbol{\mu}\|^2 = -1$ . Этот чистый кватернион  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$  и является обобщенной мнимой единицей кватернионного типа  $\boldsymbol{\mu}^2 = \hat{\mathbf{i}}^2 = -1$ .

Это означает, что если в классической теории комплексных чисел существует только два различных квадратичных корня из минуса единицы ( $+i$  и  $-i$ ), то в кватернионной теории существует бесконечное число различных квадратичных корней из единицы и все они различны

$$\hat{i} = \hat{i}(\gamma, \theta) = (\mu_x \mathbf{i} + \mu_y \mathbf{j} + \mu_z \mathbf{k}) = (\cos \gamma \cdot \mathbf{i} + \sin \gamma \cos \theta \cdot \mathbf{j} + \sin \gamma \sin \theta \cdot \mathbf{k}) \in \mathbb{S}^2.$$

Здесь  $\hat{i}(\gamma, \theta) = (\cos \gamma, \sin \gamma \cos \theta, \sin \gamma \sin \theta)$  точка на сферической поверхности, имеющая координаты  $\cos \gamma, \sin \gamma \cos \theta, \sin \gamma \sin \theta$  (см. Рис. 4).

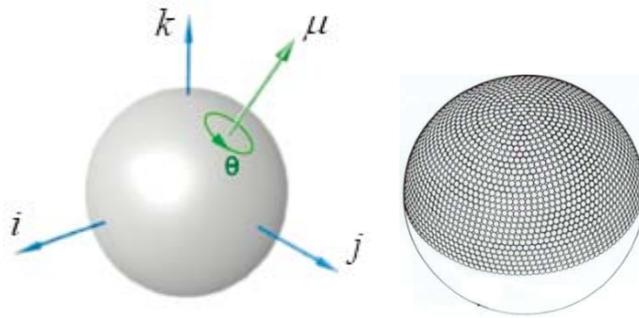
Каждый единичный кватернион имеет следующую форму:

$$\mathbf{q} = \cos \varphi + \hat{i} \cdot \sin \varphi. \quad (2.8)$$

Действительно,

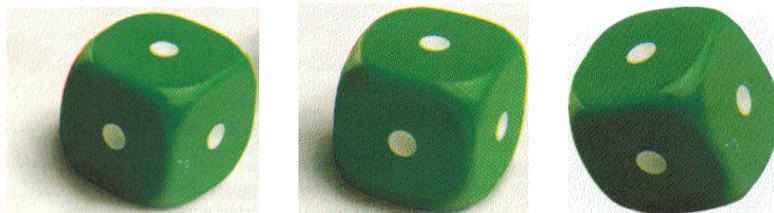
$$\begin{aligned} N(\mathbf{q}) &= \mathbf{q}\bar{\mathbf{q}} = (\cos \varphi + \hat{i} \cdot \sin \varphi) \overline{(\cos \varphi + \hat{i} \cdot \sin \varphi)} = \\ &= (\cos^2 \varphi - \hat{i}^2 \cdot \sin^2 \varphi) = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1. \end{aligned}$$

Это означает, что аналог формулы Эйлера имеет место и для кватернионов.



**Рис. 4.** Каждый 3D вектор  $\hat{i}(\gamma, \theta) \in \mathbb{S}^2$  единичной длины играет роль мнимой единицы

**Теорема 2.2.** Преобразование  $\mathbf{r}' = e^{i\varphi/2} \cdot \mathbf{r} \cdot e^{-i\varphi/2}$  представляет вращение трехмерного Евклидова пространства вокруг чисто векторного кватерниона  $\hat{i}(\gamma, \theta)$  на угол  $\varphi$  (см. рис. 2.8).



**Рис. 2.8.** Евклидовы вращения 3D цветных изображений

Гамильтон также рассматривал частные от деления двух векторов;

нетрудно видеть, что  $\frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{r}_2} = \frac{|\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2|}(\cos \varphi + \dot{i}(\gamma, \theta) \sin \varphi)$ , т.е.  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \frac{|\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2|}(\cos \varphi + \dot{i}(\gamma, \theta) \sin \varphi)$ ,

где  $\varphi$  - угол между векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , а  $\dot{i}(\gamma, \theta) = \frac{1}{|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|}[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2]$ . Это означает,

что частное от деления вектора  $\mathbf{r}_1$  на вектор  $\mathbf{r}_2$  является следующим кватернионом

$$\mathbf{q} = \frac{|\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2|}(\cos \varphi + \dot{i}(\gamma, \theta) \cdot \sin \varphi) = \frac{|\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2|} \left( \cos \varphi + \frac{1}{|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|}[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2] \cdot \sin \varphi \right), \quad (2.8)$$

и этот кватернион можно рассматривать как оператор, преобразующий вектор  $\mathbf{r}_1$  в  $\mathbf{r}_2$ :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \frac{|\mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2|} \left( \cos \varphi + \frac{1}{|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|}[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2] \cdot \sin \varphi \right).$$

### 2.3.3. Обобщенные кватернионные алгебры. Комплексные числа

$\mathbf{z} = (x + Ky)$  формируют двумерную алгебру

$$\text{Alg}_2^{(a, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | I) := \mathbf{R} + K\mathbf{R} = \{ \mathbf{z} = x + Ky | x, y \in \mathbf{R} \},$$

натянутую на две единицы  $1, K$ , со свойством  $K^2 = -1, 0, +1$ . Кватернионы, сконструированные Гамильтоном [20-22], формируют четырехмерную пространственную алгебру

$$\text{Alg}_4^{\text{Sp}(3,0,0)}(\mathbf{R} | i, j, k) := \mathbf{R} + \mathbf{R}i + \mathbf{R}j + \mathbf{R}k = \{ \mathbf{q} = t + xi + yj + zk | t, x, y, z \in \mathbf{R} \},$$

натянутую на  $1, i, j, k$ , где  $k = ij$ ,  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ . С целью обобщения мы можем положить  $i^2 = \delta_1 = -1, 0, +1$ .  $j^2 = \delta_2 = -1, 0, +1$ ,  $k^2 = (ij)^2 = -\delta_1\delta_2$ . Вводя обозначения  $K_1, K_2, K_3 = K_1K_2$  для новых гипермнимых единиц со свойствами  $K_1^2 = \delta_1$ ,  $K_2^2 = \delta_2$ ,  $(K_1K_2)^2 = -\delta_1\delta_2$ , мы получаем девять алгебр

$$\text{Alg}_4^{(a, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, K_1, K_2, K_1K_2) := \{ \mathbf{q} = v_0 1 + v_1 K_1 + v_2 K_2 + v_3 K_1K_2 | v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R} \},$$

в зависимости от того, какие девять вариантов мы выберем из совокупности следующих равенств  $K_1^2 = \delta_1 = +1, 0, -1$  и  $K_2^2 = \delta_2 = +1, 0, -1$ . Легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \text{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, K_1, K_2, K_1 K_2) = \\ & = \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot K_1 + \mathbf{R} \cdot K_2 + \mathbf{R} \cdot K_1 K_2 = (\mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot K_1) + (\mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot K_1) \cdot K_2. \end{aligned}$$

Эти обобщенные алгебры были предложены Клиффордом [11].

Мы будем использовать обозначение  $\text{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, K_1, K_2, K_1 K_2)$ , для обозначения двух кватернионных алгебр:

$$\text{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, K_1, K_2, K_1 K_2) = \begin{cases} \text{Alg}_4^{\text{Sp}(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2), & K = I, \\ \text{Alg}_4^{\text{Vis}(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1 J_2), & K = J. \end{cases}$$

Переменную, принадлежащую алгебре  $\text{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | K)$ , будем обозначать символом  $\mathbf{q}$ , которая может принимать два облика:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= v_0 1 + v_1 K_1 + v_2 K_2 + v_3 K_1 K_2 = \\ &= \begin{cases} \mathbf{q} = x_0 1 + x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2 \in \text{Alg}_4^{\text{Sp}(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2), \\ \mathbf{f} = f_0 1 + f_1 J_1 + f_2 J_2 + f_3 J_1 J_2 \in \text{Alg}_4^{\text{Vis}(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1 J_2). \end{cases} \end{aligned}$$

С помощью алгебры  $\text{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, K_1, K_2, K_1 K_2)$  мы изучим общие алгебраические свойства областей определения и значений наших изображений. 4-хроматические 4D изображения

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \\ & = (f_0(x_0, x_1, x_2, x_3), f_1(x_0, x_1, x_2, x_3), f_2(x_0, x_1, x_2, x_3), f_3(x_0, x_1, x_2, x_3)): \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{V}^4 \end{aligned}$$

обладают двумя атрибутами:  $\mathbf{R}^4, \mathbf{V}^4$  – четырехмерными физическим и визуальным пространствами. Мы оснащаем эти пространства двумя структурами 4D алгебр  $\text{Alg}_2^{\text{Sp}(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2)$  и  $\text{Alg}_4^{\text{Vis}(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1 J_2)$ :

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}^4 \rightarrow \text{Alg}_2^{\text{Sp}(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2) := \\ & = \mathbf{R} + \mathbf{R}I_1 + \mathbf{R}I_2 + \mathbf{R}I_1 I_2 = \{ \mathbf{q} = x_0 1 + x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2 \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{V}^4 \rightarrow \text{Alg}_4^{\text{Vis}(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1 J_2) := \\ & = \mathbf{R} + \mathbf{R}J_1 + \mathbf{R}J_2 + \mathbf{R}J_1 J_2 = \{ \mathbf{f} = f_0 1 + f_1 J_1 + f_2 J_2 + f_3 J_1 J_2 \mid f_0, f_1, f_2, f_3 \in \mathbf{R} \}, \end{aligned}$$

где  $I_1, I_2, I_1 I_2$  и  $J_1, J_2, J_1 J_2$  – пространственные и цветные мнимые единицы,

соответственно, со свойствами  $I_1^2 = \delta_1 \in \{-1, 0, +1\}$ ,  $I_2^2 = \delta_2 \in \{-1, 0, +1\}$ ,  $J_1^2 = \beta_1 \in \{-1, 0, +1\}$ ,  $J_2^2 = \beta_2 \in \{-1, 0, +1\}$ . Эти алгебры называются пространственной и цветной алгебрами физического  $\mathbf{R}^4$  и визуального (перцептуального)  $\mathbf{V}^4$  пространств. При изучении свойств кватернионных функций мы будем пользоваться следующим обозначением:

$$f(\mathbf{q}): \text{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, K_1, K_2, K_1 K_2) \rightarrow \text{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, K_1, K_2, K_1 K_2).$$

где  $K_1, K_2, K_1 K_2$  кватернионные мнимые единицы областей определения и значений функции. Переход от функций общего вида к функциям конкретного вида осуществляется следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} f(\mathbf{q}): \text{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, K_1, K_2, K_1 K_2) & \rightarrow & \text{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, K_1, K_2, K_1 K_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(\mathbf{q}): \text{Alg}_4^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2) & \rightarrow & \text{Alg}_4^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1 J_2), \end{array}$$

где

$$\begin{cases} \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} = x_0 1 + x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2, & \mathbf{q} \in \text{Alg}_4^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2), \\ \mathbf{f} \rightarrow \mathbf{f} = f_0 1 + f_1 J_1 + f_2 J_2 + f_3 J_1 J_2, & \mathbf{f} \in \text{Alg}_4^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1 J_2). \end{cases}$$

Элементы алгебры  $\text{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, K_1, K_2, K_1 K_2)$  будем обозначать символом  $\mathbf{q} = v_0 + (v_1 K_1 + v_2 K_2 + v_3 K_1 K_2)$  и называть их обобщенными кватернионами.

**2.3.4. Свойства обобщенных кватернионных алгебр.** Итак, каждый кватернион имеет уникальное скалярно-векторное представление в форме  $\mathbf{q} = v_0 + (v_1 K_1 + v_2 K_2 + v_3 K_1 K_2) = v_0 + \vec{v} = \text{Sc}(\mathbf{q}) + \text{Vec}(\mathbf{q})$ , где  $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R}$  - реальные числа, а  $v_0 = \text{Sc}(\mathbf{q})$  и  $\vec{v} = \text{Vec}(\mathbf{q}) = v_1 K_1 + v_2 K_2 + v_3 K_1 K_2$  [24-27].

Правило перемножения мнимых единиц дается следующей таблицей:

$\cdot$	1	$K_1$	$K_2$	$K_1 K_2$
1	1	$K_1$	$K_2$	$K_1 K_2$
$K_1$	$K_1$	$\delta_1$	$K_1 K_2$	$\delta_1 K_2$
$K_2$	$K_2$	$-K_1 K_2$	$\delta_2$	$-\delta_2 K_1$
$K_1 K_2$	$K_1 K_2$	$-\delta_1 K_2$	$\delta_2 K_1$	$\delta_1 \delta_2$

Сложение, вычитание и произведение двух обобщенных кватернионом

$\mathbf{q}_1 = v_0 + v_1 K_1 + v_2 K_2 + v_3 K_1 K_2$  и  $\mathbf{q}_2 = w_0 + w_1 K_1 + w_2 K_2 + w_3 K_1 K_2$  определяется так:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 \pm \mathbf{q}_2 &= (v_0 + v_1 K_1 + v_2 K_2 + v_3 K_1 K_2) \pm (w_0 + w_1 K_1 + w_2 K_2 + w_3 K_1 K_2) = \\ &= (v_0 + w_0) + (v_1 + w_1) K_1 + (v_2 + w_2) K_2 + (v_3 + w_3) K_1 K_2 = (v_0 \pm w_0) + (\vec{v} \pm \vec{w}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 &= (v_0 + v_1 K_1 + v_2 K_2 + v_3 K_1 K_2) \circ (w_0 + w_1 K_1 + w_2 K_2 + w_3 K_1 K_2) = \\ &= (v_0 w_0 - v_1 w_1 - v_2 w_2 - v_3 w_3) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) K_1 + \\ &+ (a_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 - b_1 d_2) K_2 + (a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) K_1 K_2 = \\ &= (v_0 + \vec{v}) \cdot (w_0 + \vec{w}) = [v_0 w_0 - (\vec{v}, \vec{w})] + [v_0 \vec{w} + w_0 \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w}],\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \mathbf{Vec}(\mathbf{q}) = v_1 K_1 + v_2 K_2 + v_3 K_1 K_2, \quad \vec{w} = \mathbf{Vec}(\mathbf{q}) = w_1 K_1 + w_2 K_2 + w_3 K_1 K_2, \\ \vec{v} \cdot \vec{w} &= -(\vec{v}, \vec{w}) + \vec{v} \times \vec{w} \quad \text{и} \quad (\vec{v}, \vec{w}) := v_1 w_1 \delta_1 + v_2 w_2 \delta_2 + v_3 w_3 \delta_1 \delta_2, \\ \vec{v} \times \vec{w} &:= -\delta_1 K_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + \delta_2 K_2 (v_1 w_3 - v_3 w_1) + \delta_2 \delta_1 K_1 K_2 (v_1 w_2 - v_2 w_1).\end{aligned}$$

Для чисто векторных кватернионов мы имеем  $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = -(\vec{v}, \vec{v}) = -\|\vec{v}\|^2 = - (v_1^2 \delta_1 + v_2^2 \delta_2 + v_3^2 \delta_1 \delta_2)$ . Интересно, что если  $\|\vec{v}\|^2 = 1$ , то  $\vec{v}^2 = \hat{i}^2 = -1$ . Такие кватернионы подобны обобщенной мнимой единице  $\hat{i}$ , для которой  $\hat{i}^2 = -1$ .

Нетрудно видеть, что существует девять различных кватернионных алгебр:

$$\begin{aligned}\mathcal{Alg}_4^{(3,0,0)}(\mathbf{R} | 1, K_1^-, K_2^-, K_1^- K_2^-) &:= \{ \mathbf{q} = v_0 1 + v_1 K_1^- + v_2 K_2^- + v_3 K_1^- K_2^- \mid v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R} \}, \\ \mathcal{Alg}_4^{(1,0,2)}(\mathbf{R} | 1, K_1^-, K_2^0, K_1^- K_2^0) &:= \{ \mathbf{q} = v_0 1 + v_1 K_1^- + v_2 K_2^0 + v_3 K_1^- K_2^0 \mid v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R} \}, \\ \mathcal{Alg}_4^{(1,2,0)}(\mathbf{R} | 1, K_1^-, K_2^+, K_1^- K_2^+) &:= \{ \mathbf{q} = v_0 1 + v_1 K_1^- + v_2 K_2^+ + v_3 K_1^- K_2^+ \mid v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R} \}, \\ \mathcal{Alg}_4^{(1,0,2)}(\mathbf{R} | 1, K_1^0, K_2^-, K_1^0 K_2^-) &:= \{ \mathbf{q} = v_0 1 + v_1 K_1^0 + v_2 K_2^- + v_3 K_1^0 K_2^- \mid v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R} \}, \\ \mathcal{Alg}_4^{(0,0,3)}(\mathbf{R} | 1, K_1^0, K_2^0, K_1^0 K_2^0) &:= \{ \mathbf{q} = v_0 1 + v_1 K_1^0 + v_2 K_2^0 + v_3 K_1^0 K_2^0 \mid v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R} \}, \\ \mathcal{Alg}_4^{(0,1,2)}(\mathbf{R} | 1, K_1^0, K_2^+, K_1^0 K_2^+) &:= \{ \mathbf{q} = v_0 1 + v_1 K_1^0 + v_2 K_2^+ + v_3 K_1^0 K_2^+ \mid v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R} \}, \\ \mathcal{Alg}_4^{(1,2,0)}(\mathbf{R} | 1, K_1^+, K_2^-, K_1^+ K_2^-) &:= \{ \mathbf{q} = v_0 1 + v_1 K_1^+ + v_2 K_2^- + v_3 K_1^+ K_2^- \mid v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R} \}, \\ \mathcal{Alg}_4^{(0,1,2)}(\mathbf{R} | 1, K_1^+, K_2^0, K_1^+ K_2^0) &:= \{ \mathbf{q} = v_0 1 + v_1 K_1^+ + v_2 K_2^0 + v_3 K_1^+ K_2^0 \mid v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R} \}, \\ \mathcal{Alg}_4^{(0,3,0)}(\mathbf{R} | 1, K_1^+, K_2^+, K_1^+ K_2^+) &:= \{ \mathbf{q} = v_0 1 + v_1 K_1^+ + v_2 K_2^+ + v_3 K_1^+ K_2^+ \mid v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R} \},\end{aligned}$$

в зависимости от того, какие из трех возможностей  $K_1^2 = \delta_1 = +1, 0, -1$  и  $K_2^2 = \delta_2 = +1, 0, -1$  реализуются для каждой из гипермнимых единиц  $K_1$  и  $K_2$ .

Если обобщенные комплексные числа формируют двумерные коммутативные кольца (алгебры), то обобщенные кватернионы формируют четырехмерные некоммутативные кольца (алгебры).

В алгебре  $\mathcal{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}$  можно определить уникальное сопряжение

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{q}} &= \overline{\mathbf{z} + \mathbf{w}K_2} = \bar{\mathbf{z}} + \overline{\mathbf{w}K_2} = \bar{\mathbf{z}} + \overline{K_2} \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{z}} - K_2 \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{z}} - \mathbf{w}K_2 = \\ &= \overline{(v_0 + v_1 K_1)} - (v_2 + v_3 K_1) K_2 = v_0 - v_1 K_1 - v_2 K_2 - v_3 K_1 K_2,\end{aligned}$$

где  $\mathbf{z} = v_0 + v_1 K_1$ ,  $\mathbf{w} = v_2 + v_3 K_1$  и  $K_2 \bar{\mathbf{w}} = K_2 (v_2 - v_3 K_1) = (v_2 + v_3 K_1) K_2 = \mathbf{w}K_2$ .

Легко проверить, что  $\overline{\mathbf{q} + \mathbf{p}} = \bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{p}}$ ,  $\overline{\mathbf{q}\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{q}}$ ,  $\overline{\overline{\mathbf{q}\mathbf{p}}} = \mathbf{q}\mathbf{p}$ . Самосопряженные кватернионы ( $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$ ) принадлежат полю комплексных чисел, а произведение

$\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}$  эквивалентно  $\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\|_{\mathcal{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R}|_{K_1, K_2, K_1 K_2})} = (v_0^2 - K_1^2 v_1^2) - K_2^2 (v_2^2 - K_1^2 v_3^2)$ , где

$\|\mathbf{z}\|_{\mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R}|_{K_1})}$  and  $\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R}|_{K_1})}$  - псевдонормы обобщенных комплексных

чисел  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{w}$  в алгебре  $\mathcal{Alg}_2^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R}|_{K_1})$ .

**Определение 2.11.** Квадратичная форма

$$N(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{q}}\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\|_{\mathcal{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R}|_{K_1, K_2, K_1 K_2})} = (v_0^2 - K_1^2 v_1^2) - K_2^2 (v_2^2 - K_1^2 v_3^2)$$

называется псевдонормой обобщенного кватерниона  $\mathbf{q}$ .

Она может принимать положительные и отрицательные значения. Легко проверить, что  $N(\mathbf{q}\mathbf{p}) = N(\mathbf{p}\mathbf{q}) = N(\mathbf{q})N(\mathbf{p})$ . Имеют место следующие равенства:  $(\mathbf{p}\mathbf{q})^{-1} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{p}^{-1}$ ,  $\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{q} = 1$ , если  $N(\mathbf{p}), N(\mathbf{q}) \neq 0$ . Каждый кватернион  $\mathbf{q} \neq 0$  такой, что  $\|\mathbf{q}\| \neq 0$ , обратим:  $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q} / \|\mathbf{q}\|$ .

**Определение 2.12.** Арифметическое значение квадратного корня из произведения  $\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}$  называется модулем обобщенного кватерниона  $\mathbf{q}$  и

обозначается как  $|\mathbf{q}|_{\mathcal{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R}|_{K_1, K_2, K_1 K_2})} = \sqrt{N(\mathbf{q})} = \sqrt{\bar{\mathbf{q}}\mathbf{q}}$  или коротко как  $|\mathbf{q}|$ ,

если это не вызывает недоразумений.

### 2.3.5. Кватернионные геометрии. Если псевдорасстояние $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})$

между двумя обобщенными кватернионами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  определить как модуль их разности  $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{u} = v_0 + v_1 K_1 + v_2 K_2 + v_3 K_1 K_2$ :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= |\mathbf{p} - \mathbf{q}| = |\mathbf{u}| = \sqrt{\|v_0 + v_1 K_1 + v_2 K_2 + v_3 K_1 K_2\|_{\text{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | K_1, K_2, K_1 K_2)}^2} = \\ &= \sqrt{v_0^2 - K_1^2 v_1^2 - K_2^2 v_2^2 + K_2^2 K_1^2 v_3^2} = \sqrt{v_0^2 - \delta_1 v_1^2 - \delta_2 v_2^2 + \delta_1 \delta_2 v_3^2}, \end{aligned}$$

то алгебра  $\text{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, K_1, K_2, K_1 K_2)$  превращается в четырехмерное псевдо-метрическое пространство, обозначаемое как  $\mathbf{Geo}_4^{(1, \delta_1, \delta_2, \delta_1 \delta_2)}$ .

Псевдорасстояние может принимать положительные, отрицательные и даже мнимые значения. Существует девять пространств со следующими псевдометриками:

$$\begin{aligned} \mathbf{Geo}_4^{(+1, +1, +1, +1)} &= \left\langle \left\langle \text{Alg}_4^{(3, 0, 0)}(\mathbf{R} | 1, K_1^-, K_2^-, K_1^- K_2^-), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right\rangle \right\rangle, \\ \mathbf{Geo}_4^{(+1, 0, +1, 0)} &= \left\langle \left\langle \text{Alg}_4^{(1, 0, 2)}(\mathbf{R} | 1, K_1^0, K_2^-, K_1^0 K_2^-), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{v_0^2 + v_2^2} \right\rangle \right\rangle, \\ \mathbf{Geo}_4^{(+1, -1, +1, -1)} &= \left\langle \left\langle \text{Alg}_4^{(1, 2, 0)}(\mathbf{R} | 1, K_1^+, K_2^-, K_1^+ K_2^-), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{v_0^2 - v_1^2 + v_2^2 - v_3^2} \right\rangle \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Geo}_4^{(+1, +1, 0, 0)} &= \left\langle \left\langle \text{Alg}_4^{(1, 0, 2)}(\mathbf{R} | 1, K_1^-, K_2^0, K_1^- K_2^0), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} \right\rangle \right\rangle, \\ \mathbf{Geo}_4^{(+1, 0, 0, 0)} &= \left\langle \left\langle \text{Alg}_4^{(0, 0, 3)}(\mathbf{R} | 1, K_1^0, K_2^0, K_1^0 K_2^0), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{v_0^2} \right\rangle \right\rangle, \\ \mathbf{Geo}_4^{(+1, -1, 0, 0)} &= \left\langle \left\langle \text{Alg}_4^{(0, 1, 2)}(\mathbf{R} | 1, K_1^+, K_2^0, K_1^+ K_2^0), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{v_0^2 - v_1^2} \right\rangle \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Geo}_4^{(+1, +1, -1, -1)} &= \left\langle \left\langle \text{Alg}_4^{(1, 2, 0)}(\mathbf{R} | 1, K_1^-, K_2^+, K_1^- K_2^+), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{v_0^2 + v_1^2 - v_2^2 - v_3^2} \right\rangle \right\rangle, \\ \mathbf{Geo}_4^{(+1, 0, -1, 0)} &= \left\langle \left\langle \text{Alg}_4^{(0, 1, 2)}(\mathbf{R} | 1, K_1^0, K_2^+, K_1^0 K_2^+), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{v_0^2 - v_2^2} \right\rangle \right\rangle, \\ \mathbf{Geo}_4^{(+1, -1, -1, -1)} &= \left\langle \left\langle \text{Alg}_4^{(0, 3, 0)}(\mathbf{R} | 1, K_1^+, K_2^+, K_1^+ K_2^+), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{v_0^2 - v_1^2 - v_2^2 + v_3^2} \right\rangle \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Существует только пять неизоморфных друг другу 4D геометрий:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Geo}_4^{(+1,+1,+1,+1)} &= \left\langle \left\langle \mathcal{Alg}_4^{(3,0,0)}(\mathbf{R} | 1, K_1^-, K_2^-, K_1^- K_2^-), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right\rangle \right\rangle, \\
\mathbf{Geo}_4^{(+1,+1,-1,-1)} &= \left\langle \left\langle \mathcal{Alg}_4^{(1,2,0)}(\mathbf{R} | 1, K_1^-, K_2^+, K_1^- K_2^+), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{v_0^2 + v_1^2 - v_2^2 - v_3^2} \right\rangle \right\rangle, \\
\mathbf{Geo}_4^{(+1,+1,0,0)} &= \left\langle \left\langle \mathcal{Alg}_4^{(1,0,2)}(\mathbf{R} | 1, K_1^-, K_2^0, K_1^- K_2^0), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{v_0^2 + v_1^2} \right\rangle \right\rangle, \\
\mathbf{Geo}_4^{(+1,-1,0,0)} &= \left\langle \left\langle \mathcal{Alg}_4^{(0,1,2)}(\mathbf{R} | 1, K_1^+, K_2^0, K_1^+ K_2^0), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{v_0^2 - v_1^2} \right\rangle \right\rangle, \\
\mathbf{Geo}_4^{(+1,0,0,0)} &= \left\langle \left\langle \mathcal{Alg}_4^{(0,0,3)}(\mathbf{R} | 1, K_1^0, K_2^0, K_1^0 K_2^0), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{v_0^2} = |v_0| \right\rangle \right\rangle.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Итак, мы имеем два множества по пять неизоморфных 4D геометрий: одно множество образует область определения изображения:  $\mathbf{Geo}_4^{Sp(+1,+1,-1,-1)}$ ,  $\mathbf{Geo}_4^{Sp(+1,+1,0,0)}$ ,  $\mathbf{Geo}_4^{Sp(+1,-1,0,0)}$ ,  $\mathbf{Geo}_4^{Sp(+1,0,0,0)}$ ,  $\mathbf{Geo}_4^{Sp(+1,0,0,0)}$ , а второе образует область его значений:  $\mathbf{Geo}_4^{Vis(+1,+1,-1,-1)}$ ,  $\mathbf{Geo}_4^{Vis(+1,+1,0,0)}$ ,  $\mathbf{Geo}_4^{Vis(+1,-1,0,0)}$ ,  $\mathbf{Geo}_4^{Vis(+1,0,0,0)}$ ,  $\mathbf{Geo}_4^{Vis(+1,0,0,0)}$ .

**Определение 12.** Кватернионным изображением называется  $\mathcal{Alg}_4^{Vis(u,v,w)}$  - значная функция

$$f(\mathbf{q}): \mathcal{Alg}_4^{Sp(p-q, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2) \rightarrow \mathcal{Alg}_4^{Vis(u, v, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1 J_2),$$

зависящая от кватернионной переменной  $\mathbf{q} = t + xI_1 + yI_2 + zI_1 I_2 \in \mathcal{Alg}_2^{Sp(p-q, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2)$ :

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{q}) &= f(t, x, y, z) = f(t + xI_1 + yI_2 + zI_1 I_2) = \\
&= f_0(t + xI_1 + yI_2 + zI_1 I_2) + f_1(t + xI_1 + yI_2 + zI_1 I_2)J_1 + f_2(t + xI_1 + yI_2 + zI_1 I_2)J_2 + \\
&\quad + f_3(t + xI_1 + yI_2 + zI_1 I_2)J_1 J_2,
\end{aligned}$$

где  $t + xI_1 + yI_2 + zI_1 I_2 \in \mathbf{Geo}_4^{Sp(+1,+1,-1,-1)}$ ,  $\mathbf{Geo}_4^{Sp(+1,+1,0,0)}$ ,  $\mathbf{Geo}_4^{Sp(+1,-1,0,0)}$ ,  $\mathbf{Geo}_4^{Sp(+1,0,0,0)}$ ,  $\mathbf{Geo}_4^{Sp(+1,0,0,0)}$ ,  
 $f_0 + f_1 J_1 + f_2 J_2 + f_3 J_1 J_2 \in \mathbf{Geo}_4^{Vis(+1,+1,-1,-1)}$ ,  $\mathbf{Geo}_4^{Vis(+1,+1,0,0)}$ ,  $\mathbf{Geo}_4^{Vis(+1,-1,0,0)}$ ,  $\mathbf{Geo}_4^{Vis(+1,0,0,0)}$ ,  $\mathbf{Geo}_4^{Vis(+1,0,0,0)}$ .

Таким образом, существует 25 моделей кватернионных изображений

$$f(\mathbf{q}): \mathcal{Alg}_2^{Sp(p-q, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2) \rightarrow \mathcal{Alg}_4^{Vis(u, v, w_0)}(\mathbf{R} | J_1, J_2, J_1 J_2),$$

представленных ниже:



**2.3.6. Кватернионные геометрии физического и перцептуального пространств.** В рассматриваемом случае  $\text{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | K_1, K_2, K_1 K_2) = \text{Alg}_4^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | I_1, I_2, I_1 I_2)$ . Подпространство чисто векторных кватернионов  $\mathbf{r} = x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_1 I_2$  является трехмерным физическим пространством  $\mathbf{Geo}_3^{Sp(s_1, s_2, s_3)} = \text{Vec}\{\mathbf{Geo}_4^{Sp(s_0, s_1, s_2, s_3)}\}$ . Введенные в  $\mathbf{Geo}_4^{Sp(s_0, s_1, s_2, s_3)}$  псевдометрики индуцируют в  $\mathbf{Geo}_3^{Sp(s_1, s_2, s_3)}$  соответствующие им трехмерные псевдометрики, выражения для которых получаются из (2.9)-(2.11) при  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{Geo}_3^{Sp(+1, +1, +1)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec}\{\text{Alg}_4^{Sp(3, 0, 0)}(\mathbf{R} | 1, I_1^-, I_2^-, I_1^- I_2^-)\}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \right\rangle \right\rangle, \\ \mathbf{Geo}_3^{Sp(0, +1, 0)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec}\{\text{Alg}_4^{Sp(1, 0, 2)}(\mathbf{R} | 1, I_1^0, I_2^-, I_1^0 I_2^-)\}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{y^2} \right\rangle \right\rangle, \\ \mathbf{Geo}_4^{Sp(-1, +1, -1)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec}\{\text{Alg}_4^{Sp(1, 2, 0)}(\mathbf{R} | 1, I_1^+, I_2^-, I_1^+ I_2^-)\}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{(-x^2 + y^2 - z^2)} \right\rangle \right\rangle, \\ \mathbf{Geo}_3^{Sp(1, 0, 0)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec}\{\text{Alg}_4^{Sp(1, 0, 2)}(\mathbf{R} | 1, I_1^-, I_2^0, I_1^- I_2^0)\}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x^2} \right\rangle \right\rangle, \\ \mathbf{Geo}_3^{Sp(1, 0, 0)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec}\{\text{Alg}_4^{Sp(0, 1, 2)}(\mathbf{R} | 1, I_1^+, I_2^0, I_1^+ I_2^0)\}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{-x^2} \right\rangle \right\rangle, \\ \mathbf{Geo}_3^{Sp(+1, -1, -1)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec}\{\text{Alg}_4^{Sp(1, 2, 0)}(\mathbf{R} | 1, I_1^-, I_2^+, I_1^- I_2^+)\}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{(x^2 - y^2 - z^2)} \right\rangle \right\rangle, \\ \mathbf{Geo}_4^{Sp(-1, -1, +1)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec}\{\text{Alg}_4^{Sp(0, 3, 0)}(\mathbf{R} | 1, I_1^+, I_2^+, I_1^+ I_2^+)\}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{(-x^2 - y^2 + z^2)} \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

Существуют только три нетривиальные трехмерные геометрии:

$$\begin{aligned} \mathbf{Geo}_3^{Sp(+1, +1, +1)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec}\{\text{Alg}_4^{Sp(3, 0, 0)}(\mathbf{R} | 1, I_1^-, I_2^-, I_1^- I_2^-)\}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} \right\rangle \right\rangle, \\ \mathbf{Geo}_3^{Sp(1, 0, 0)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec}\{\text{Alg}_4^{Sp(1, 0, 2)}(\mathbf{R} | 1, I_1^-, I_2^0, I_1^- I_2^0)\}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{x^2} = |x| \right\rangle \right\rangle, \quad (2.13) \\ \mathbf{Geo}_3^{Sp(+1, -1, -1)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec}\{\text{Alg}_4^{Sp(1, 2, 0)}(\mathbf{R} | 1, I_1^-, I_2^+, I_1^- I_2^+)\}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{(x^2 - y^2 - z^2)} \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

Соответствующие трехмерные метрические пространства будем обозначать следующими символами  $\mathbf{Geo}_3^{Sp(+1, +1, +1)}$ ,  $\mathbf{Geo}_3^{Sp(+1, -1, -1)}$ ,  $\mathbf{Geo}_3^{Sp(+1, 0, 0)}$ . Они формируют трехмерные пространства Евклида, Минковского и Галилея.

Аналогичная ситуация имеет место для области значений изображений. В этом случае  $\text{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)} = \text{Alg}_4^{\text{Vis}(u_-, v_+, w_0)}$ . Подпространство чисто векторных цветных кватернионов  $\vec{\mathbf{f}} = rJ_1 + gJ_2 + bJ_1J_2$  является трехмерным пространством  $\text{Geo}_3^{\text{Vis}(s_1, s_2, s_3)}$ . Построенные в  $\text{Geo}_4^{\text{Vis}(s_0, s_1, s_2, s_3)}$  псевдометрики, индуцирует в  $\text{Geo}_3^{\text{Vis}(s_1, s_2, s_3)}$  соответствующие им псевдометрики:

$$\begin{aligned} \text{Geo}_3^{\text{Vis}(+1, +1, +1)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec} \left\{ \text{Alg}_4^{\text{Vis}(3, 0, 0)} \left( \mathbf{R} \mid 1, J_1^-, J_2^-, J_1^- J_2^- \right) \right\}, \rho(\vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_2) = \sqrt{(r^2 + g^2 + b^2)} \right\rangle \right\rangle, \\ \text{Geo}_3^{\text{Vis}(0, +1, 0)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec} \left\{ \text{Alg}_4^{\text{Vis}(1, 0, 2)} \left( \mathbf{R} \mid 1, J_1^0, J_2^-, J_1^0 J_2^- \right) \right\}, \rho(\vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_2) = \sqrt{g^2} \right\rangle \right\rangle, \\ \text{Geo}_4^{\text{Vis}(-1, +1, -1)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec} \left\{ \text{Alg}_4^{\text{Vis}(1, 2, 0)} \left( \mathbf{R} \mid 1, J_1^+, J_2^-, J_1^+ J_2^- \right) \right\}, \rho(\vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_2) = \sqrt{(-r^2 + g^2 - b^2)} \right\rangle \right\rangle, \\ \text{Geo}_3^{\text{Vis}(1, 0, 0)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec} \left\{ \text{Alg}_4^{\text{Vis}(1, 0, 2)} \left( \mathbf{R} \mid 1, J_1^-, J_2^0, J_1^- J_2^0 \right) \right\}, \rho(\vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_2) = \sqrt{r^2} \right\rangle \right\rangle, \\ \text{Geo}_3^{\text{Vis}(1, 0, 0)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec} \left\{ \text{Alg}_4^{\text{Vis}(0, 1, 2)} \left( \mathbf{R} \mid 1, J_1^+, J_2^0, J_1^- J_2^+ \right) \right\}, \rho(\vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_2) = \sqrt{-r^2} \right\rangle \right\rangle, \\ \text{Geo}_3^{\text{Vis}(+1, -1, -1)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec} \left\{ \text{Alg}_4^{\text{Vis}(1, 2, 0)} \left( \mathbf{R} \mid 1, J_1^-, J_2^+, J_1^- J_2^+ \right) \right\}, \rho(\vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_2) = \sqrt{(r^2 - g^2 - b^2)} \right\rangle \right\rangle, \\ \text{Geo}_4^{\text{Vis}(-1, -1, +1)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec} \left\{ \text{Alg}_4^{\text{Vis}(0, 3, 0)} \left( \mathbf{R} \mid 1, J_1^+, J_2^+, J_1^+ J_2^+ \right) \right\}, \rho(\vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_2) = \sqrt{(-r^2 - g^2 + b^2)} \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

Существуют только три таких нетривиальных геометрии:

$$\begin{aligned} \text{Geo}_3^{\text{Vis}(+1, +1, +1)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec} \left\{ \text{Alg}_4^{\text{Vis}(3, 0, 0)} \left( \mathbf{R} \mid 1, J_1^-, J_2^-, J_1^- J_2^- \right) \right\}, \rho(\vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_2) = \sqrt{(r^2 + g^2 + b^2)} \right\rangle \right\rangle, \\ \text{Geo}_3^{\text{Vis}(1, 0, 0)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec} \left\{ \text{Alg}_4^{\text{Vis}(1, 0, 2)} \left( \mathbf{R} \mid 1, J_1^-, J_2^0, J_1^- J_2^0 \right) \right\}, \rho(\vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_2) = \sqrt{r^2} = |g| \right\rangle \right\rangle, \quad (2.14) \\ \text{Geo}_3^{\text{Vis}(+1, -1, -1)} &= \left\langle \left\langle \text{Vec} \left\{ \text{Alg}_4^{\text{Vis}(1, 2, 0)} \left( \mathbf{R} \mid 1, J_1^-, J_2^+, J_1^- J_2^+ \right) \right\}, \rho(\vec{\mathbf{f}}_1, \vec{\mathbf{f}}_2) = \sqrt{(r^2 - g^2 - b^2)} \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

Соответствующие им 3D метрические пространства будем обозначать символами  $\text{Geo}_3^{\text{Vis}(+1, +1, +1)}$ ,  $\text{Geo}_3^{\text{Vis}(+1, -1, -1)}$ ,  $\text{Geo}_3^{\text{Vis}(+1, 0, 0)}$ . Они формируют Евклидово, Минковского и Галилея 3D псевдометрические цветные пространства. Отсюда непосредственно следует, что имеется два множества по три неизоморфных 3D геометрий: одно множество образует область определения

изображения  $\mathbf{Geo}_3^{Sp(+1,+1,+1)}$ ,  $\mathbf{Geo}_3^{Sp(+1,-1,-1)}$ ,  $\mathbf{Geo}_3^{Sp(+1,0,0)}$ , а второе образует область его значений  $\mathbf{Geo}_3^{Vis(+1,+1,+1)}$ ,  $\mathbf{Geo}_3^{Vis(+1,-1,-1)}$ ,  $\mathbf{Geo}_3^{Vis(+1,0,0)}$ . Следовательно, объектом нашего изучения являются 9 типов изображений вида

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{r}}) &= \vec{\mathbf{f}}(x, y, z) = \vec{\mathbf{f}}(xI_1 + yI_2 + zI_1I_2) = \\ &= f_1(xI_1 + yI_2 + zI_1I_2)J_1 + f_2(xI_1 + yI_2 + zI_1I_2)J_2 + f_3(xI_1 + yI_2 + zI_1I_2)J_1J_2, \end{aligned}$$

где

$$\vec{\mathbf{r}} = xI_1 + yI_2 + zI_1I_2 \in \mathbf{Geo}_3^{Sp(+1,+1,+1)}, \mathbf{Geo}_3^{Sp(+1,-1,-1)}, \mathbf{Geo}_3^{Sp(+1,0,0)},$$

$$\vec{\mathbf{f}} = f_1J_1 + f_2J_2 + f_3J_1J_2 \in \mathbf{Geo}_3^{Vis(+1,+1,+1)}, \mathbf{Geo}_3^{Vis(+1,-1,-1)}, \mathbf{Geo}_3^{Vis(+1,0,0)}.$$

### 2.3.7. Алгебраические модели 4D цветных изображений. В

настоящей работе мы предлагаем интерпретировать 4D и 3D изображения  $\mathbf{f}(t, x, y, z)$  и  $\vec{\mathbf{f}}(x, y, z)$  как сигналы, зависящие от кватернионных переменных:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{q}) &= \mathbf{f}(t, x, y, z) = \mathbf{f}(t + xI_1 + yI_2 + zI_1I_2), \\ \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{r}}) &= \vec{\mathbf{f}}(x, y, z) = \vec{\mathbf{f}}(xI_1 + yI_2 + zI_1I_2), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{q} = t + xI_1 + yI_2 + zI_1I_2$ ,  $\vec{\mathbf{r}} = xI_1 + yI_2 + zI_1I_2$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{q}) = f_0(\mathbf{q}) + f_1(\mathbf{q})J_1 + f_2(\mathbf{q})J_2 + f_3(\mathbf{q})J_1J_2$  и  $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{r}}) = f_1(\vec{\mathbf{r}})J_1 + f_2(\vec{\mathbf{r}})J_2 + f_3(\vec{\mathbf{r}})J_1J_2$ . Последние два равенства мы будем иногда записывать в краткой форме  $\mathbf{f} = f_0 + f_1J_1 + f_2J_2 + f_3J_1J_2$  и  $\vec{\mathbf{f}} = f_1J_1 + f_2J_2 + f_3J_1J_2$ .

Как известно [12,13], классические комплексные числа и классические кватернионы единичного модуля имеют следующую форму

$$\mathbf{z} = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi, \quad \mathbf{q} = e^{i\psi} = \cos \psi + \hat{i} \cdot \sin \psi,$$

где  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$  - тригонометрические функции,  $\|\hat{i}\| = 1$  и  $\hat{i}^2 = -1$ .

Оказывается, что обобщенные кватернионы единичного модуля могут быть записаны в аналогичной форме:  $\mathbf{q} = e^{i\psi} = \cos \psi + \hat{i} \cdot \sin \psi \in \mathbf{Alg}_4^{(a_-, b_+, c_0)}$ , где  $\psi$  - угол вращения вокруг чисто векторного кватерниона  $\hat{i}$  единичного модуля (где  $\|\hat{i}\| = \|\nu_1K_1 + \nu_2K_2 + \nu_3K_1K_2\| = 1$ ,  $\hat{i}^2 = -1$ ).

В зависимости от того, какой алгебре принадлежит обобщенный кватернион  $\mathbf{q}$  можно записать следующие равенства.

$$\mathbf{q} = e^{i\varphi} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{q} = e^{i_{ch}\varphi_{ch}} = \cos \varphi_{ch} + \hat{i}_{ch} \sin \varphi_{ch} \in \text{Alg}_4^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | J_1, J_2, J_1 J_2), \\ \mathbf{q} = e^{i_{sp}\varphi_{sp}} = \cos \varphi_{sp} + \hat{i}_{sp} \sin \varphi_{sp} \in \text{Alg}_4^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | I_1, I_2, I_1 I_2). \end{cases}$$

Кватернионы типа  $\mathbf{q} = e^{i_{sp}\varphi_{sp}}$  будем называть пространственными, а кватернионы типа  $\mathbf{q} = e^{i_{ch}\varphi_{ch}}$  - цветными.

**Теорема 2.3.** Преобразования

$$\mathbf{q}' = e^{i\varphi} \mathbf{q}, \quad \mathbf{q}'' = \mathbf{q} e^{-i\varphi}, \quad \mathbf{q}''' = e^{i\varphi} \mathbf{q} e^{-i\varphi} \quad (2.15)$$

- суть вращения пространства  $\text{Geo}_4^{(s_0, s_1, s_2, s_3)}$  вокруг вектора  $\hat{i}$  и они формируют группы  $\text{Rot}_L(\varphi, \hat{i})$ ,  $\text{Rot}_R(\hat{i}, \varphi)$ ,  $\text{Rot}_{LR}(\varphi/2, \hat{i}, \varphi/2)$  левых, правых и двухсторонних вращений, соответственно.

**Доказательство.** Действительно,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}'\| &= \|e^{i\varphi} \mathbf{q}\| = \|e^{i\varphi}\| \cdot \|\mathbf{q}\| = \|\mathbf{q}\|, \quad \|\mathbf{q}''\| = \|\mathbf{q} e^{-i\varphi}\| = \|\mathbf{q}\| \cdot \|e^{-i\varphi}\| = \|\mathbf{q}\|, \\ \|\mathbf{q}'''\| &= \|e^{i\varphi/2} \mathbf{q} e^{-i\varphi/2}\| = \|e^{i\varphi/2}\| \cdot \|\mathbf{q}\| \cdot \|e^{-i\varphi/2}\| = \|\mathbf{q}\|. \end{aligned}$$

Преобразования (2.15) в физическом и цветовом пространствах имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' &= e^{i_{ch}\varphi_{ch}} \mathbf{q}, \quad \mathbf{q}'' = \mathbf{q} e^{-i_{ch}\varphi_{ch}}, \quad \mathbf{q}''' = e^{i_{ch}\varphi_{ch}/2} \mathbf{q} e^{-i_{ch}\varphi_{ch}/2} \in \text{Alg}_4^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | J_1, J_2, J_1 J_2), \\ \mathbf{q}' &= e^{i_{sp}\varphi_{sp}} \mathbf{q}, \quad \mathbf{q}'' = \mathbf{q} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}}, \quad \mathbf{q}''' = e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \mathbf{q} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} \in \text{Alg}_4^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | I_1, I_2, I_1 I_2). \end{aligned}$$

Рассмотрим геометрические искажения 4D изображений, вызванные 4D преобразованиями. Преобразования изображений (геометрические и цветовые) в физическом и в перцептуальном пространствах могут быть описаны на языках пространственной и перцептуальной алгебр. Эти искажения могут быть вызваны пространственными преобразованиями:

- 1) пространственными трансляциями:  $\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \mathbf{w}$ ,
- 2) изменениями масштаба в  $\lambda$  раз:  $\mathbf{q}' = \lambda \cdot \mathbf{q}$ ,
- 3) левыми и правыми вращениями  $\mathbf{q}' = e^{i_{sp}\varphi_{sp}} \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q}' = \mathbf{q} e^{i_{sp}\varphi_{sp}}$ , а также

двухсторонними вращениями:  $\mathbf{q}' = e^{i_{sp}\varrho_{sp}/2} \mathbf{q} e^{-i_{sp}\varrho_{sp}/2}$  с одновременным изменением масштаба в  $\lambda$  раз

и цветовыми преобразованиями:

1) хроматической трансляцией  $\mathbf{f} + \mathbf{w}$ ,

2) преобразованием насыщенности  $\mu \cdot \mathbf{f}$ .

2) левым и правым  $e^{i_{ch}\theta_{ch}} \mathbf{f}$ ,  $\mathbf{f} e^{-i_{ch}\theta_{ch}}$  цветовыми преобразованиями, а также

вращениями цветового пространства  $\mathbf{f}' = \lambda e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \mathbf{f} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2}$ .

**Определение 2.12.** Преобразования

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{q}' = \lambda \cdot \mathbf{q}, \quad \mathbf{q}' = \lambda e^{i_{sp}\varrho_{sp}} \mathbf{q} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{q}' = \lambda \mathbf{q} e^{i_{sp}\varrho_{sp}} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{q}' = \lambda e^{i_{sp}\varrho_{sp}/2} \mathbf{q} e^{-i_{sp}\varrho_{sp}/2} + \mathbf{w},$$

$$\mathbf{f}' = \mathbf{f} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{f}' = \mu \cdot \mathbf{f}, \quad \mathbf{f}' = \lambda e^{i_{ch}\theta_{ch}} \mathbf{f} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{f}' = \lambda \mathbf{f} e^{-i_{ch}\theta_{ch}} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{f}' = \lambda e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \mathbf{f} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} + \mathbf{w},$$

где  $\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{w} \in \text{Alg}_4^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2)$  и  $\mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{w} \in \text{Alg}_4^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1 J_2)$ ,

называются трансляцией, масштабированием и движениями 4D физического

$\mathbf{Geo}_4^{Sp(s_1, s_2, s_3, s_4)}$  и 4D перцептуального  $\mathbf{Geo}_4^{Vis(b_1, b_2, b_3, b_4)}$  пространств. Все

преобразования формируют следующие группы.

1) Две группы трансляций:

$$\text{Tr}(\mathbf{Geo}_4^{Sp(s_1, s_2, s_3, s_4)}) := \{\mathbf{w} | \mathbf{q}' = \mathbf{q} + \mathbf{w}\} \quad \text{и} \quad \text{Tr}(\mathbf{Geo}_4^{Vis(b_1, b_2, b_3, b_4)}) := \{\mathbf{w} | \mathbf{f}' = \mathbf{f} + \mathbf{w}\}.$$

2) Две группы масштабных преобразований:

$$\text{Sc}(\mathbf{Geo}_4^{Sp(s_1, s_2, s_3, s_4)}) := \{\lambda | \mathbf{q}' = \lambda \cdot \mathbf{q}\} \quad \text{и} \quad \text{Tr}(\mathbf{Geo}_4^{Vis(b_1, b_2, b_3, b_4)}) := \{\mathbf{w} | \mathbf{f}' = \mathbf{f} + \mathbf{w}\}.$$

3) Шесть групп вращений:

$$\text{Rot}_L(\mathbf{Geo}_4^{Sp(s_1, s_2, s_3, s_4)}) := \left\{ e^{i_{sp}\varrho_{sp}} \{.\} | \mathbf{q}' = e^{i_{sp}\varrho_{sp}} \mathbf{q} \right\},$$

$$\text{Rot}_L(\mathbf{Geo}_4^{Vis(b_1, b_2, b_3, b_4)}) := \left\{ e^{i_{ch}\theta_{ch}} \{.\} | \mathbf{f}' = e^{i_{ch}\theta_{ch}} \mathbf{f} \right\},$$

$$\text{Rot}_R(\mathbf{Geo}_4^{Sp(s_1, s_2, s_3, s_4)}) := \left\{ \{.\} e^{-i_{sp}\varrho_{sp}} | \mathbf{q}' = \mathbf{q} e^{-i_{sp}\varrho_{sp}} \right\},$$

$$\text{Rot}_R(\mathbf{Geo}_4^{Vis(b_1, b_2, b_3, b_4)}) := \left\{ \{.\} e^{-i_{ch}\theta_{ch}} | \mathbf{f}' = \mathbf{f} e^{-i_{ch}\theta_{ch}} \right\},$$

$$\mathbf{Rot}_{LR}(\mathbf{Geo}_4^{Sp(s_1, s_2, s_3, s_4)}) := \left\{ e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \{.\} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} \mid \mathbf{q}' = e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \mathbf{q} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} \right\},$$

$$\mathbf{Rot}_{LR}(\mathbf{Geo}_4^{Vis(b_1, b_2, b_3, b_4)}) := \left\{ e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \{.\} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} \mid \mathbf{f}' = e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \mathbf{f} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} \right\},$$

4) Шесть групп аффинных преобразований:

$$\mathbf{Aff}_L(\mathbf{Geo}_4^{Sp(s_0, s_1, s_2, s_3)}) := \left\{ \lambda e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \{.\} + \mathbf{w} \mid \mathbf{q}' = \lambda e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \mathbf{q} + \mathbf{w} \right\},$$

$$\mathbf{Aff}_L(\mathbf{Geo}_4^{Vis(b_0, b_1, b_2, b_3)}) := \left\{ \lambda e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \{.\} + \mathbf{w} \mid \mathbf{f}' = \lambda e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \mathbf{f} + \mathbf{w} \right\},$$

$$\mathbf{Aff}_R(\mathbf{Geo}_4^{Sp(s_0, s_1, s_2, s_3)}) := \left\{ \lambda \{.\} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} + \mathbf{w} \mid \mathbf{q}' = \lambda \mathbf{q} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} + \mathbf{w} \right\},$$

$$\mathbf{Aff}_R(\mathbf{Geo}_4^{Vis(b_0, b_1, b_2, b_3)}) := \left\{ \lambda \{.\} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} + \mathbf{w} \mid \mathbf{f}' = \lambda \mathbf{f} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} + \mathbf{w} \right\},$$

$$\mathbf{Aff}_{LR}(\mathbf{Geo}_4^{Sp(s_0, s_1, s_2, s_3)}) := \left\{ \lambda e^{\tilde{u}\varphi_{sp}/2} \{.\} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} + \mathbf{w} \mid \mathbf{q}' = \lambda e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \mathbf{q} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} + \mathbf{w} \right\},$$

$$\mathbf{Aff}_{LR}(\mathbf{Geo}_4^{Vis(b_0, b_1, b_2, b_3)}) := \left\{ \lambda e^{\tilde{u}\theta_{ch}/2} \{.\} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} + \mathbf{w} \mid \mathbf{f}' = \lambda e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \mathbf{f} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} + \mathbf{w} \right\}.$$

Если  $\mathbf{f}(\mathbf{q})$  - некоторое исходное изображение, то изображение

$$\mu_{\lambda, \varphi_{sp}, \mathbf{w}}^{i_{ch}, \theta_{ch}} \mathbf{f}_{\lambda, \varphi_{sp}, \mathbf{w}}(\mathbf{q}) = \mu e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \cdot \mathbf{f} \left( \lambda e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \mathbf{q} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} + \mathbf{w} \right) e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} + \mathbf{w} \quad (2.16)$$

суть его пространственно-цветовая искаженная версия. Пространственные искажения здесь вызваны преобразованиями физического пространства:

$\mathbf{q} \rightarrow \lambda e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \mathbf{q} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} + \mathbf{w}$ , а цветовые – преобразованиями перцептуального пространства  $\mathbf{f} \rightarrow \mu e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \cdot \mathbf{f} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} + \mathbf{w}$ .

Алгебраические модели изображения и его искаженной версии имеют универсальный характер в том смысле, что многие типы многоканальных изображений, определенные на евклидовых и неевклидовых пространствах могут быть записаны аналогично с применением гиперкомплексных алгебр.

**2.3.8. Алгебраические модели 3D изображений.** Рассмотрим теперь более подробно 4D преобразования типа

$$\mathbf{q}' = e^{i\varphi/2} \mathbf{q} e^{-i\varphi/2} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{r}' = e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \mathbf{r} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2}, \\ \mathbf{f}' = e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \mathbf{f} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2}. \end{cases}$$

Для них мы имеем:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} = t' + \vec{\mathbf{r}}' &= e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} (t + \vec{\mathbf{r}}) e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} = e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} t e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} + e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \vec{\mathbf{r}} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} = \\
 &= t + e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \vec{\mathbf{r}} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2}, \\
 \mathbf{f} = (f_0' + \vec{\mathbf{f}}') &= e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} (f_0 + \mathbf{f}) e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} = e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} f_0 e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} + e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \vec{\mathbf{f}} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} = \\
 &= f_0 + e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \vec{\mathbf{f}} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, преобразования

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}' &= e^{i\varphi/2} \mathbf{q} e^{-i\varphi/2} \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 \mathbf{q}' &= e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \mathbf{q} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2}, \quad \mathbf{f}' = e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \mathbf{f} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2}
 \end{aligned}$$

- суть вращения  $\mathbf{Geo}_3^{(s_1, s_2, s_3)}$  - пространства вокруг вектора  $\hat{i}$  в трехмерном пространстве и они формируют группу вращений  $\mathbf{Rot}(\mathbf{Geo}_3^{(s_1, s_2, s_3)})$ .

В настоящем разделе мы интерпретируем 3D изображения  $\vec{\mathbf{f}}(x, y, z)$  как сигналы, зависящие от кватернионных переменных:

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{r}}) &= \vec{\mathbf{f}}(x, y, z) = \vec{\mathbf{f}}(xI_1 + yI_2 + zI_1I_2) = \\
 &= \vec{f}_1(xI_1 + yI_2 + zI_1I_2)J_1 + \vec{f}_2(xI_1 + yI_2 + zI_1I_2)J_2 + \vec{f}_3(xI_1 + yI_2 + zI_1I_2)J_1J_2,
 \end{aligned}$$

где  $\vec{\mathbf{r}} = xI_1 + yI_2 + zI_1I_2$  и  $\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{r}}) = f_1(\vec{\mathbf{r}})J_1 + f_2(\vec{\mathbf{r}})J_2 + f_3(\vec{\mathbf{r}})J_1J_2$ .

Последнее равенство мы будем иногда записывать в краткой форме  $\vec{\mathbf{f}} = f_1J_1 + f_2J_2 + f_3J_1J_2$ .

**Теорема 2.4.** Преобразования

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{q}}' &= e^{i\varphi/2} \vec{\mathbf{q}} e^{-i\varphi/2} \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 \vec{\mathbf{q}}' &= e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \vec{\mathbf{q}} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2}, \quad \vec{\mathbf{f}}' = e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \vec{\mathbf{f}} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

- суть вращения пространства  $\mathbf{Geo}_3^{(s_1, s_2, s_3)}$  вокруг вектора  $\hat{i}$ , формирующие группу  $\mathbf{Rot}(\varphi/2, \hat{i}, \varphi/2)$  вращений.

Преобразования (2.17) в физическом и цветовом 3D пространствах имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\vec{q}' &= e^{i_{ch}\varphi_{ch}/2} \vec{q} e^{-i_{ch}\varphi_{ch}/2} \in \mathcal{Alg}_3^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | J_1, J_2, J_1 J_2), \\ \vec{q}' &= e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \vec{q} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} \in \mathcal{Alg}_3^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | I_1, I_2, I_1 I_2),\end{aligned}\quad (2.18)$$

**Теорема 2.5.** Каждое движение  $\mathbf{Geo}_3^{(s_1, s_2, s_3)}$ -пространства представимо в следующей форме  $\vec{q}' = e^{i\varphi/2} \vec{q} e^{-i\varphi/2} + \vec{p}$ .

Рассмотрим геометрические искажения 3D изображений, вызванные 3D преобразованиями (2.18). Преобразования изображений (геометрические и цветовые) в физическом и в перцептуальном пространствах могут быть описаны на языках пространственной и перцептуальной алгебр. Эти искажения могут быть вызваны пространственными преобразованиями:

- 1) пространственными трансляциями:  $\vec{q}' = \vec{q} + \vec{w}$ ,
- 2) изменениями масштаба в  $\lambda$  раз:  $\vec{q}' = \lambda \cdot \vec{q}$ ,
- 3) вращениями:  $\vec{q}' = e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \vec{q} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2}$  с одновременным изменением масштаба в  $\lambda$  раз

и цветовыми преобразованиями:

- 1) хроматической трансляцией  $\vec{f} + \vec{w}$ ,
- 2) преобразованием насыщенности  $\mu \cdot \vec{f}$ .
- 3) вращениями цветового пространства  $\vec{f}' = \lambda e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \vec{f} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2}$ .

**Определение 2.13.** Преобразования

$$\begin{aligned}\vec{q}' &= \vec{q} + \vec{w}, \quad \vec{q}' = \lambda \cdot \vec{q}, \quad \vec{q}' = \lambda e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \vec{q} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} + \vec{w}, \\ \vec{f}' &= \vec{f} + \vec{w}, \quad \vec{f}' = \mu \cdot \vec{f}, \quad \vec{f}' = \lambda e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \vec{f} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} + \vec{w},\end{aligned}$$

где  $\vec{q}, \vec{q}', \vec{w} \in \mathcal{Alg}_2^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1 I_2)$  и  $\vec{f}, \vec{f}', \vec{w} \in \mathcal{Alg}_2^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, J_2, J_1 J_2)$ , называются трансляцией, масштабированием и движением 3D физического  $\mathbf{Geo}_3^{Sp(s_2, s_3, s_4)}$  и 3D перцептуального  $\mathbf{Geo}_3^{Vis(b_2, b_3, b_4)}$  пространств, соответственно.

Все преобразования формируют следующие группы.

1) Две группы трансляций:

$$\text{Tr}(\text{Geo}_3^{Sp(s_2, s_3, s_4)}) := \{\vec{w} \mid \vec{q}' = \vec{q} + \vec{w}\} \text{ и } \text{Tr}(\text{Geo}_3^{Vis(b_2, b_3, b_4)}) := \{\vec{w} \mid \vec{f}' = \vec{f} + \vec{w}\}$$

2) Две группы масштабных преобразований:

$$\text{Sc}(\text{Geo}_3^{Sp(s_2, s_3, s_4)}) := \{\lambda \mid \vec{q}' = \lambda \cdot \vec{q}\} \text{ и } \text{Sc}(\text{Geo}_3^{Vis(b_2, b_3, b_4)}) := \{\mu \mid \vec{f}' = \mu \cdot \vec{f}\}.$$

3) Две группы вращений:

$$\text{Rot}(\text{Geo}_3^{Sp(s_2, s_3, s_4)}) := \left\{ e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \{.\} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} \mid \vec{q}' = e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \vec{q} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} \right\},$$

$$\text{Rot}(\text{Geo}_3^{Vis(b_2, b_3, b_4)}) := \left\{ e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \{.\} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} \mid \vec{f}' = e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \vec{f} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} \right\},$$

4) Две группы аффинных преобразований:

$$\text{Aff}_{LR}(\text{Geo}_3^{Sp(s_1, s_2, s_3)}) := \left\{ \lambda e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \{.\} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} + \vec{w} \mid \vec{q}' = \lambda e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \vec{q} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} + \vec{w} \right\},$$

$$\text{Aff}_{LR}(\text{Geo}_3^{Vis(b_1, b_2, b_3)}) := \left\{ \lambda e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \{.\} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} + \vec{w} \mid \vec{f}' = \lambda e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \vec{f} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} + \vec{w} \right\}.$$

Если  $\vec{f}(\vec{r})$  - исходное 3D изображение и  ${}^{\mu, \theta_{ch}, w} \vec{f}_{\lambda, \varphi_{sp}, w}(\vec{q})$  - его искаженная версия, то эти изображения связаны друг с другом следующим равенствами:

$${}^{\mu, \theta_{ch}, w} \vec{f}_{\lambda, \varphi_{sp}, w}(\vec{q}) = \mu e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \cdot \vec{f} \left( \lambda e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \vec{q} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} + \vec{w} \right) e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} + \vec{w}. \quad (2.19)$$

Пространственные искажения здесь вызваны преобразованиями физического 3D пространства:  $\vec{q} \rightarrow \lambda e^{i_{sp}\varphi_{sp}/2} \vec{q} e^{-i_{sp}\varphi_{sp}/2} + \vec{w}$ , а цветовые – преобразованиями 3D перцептуального пространства  $\vec{f} \rightarrow \mu e^{i_{ch}\theta_{ch}/2} \cdot \vec{f} e^{-i_{ch}\theta_{ch}/2} + \vec{w}$ .

Оказывается, что алгебраические модели изображений и их искаженных версий имеют универсальный характер в том смысле, что многие типы многоканальных изображений, определенные на евклидовых и неевклидовых пространствах могут быть записаны в аналогичной форме с применением гиперкомплексных алгебр. Это обстоятельство позволяет разрабатывать новые алгоритмы обработки и инвариантного распознавания изображений.



## Глава 3

### ТРИПЛЕТНЫЕ МОДЕЛИ ЦВЕТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Мы предполагаем, что мозг, обрабатывая изображения, возникающие на сетчатке, оперирует триплетными числами. При таком подходе каждый цветной пиксель рассматривается не как трехмерный вектор, а как трехмерное гиперкомплексное число – триплетное число [1-4]. Заметим, что оба предположения: о векторной природе пикселя или об его алгебраической природе – являются только гипотезами.

В настоящее время не существует никаких прямых экспериментальных свидетельств в пользу той или другой гипотезы. Мы только знаем, что животные весьма эффективно обрабатывают изображения и распознают, содержащиеся в них объекты в инвариантной манере. В дальнейшем мы приведем некоторые факты в пользу алгебраической гипотезы, которые говорят нам о том, что Природа, по-видимому, в процессе эволюции животного мира, обучалась эффективно использовать свойства различных алгебр для построения эффективных видеосистем.

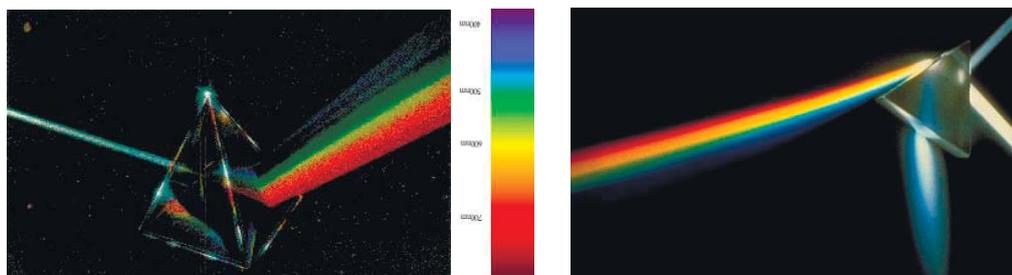
Конечно, алгебраическая природа триплетных чисел, должна быть согласована с основными свойствами цветового перцептуального пространства. Поэтому с целью получения эффективных алгоритмов обработки изображений мы превращаем трехмерное перцептуальное

пространство  $V^3$  в триплетную алгебру (и называем ее перцептуальной алгеброй).

Изменения в физическом и перцептуальном пространствах, например, такие как геометрические и цветные преобразования, могут быть описаны на алгебраическом языке, как действия групп преобразований. Мы предполагаем, что мозг может использовать триплетные числа для ментальных движений воображаемых объектов и для их раскраски (например, во сне или в состояниях измененного сознания) на так называемом «экране сознания».

### 3.1. Цветные изображения

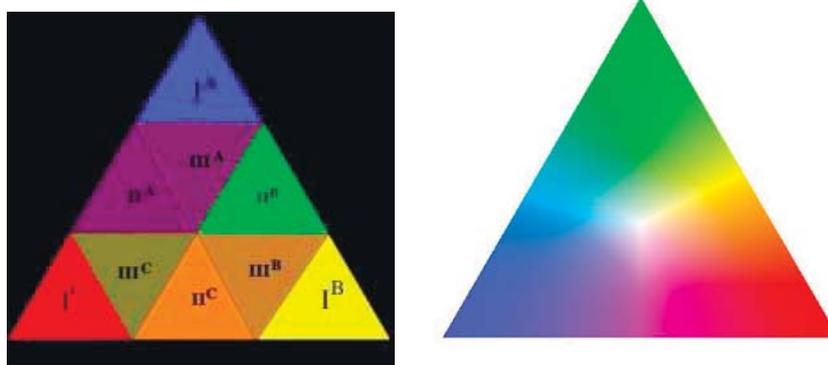
**3.1.1. Что есть цвет?** Цвет является важнейшим атрибутом визуальной информации. Цвета самого по себе не существует. Цвет – это субъективное качество, которое приписывается нашим мозгом всем объектам внешнего мира. Восприятие цвета зависит от многих факторов окружающего мира. Прежде всего, он зависит от того, электромагнитное излучение какой совокупности длин волн поглощается объектом и какой совокупности отражается и попадает в глаз. Например, когда мы находимся в лесу в солнечный день, то деревья воспринимаются нами как зеленые, но если мы вернемся в то же самое место поздним вечером или даже ночью, то деревья будут восприниматься нами как серые. Очевидно, освещенность леса в эти два разных момента времени суток разная и поэтому лес воспринимается нами по-разному. Существенный вклад в физиологическую оптику внес И.Ньютон, заложивший основу для современных работ по цветовому зрению. В 1666 году великий математик и физик Исаак Ньютон [28-30], пропуская белый свет через призму, впервые установил, что белый свет носит сложный характер и его можно разделить на семь ярко выраженных составных частей (красную, оранжевую, желтую, зеленую, голубую, синюю и фиолетовую), представленных на рис. 3.1.



**Рис 3.1.** Ньютон пропустил белый свет через первую призму и на ее выходе получил семь цветных полос. Ньютон рассматривал этот факт как свидетельство того, что белый свет имеет сложную структуру и состоит из семи составных частей

Между этими частями не существует резких границ: они плавно переходят одна в другую, представляя собой спектр электромагнитного излучения. Позднее Ньютон, пропустив спектр, состоящий из различных цветных частей, через вторую призму и на ее выходе получил белый свет. Так впервые в мире был проведен анализ и синтез света. Таким образом, Ньютон первым (по крайней мере, в англоязычной культуре) насчитал в радуге семь цветов. Также он отметил тот факт, что переходы между цветами размыты, то есть, по сути, мы имеем дело с непрерывным спектром и накладывающимся на него результатом категоризирующего действия перцептивного аппарата (который, в свою очередь, испытывает влияние языка). Ньютон был первым, кто заметил, что красный и фиолетовый "концы" радуги, будучи максимально удаленными, с физической точки зрения, приближаются друг к другу по производимому субъективному впечатлению. И... предложил замкнуть радугу в круг. Цветовой круг Ньютона насчитывает восемь цветов. Красный и фиолетовый замыкаются через пурпурный цвет. Его нет в радуге. Эта модель позволяла на качественном уровне предсказывать результаты смешения цветов. Цветовой круг стал первым шагом на пути к построению цветового тела - множества всех возможных цветов, представленных точками в трехмерном пространстве, координатные оси которого являются осями какой-либо системы цветных координат.

После Ньютона, заложившего основы теории цвета в его работе “Optics” [31], цвет оказался вовлеченным во многие науки от психологии до физики. Эмоциональное и психологическое воздействие цвета на человека было изучено Гете в его знаменитой работе [32]. Для Гете цвет был аналогом перспективы и пропорции, т.е. формально-субъективной категорией, которой пользуется мозг для того, чтобы создать удобный для него образ окружающего мира. Свет необходим для того, чтобы окружающий мир окрасить цветом, который не является имманентно присущим окружающему миру свойством. Цвет, скорее всего, качество, которое приписывается мозгом объектам внешнего мира с целью их комфортной идентификации. Цвет в существенной его части зависит от устройства глаза и алгоритмов обработки воспринимаемого цвета, генетически закрепленных у животных, но и развивающихся в процессе эволюции. Для Гете было чрезвычайно важно изучение реакции человека на цветовые воздействия, и его исследования положили начало современной психологии восприятия цвета. Гете впервые предложил модель синтеза цвета из трех базовых цветов – красного, желтого и голубого. Для этого он предложил использовать треугольник (см. рис. 3.2), в вершины которого были помещены три базовых (примитивных) цвета. Разделив треугольник на девять равновеликих треугольничков второго уровня, Гете поместил в вершинные треугольнички примитивные цвета, а в остальные – аддитивные смеси двух соседних базовых цветов.



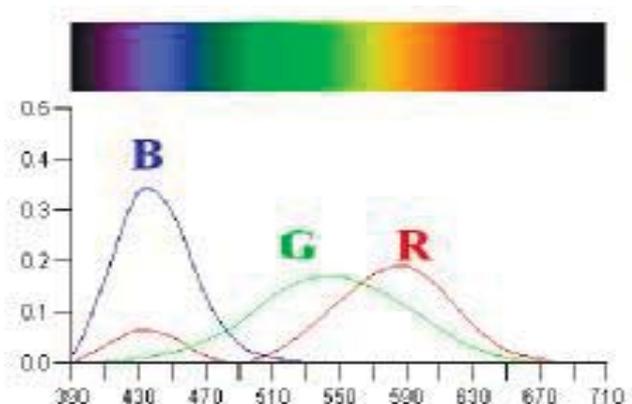
**Рис. 3.2.** Треугольники Гете и Максвелла

Гете верил, что его треугольник является диаграммой человеческого мозга, отражающей вполне определенные человеческие эмоции. Например, Гете считал, что голубой цвет ассоциируется с пониманием и верой, а красный – с депрессией. Он выбрал базовые цвета исходя из их эмоционального воздействия на человека. При этом он не основывался ни на каких физических экспериментах и группировал различные подсекции треугольника по их эмоциональному воздействию. Он считал, что каждой подсекции соответствует вполне определенный эмоциональный элемент в психике человека.

Следующий шаг в развитии теории цвета был сделан Максвеллом [33], который считал теория цвета, как физическая наука, должна опираться на количественные измерения, основанные на созданной им электромагнитной теории. В настоящее время такая наука существует и называется колориметрией. Для представления всех цветов он также разработал цветовой треугольник, подобный треугольнику Гете. В вершины этого треугольника Максвелл поместил три базовых цвета, а каждой точке внутри треугольника он поставил в соответствие определенный цвет, в виде выпуклой линейной комбинацией базовых цветов.

Работы Ньютона, Гете и Максвелла положили начало многочисленным исследованиям, посвященным изучению природы света и цвета. Следующее значительное открытие было сделано английским физиком Томасом Юнгом, который опубликовал в 1801 знаменитую работу [34]. Данная работа была значительно доработана и развита немецким физиком Германом фон Гельмгольцем [35]. Труды обоих ученых в настоящее время составляют суть теории цвета Юнга-Гельмгольца. Согласно их теории, любой цвет может быть представлен в виде линейной выпуклой комбинации трех основных цветов. Эта теория получила убедительное подтверждение с биологической точки зрения, когда Юнг выяснил, что ретина человеческого глаза состоит из четырех типов фоторецепторов. Первый тип рецепторов формирует серое

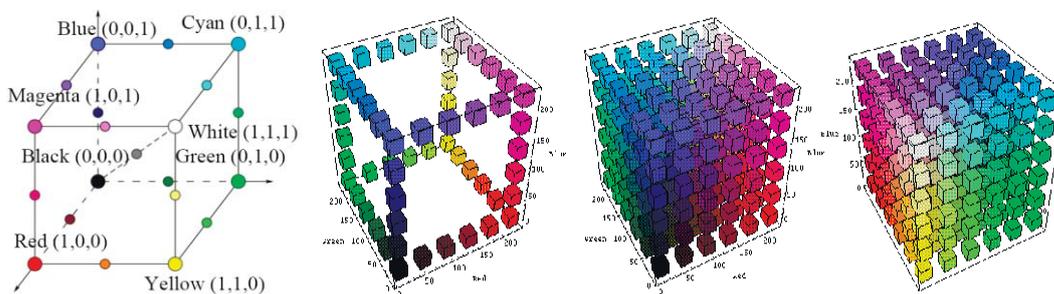
изображение. Три остальных типа формируют красное, зеленое и голубое изображения, линейная комбинация которых и дает нам ощущение цвета. Цветные фоторецепторы воспринимают свет в различных частях электромагнитного диапазона. Каждый из фоторецепторов имеет свою амплитудно-частотную характеристику, пропускающую белый свет в различных полосах прозрачности (рис. 3.3).



**Рис. 3.3.** Амплитудно-частотные характеристики  $R(\lambda), G(\lambda), B(\lambda)$  трех типов  $(R, G, B)$ –фоторецепторов

Сегодня большинством исследователей принята трехкомпонентная теория, согласно которой в нашей зрительной системе существуют три типа фоторецепторов, реагирующие на различные цвета и позволяющие нам их видеть. Впервые основные идеи трехкомпонентной теории цветов были высказаны М.В.Ломоносовым в его знаменитом сочинении "Слово о происхождении света" (1756). К трехкомпонентной теории цветов опытным путем пришел и Томас Юнг, который обнаружил, что любой видимый в спектре цвет может быть получен смешением не менее трех световых лучей. Дальнейшее развитие трехкомпонентная теория цветов получила в работах крупнейшего немецкого естествоиспытателя Гельмгольца. Таким образом, согласно теории Ломоносова-Юнга-Гельмгольца, существуют три типа цветочувствительных элементов, реагирующих на красный, зеленый и синий (фиолетовый) цвета.

**3.1.2. Векторное представление цвета.** В настоящее время представление цвета основывается на трехкомпонентной теории Юнга [34], в основе которой лежит предположение о том, что цвет является аддитивной комбинацией трех базовых цветов. Как мы уже отмечали, это находит подтверждение в физиологических открытиях, согласно которым ретина глаза содержит типа различных цветовых фоторецепторов (колбочек), реагирующих на свет в трех перекрывающихся спектральных диапазонах. Более точно, электромагнитное излучение со спектром  $V(\lambda)$ , сосредоточенным в спектральном диапазоне  $\lambda \in [380\text{nm}, 780\text{nm}]$  воспринимается человеческим глазом как видимый цветной свет. Колбочки каждого типа (красные, зеленые, голубые) имеют специфические амплитудно-частотные характеристики  $R(\lambda), G(\lambda), B(\lambda)$  (см. рис. 3.4), максимумы которых сосредоточены на  $\lambda_R = 700 \text{ nm}$ ,  $\lambda_G = 546.1 \text{ nm}$  и  $\lambda_B = 435.8 \text{ nm}$ . Видимый свет некоторого цвета  $V(\lambda)$  представляется линейной комбинацией АЧХ  $R(\lambda), G(\lambda), B(\lambda)$  следующим образом. Если АЧХ нормализовать до белого цвета  $W(\lambda)$  так, что  $W(\lambda) = R(\lambda) + G(\lambda) + B(\lambda)$ , то можно написать, что  $V(\lambda) = r \cdot R(\lambda) + g \cdot G(\lambda) + b \cdot B(\lambda)$ , где  $r, g, b$  - реакции соответствующих колбочек на видимый цвет  $V(\lambda)$ .



**Рис. 3.4.** 3D перцептуальное цветовое RGB-пространство  $\mathbf{R}_{col}^3$

Поэтому каждый цвет ассоциируется с точкой  $(r, g, b) \in \mathbf{R}_{col}^3$  трехмерного пространства  $\mathbf{R}_{col}^3$ , натянутого на “red”, “green” и “blue”

единичные векторы  $\vec{e}_R, \vec{e}_G, \vec{e}_B$ . Это пространство называется перцептуальным RGB-пространством. Оно полно в том смысле, что каждый цвет однозначно представляется в нем в виде трехмерного вектора. В современной компьютерной технологии каждый примитивный (базовый) цвет квантуется на 256 уровней, что создает  $256 \times 256 \times 256$  возможных цветов (см. рис. 3.4).

**3.1.3. Векторное представление цветных изображений.** Цветное изображение может быть представлено как векторно-значная  $(R, G, B)$ -функция от двух переменных

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{col}(x, y) &= \begin{bmatrix} f_R(x, y) \\ f_G(x, y) \\ f_B(x, y) \end{bmatrix} = f_R(x, y) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + f_G(x, y) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + f_B(x, y) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= f_R(x, y)\mathbf{i} + f_G(x, y)\mathbf{j} + f_B(x, y)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f_R(x, y) &= \int_{\lambda} S^{obj}(\lambda, x, y) R(\lambda) d\lambda, \\ f_G(x, y) &= \int_{\lambda} S^{obj}(\lambda, x, y) G(\lambda) d\lambda, \\ f_B(x, y) &= \int_{\lambda} S^{obj}(\lambda, x, y) B(\lambda) d\lambda, \end{aligned}$$

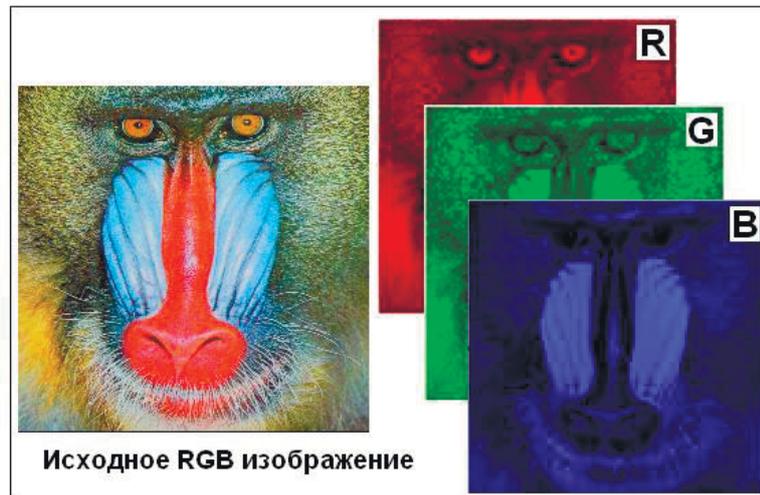
а  $S^{obj}(\lambda, x, y)$  - спектр света, отраженного от объекта,  $R(\lambda), G(\lambda), B(\lambda)$  - АЧХ трех колбочек и  $\lambda$  - длина волны.

Заметим, что цифровые серые изображения представляются как двумерные дискретные сигналы размером  $(N \times N)$  с элементами  $f(n, m)$  (где  $n = 0, 1, \dots, N-1$  и  $m = 0, 1, \dots, N-1$ ) представляющими собой яркости отдельных элементов изображения (пикселей). Это представление предполагает, что оригинальное непрерывное изображение продискретизировано на прямоугольной ортогональной решетке. В случае цветного изображения, каждый пиксель представляется уже не одним, а тремя числами. Эти числа представляют собой интенсивности трех

примитивных цветов. Поэтому цветное изображение может трактоваться как пакет из трех монохромных изображений:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{col}(n,m) &= \begin{bmatrix} f_R(n,m) \\ f_G(n,m) \\ f_B(n,m) \end{bmatrix} = f_R(n,m) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + f_G(n,m) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + f_B(n,m) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= f_R(n,m) \cdot \mathbf{i} + f_G(n,m) \cdot \mathbf{j} + f_B(n,m) \cdot \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Каждое из этих изображений называется каналным изображением. Итак, цветное изображение – есть трехмерное векторное или трехканальное изображение  $\mathbf{f}^{col}(\mathbf{x}) = (f_R(\mathbf{x}), f_G(\mathbf{x}), f_B(\mathbf{x}))$ . Для примера на рис. 3.5 представлено цветное изображение в виде трех каналов.

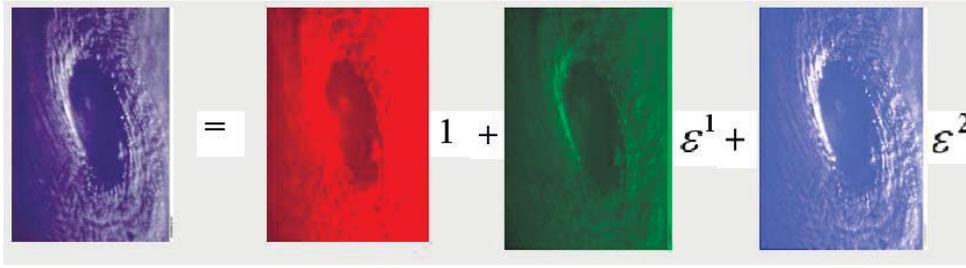


**Рис. 3.5.** Цветное изображение интерпретируется как три отдельных монохроматических изображения

В дальнейшем будем интерпретировать цветное изображение как изображение, принимающие свои значения в трехмерной гиперкомплексной алгебре  $\text{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2) := \mathbf{R}1 + \mathbf{R}\varepsilon^1 + \mathbf{R}\varepsilon^2$  называемой триплетной алгеброй:

$$\mathbf{f}_{col}(\mathbf{x}) = f_R(\mathbf{x})1 + f_G(\mathbf{x})\varepsilon^1 + f_B(\mathbf{x})\varepsilon^2, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

где  $1, \varepsilon^1, \varepsilon^2$  - цветные гипермнимые единицы со свойством  $\varepsilon^3 = 1$ .



**Рис. 3.6.** В классическом подходе каждый цветной пиксель ассоциируется с точкой в трехмерном цветовом векторном RGB-пространстве, а в алгебраическом подходе – триплетным числом:

$$f(\mathbf{x}) = f_r(\mathbf{x})1 + f_g(\mathbf{x})\varepsilon^1 + f_b(\mathbf{x})\varepsilon^2.$$

Мы будем интерпретировать [36-41] его как триплетно-значные сигналы, которые принимают значения в триплетной (цветной) алгебре  $\text{Alg}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2) := \mathbf{R}1 + \mathbf{R}\varepsilon^1 + \mathbf{R}\varepsilon^2$ , где  $1, \varepsilon^1, \varepsilon^2$  – три гипермнимые (цветные) единицы с одним из трех свойств:  $\varepsilon^3 = +1$ ,  $\varepsilon^3 = 0$  либо  $\varepsilon^3 = -1$  (см. рис. 3.6).

Очевидно, существует три перцептуальных цветных алгебры:

- Если  $\varepsilon^3 = \varepsilon_-^3 = -1$ , то

$$\text{Alg}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_-, \varepsilon_-^2) := \mathbf{R}1 + \mathbf{R}\varepsilon_-^1 + \mathbf{R}\varepsilon_-^2 = \{C = r1 + g\varepsilon_-^1 + b\varepsilon_-^2 | r, g, b \in \mathbf{R}\}$$

– цветная алгебра цветных ациклических чисел.

- Если  $\varepsilon^3 = \varepsilon_+^3 = +1$ , то

$$\text{Alg}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_+, \varepsilon_+^2) := \mathbf{R}1 + \mathbf{R}\varepsilon_+^1 + \mathbf{R}\varepsilon_+^2 = \{C = r1 + g\varepsilon_+^1 + b\varepsilon_+^2 | r, g, b \in \mathbf{R}\}$$

– цветная алгебра цветных циклических чисел.

- Если  $\varepsilon^3 = \varepsilon_0^3 = 0$ , то

$$\text{Alg}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_0, \varepsilon_0^2) := \mathbf{R}1 + \mathbf{R}\varepsilon_0^1 + \mathbf{R}\varepsilon_0^2 = \{C = r1 + g\varepsilon_0^1 + b\varepsilon_0^2 | r, g, b \in \mathbf{R}\}$$

– цветная алгебра цветных нильпотентных чисел.

## 3.2. Триплетная (цветная) алгебра RGB-пространства

**3.2.1. Основы триплетной (цветной) алгебры.** Геометрическая интерпретация комплексных точками (векторами) двумерной плоскости породила в 18-ом веке идею алгебраизации точек (векторов) трехмерного

пространства. Эта проблема впервые была сформулирована ирландским математиком У. Гамильтоном. Именно в его работе [21] было впервые дано определение комплексных чисел на основе их представления парами вещественных чисел. В этой же работе Гамильтон поставил вопрос о том, можно ли тройкам чисел поставить в соответствие некоторое трехмерное гиперкомплексное число. В 1837–1838 годах Гамильтон пытался сконструировать подобные числа, которые он назвал триплетами. Однако оказалось, что числовые триплетные системы, сконструированные им, содержат экзотические ненулевые триплетные числа, произведение которых равно нулю, т.е. для  $C_1 \neq 0$  и  $C_2 \neq 0$  имеет место равенство  $C_1 C_2 = 0$ , что противоречило на тот момент разумным представлениям о числах. По этой причине Гамильтон в 1843 бросил изучать трехмерные числа и перешел к попыткам построения четырехмерных чисел, в результате чего ему удалось построить такие числа, которые в настоящее время называются кватернионами. Но алгебра кватернионов также оказалась с точки зрения Гамильтона с “изъяном”: она оказалась некоммутативной. С точки зрения Гамильтона это было меньшим злом, чем наличие делителей нуля. Поэтому он посвятил изучению кватернионов большую часть своей научной жизни.

Изучение трехмерных чисел типа  $\varepsilon^3 = -1, 0, +1$  было продолжено Августом де Морганом [36] и Чарльзом Гревсом [37]. Они изучали различные трехмерные алгебры со следующими законами умножения гипермнимых единиц:

·	1	$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^2$
1	1	$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^2$
$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^2$	-1
$\varepsilon_-^2$	$\varepsilon_-^2$	-1	$\varepsilon_-^1$

·	1	$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^2$
1	1	$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^2$
$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^2$	0
$\varepsilon_0^2$	$\varepsilon_0^2$	0	0

·	1	$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^2$
1	1	$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^2$
$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^2$	1
$\varepsilon_+^2$	$\varepsilon_+^2$	1	$\varepsilon_+^1$

Согласно им числа вида  $C = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$  называются триплетными циклическими числами (если  $\varepsilon^3 = -1$ ), триплетными нильпотентными числами (если  $\varepsilon^3 = 0$ ), триплетными ациклическими числами (если  $\varepsilon^3 = +1$ ). Основной

вклад в развитие теории триплетных циклических чисел был сделан Гревсом. Эти числа мы будем называть просто триплетными или цветными числами. Они имеют следующую таблицу умножения:

·	1	$\varepsilon^1$	$\varepsilon^2$
1	1	$\varepsilon^1$	$\varepsilon^2$
$\varepsilon^1$	$\varepsilon^1$	$\varepsilon^2$	1
$\varepsilon^2$	$\varepsilon^2$	1	$\varepsilon^1$

Сложение, вычитание и произведение двух триплетных чисел  $C_1 = (r_1 + g_1\varepsilon + b_1\varepsilon^2)$  и  $C_2 = (r_2 + g_2\varepsilon + b_2\varepsilon^2)$  определяется следующим образом

$$C \pm C_2 = (r_1 + g_1\varepsilon + b_1\varepsilon^2) \pm (r_2 + g_2\varepsilon + b_2\varepsilon^2) = (r_1 \pm r_2) + (g_1 \pm g_2)\varepsilon + (b_1 \pm b_2)\varepsilon^2,$$

$$\begin{aligned} C_1 \cdot C_2 &= (r_1 + g_1\varepsilon + b_1\varepsilon^2) \cdot (r_2 + g_2\varepsilon + b_2\varepsilon^2) = \\ &= (r_1r_2 + g_1b_2 + b_1g_2) + (r_1g_2 + r_2g_1 + b_1b_2)\varepsilon + (r_1b_2 + g_1g_2 + r_2b_1)\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Триплетное произведение изоморфно трехточечной циклической свертке  $C_1C_2 = (r_1, g_1, b_1) * (r_2, g_2, b_2) = (r_1r_2 + g_1b_2 + b_1g_2, r_1g_2 + r_2g_1 + b_1b_2, r_1b_2 + g_1g_2 + r_2b_1)$ .

Второй метод представления умножения основывается на матричной интерпретации триплетного числа. Каждому числу  $C = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$  можно поставить в соответствие циклическую матрицу

$$C = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2 \Leftrightarrow \hat{C} = \begin{bmatrix} r & g & b \\ b & r & g \\ b & g & r \end{bmatrix}.$$

Произведение  $C = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$  двух триплетных чисел  $C_1 = r_1 + g_1\varepsilon + b_1\varepsilon^2$  и  $C_2 = r_2 + g_2\varepsilon + b_2\varepsilon^2$  в матричной форме представляется произведением циклических матриц:

$$C = C_1C_2 \Leftrightarrow \hat{C} = \begin{bmatrix} r & g & b \\ b & r & g \\ g & b & r \end{bmatrix} = \hat{C}_1\hat{C}_2 = \begin{bmatrix} r_1 & g_1 & b_1 \\ b_1 & r_1 & g_1 \\ g_1 & b_1 & r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2 & g_2 & b_2 \\ b_2 & r_2 & g_2 \\ g_2 & b_2 & r_2 \end{bmatrix}.$$

Цветное (триплетное) сопряжение цветного (триплетного) числа  $C = (r + g\varepsilon + b\varepsilon^2)$  определяется так  $\bar{C} = \overline{r + g\varepsilon + b\varepsilon^2} = r + g\varepsilon^2 + b\varepsilon$ . Его норма  $\|C\|_2 = C\bar{C}$  определяется обычным для комплексных чисел способом

$$\|C\|_2 = C\bar{C} = (r + g\varepsilon + b\varepsilon^2)(r + g\varepsilon^2 + b\varepsilon) = (r^2 + g^2 + b^2) - (rg + rb + gb).$$

Если  $C = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$  - произвольное триплетное число, то число  $C^{-1} = r' + g'\varepsilon + b'\varepsilon^2$  называется обратным, если имеет место равенство  $CC^{-1} = 1$ . Переписывая это равенство покомпонентно, получаем систему из трех уравнений

$$\begin{cases} rr' + bg' + gb' = 1, \\ gr' + rg' + bb' = 0, \\ br' + gg' + rb' = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет следующие решения

$$r' = \frac{r^2 - gb}{r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb}, \quad g' = \frac{b^2 - rg}{r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb}, \quad b' = \frac{g^2 - rb}{r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb},$$

существующие, если  $r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb \neq 0$ . Так как

$$\begin{aligned} r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb &= (r + g + b)(r^2 + g^2 + b^2 - rg - rb - gb) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (r - g)^2 + (r - b)^2 + (g - b)^2 \right], \end{aligned}$$

то триплетное число  $C = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$  имеет обратное тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих неравенств

$$\begin{aligned} |r + g + b| &\neq 0, \\ r^2 + g^2 + b^2 - rg - rb - gb &= \frac{1}{2} \left[ (r - g)^2 + (r - b)^2 + (g - b)^2 \right] \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $C^{-1} = \frac{1}{C} = \frac{\bar{C}}{C\bar{C}} = \frac{\bar{C}}{\|C\|_2} = \frac{r}{\|C\|_2} + \frac{b}{\|C\|_2}\varepsilon^1 + \frac{g}{\|C\|_2}\varepsilon^2$ . Это, конечно,

очень сильно отличает данную алгебру от алгебр реальных и комплексных

чисел, которую обозначаем символом  $\text{Alg}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2) := \mathbf{R} + \mathbf{R}\varepsilon^1 + \mathbf{R}\varepsilon^2$ , где  $\varepsilon^3 = 1$  и назовем триплетной (цветной) алгеброй.

Интересно, что могут быть даны различные определения нормы  $\|C\|$ . Действительно, сконструируем три изоморфные копии триплетной алгебры:

$$\begin{aligned}\text{Alg}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1_{col}, \varepsilon_{col}^1, \varepsilon_{col}^2) &:= \mathbf{R}1_{col} + \mathbf{R}\varepsilon_{col}^1 + \mathbf{R}\varepsilon_{col}^2, \\ \tilde{\text{Alg}}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1_{col}, \omega_3^1 \varepsilon_{col}^1, \omega_3^2 \varepsilon_{col}^2) &:= \mathbf{R}1_{col} + \mathbf{R}(\omega_3^1 \varepsilon_{col}^1) + \mathbf{R}(\omega_3^2 \varepsilon_{col}^2), \\ \tilde{\tilde{\text{Alg}}}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1_{col}, \omega_3^2 \varepsilon_{col}^1, \omega_3^1 \varepsilon_{col}^2) &:= \mathbf{R}1_{col} + \mathbf{R}(\omega_3^2 \varepsilon_{col}^1) + \mathbf{R}(\omega_3^1 \varepsilon_{col}^2),\end{aligned}$$

где  $\omega_3^1 = (\exp 2\pi i/3)$ . Для триплетных чисел, живущих в этих алгебрах, имеем

$$\begin{aligned}\text{Alg}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1_{col}, \varepsilon_{col}^1, \varepsilon_{col}^2) &:= \left\{ C = r + g\varepsilon_{col}^1 + b\varepsilon_{col}^2 \mid r, g, b \in \mathbf{R} \right\}, \\ \tilde{\text{Alg}}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1_{col}, \omega_3^1 \varepsilon_{col}^1, \omega_3^2 \varepsilon_{col}^2) &:= \left\{ \tilde{C} = r + g(\omega_3^1 \varepsilon_{col}^1) + b(\omega_3^2 \varepsilon_{col}^2) \mid r, g, b \in \mathbf{R} \right\}, \\ \tilde{\tilde{\text{Alg}}}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1_{col}, \omega_3^2 \varepsilon_{col}^1, \omega_3^1 \varepsilon_{col}^2) &:= \left\{ \tilde{\tilde{C}} = r + g(\omega_3^2 \varepsilon_{col}^1) + b(\omega_3^1 \varepsilon_{col}^2) \mid r, g, b \in \mathbf{R} \right\}.\end{aligned}$$

Для дальнейшего применения заметим, что для элементов  $C, \tilde{C}$  и  $\tilde{\tilde{C}}$  имеем

$$\begin{aligned}\tilde{C} + \tilde{\tilde{C}} &= (r + g\varepsilon^1 + b\varepsilon^2) + (r + g(\omega_3^2 \varepsilon^1) + b(\omega_3^1 \varepsilon^2)) = 2r - g\varepsilon^1 - b\varepsilon^2 \in A_3^{\text{col}}, \\ \tilde{C}\tilde{\tilde{C}} &= (r + g\varepsilon^1 + b\varepsilon^2)(r + g(\omega_3^2 \varepsilon^1) + b(\omega_3^1 \varepsilon^2)) = \\ &= (r^2 - gb) - (b^2 - rg)\varepsilon^1 - (g^2 - rb)\varepsilon^2 \in A_3^{\text{col}}.\end{aligned}$$

Очевидно, что  $r = \frac{1}{3}(\tilde{C} + \tilde{\tilde{C}} + \tilde{\tilde{\tilde{C}}})$ ,  $g = \frac{\varepsilon^2}{3}(\tilde{C} + \omega^2 \tilde{\tilde{C}} + \omega_3^1 \tilde{\tilde{\tilde{C}}})$ ,  $b = \frac{\varepsilon^1}{3}(\tilde{C} + \omega_3^1 \tilde{\tilde{C}} + \omega_3^2 \tilde{\tilde{\tilde{C}}})$ , т.е.

$$\begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \varepsilon^2 & \\ & & \varepsilon^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega^1 \\ 1 & \omega^1 & \omega^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C \\ \tilde{C} \\ \tilde{\tilde{C}} \end{bmatrix} = \mathbf{Diag}(1, \varepsilon^2, \varepsilon^1) \cdot \mathcal{F}_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} C \\ \tilde{C} \\ \tilde{\tilde{C}} \end{bmatrix}.$$

Три изоморфные копии триплетной алгебры позволяют дать определение новой нормы  $\|C\|_3 = C\tilde{C}\tilde{\tilde{C}} = r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb$ . Легко проверить, что

$$\|C\|_3 = \|r + g\varepsilon^1 + b\varepsilon^2\|_3 = \det \begin{bmatrix} r & g & b \\ b & r & g \\ g & b & r \end{bmatrix} = r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb.$$

Гревс показал, что каждое триплетное число имеет три нормы

$$\|C\|_1 = |r + g + b|, \quad \|C\|_2 = (r^2 + g^2 + b^2) - (rg + rb + gb), \\ \|C\|_3 = \|C\|_1 \|C\|_2 = r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb$$

и три модуля  $|C|_1 = |r + g + b|$ ,  $|C|_2 = \sqrt{(r^2 + g^2 + b^2) - (rg + rb + gb)}$ ,  $|C|_3 = \sqrt[3]{r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb}$  со следующими свойствами

$$\|C_1 C_2\|_1 = \|C_1\|_1 \|C_2\|_1, \quad \|C_1 C_2\|_2 = \|C_1\|_2 \|C_2\|_2, \quad \|C_1 C_2\|_3 = \|C_1\|_3 \|C_2\|_3.$$

### 3.2.2. Люминансно-хроматическое представление триплетных чисел.

Формально триплетная алгебра  $\mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$  изоморфна следующей алгебре  $\mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2) \approx \mathbf{R}[X]/(X^3 - 1)$ . Так как  $(X^3 - 1) = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ , то согласно Китайской теореме об остатках [36-41], можно написать

$$\mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2) \approx \mathbf{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^3 - 1) = \mathbf{R}[\varepsilon]/(\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = \\ = \mathbf{R}[\varepsilon]/(\varepsilon - 1) \oplus \mathbf{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = \mathbf{I}_1 \oplus \mathbf{I}_2 = \mathbf{R} \oplus \mathbf{C},$$

где

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{R}[\varepsilon]/(\varepsilon - 1) := \\ = \{A_{lu} | A_{lu} = (r + g\varepsilon + b\varepsilon^2) \bmod(\varepsilon - 1)\} = \{r + g + b | r, g, b \in \mathbf{R}\},$$

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) := \\ = \{C_{ch}^* | C_{ch}^* = (r + g\varepsilon + b\varepsilon^2) \bmod(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1)\} = \{(r - b) + (g - b)\varepsilon | r, g, b \in \mathbf{R}\}.$$

Следовательно, цветная триплетная алгебра  $\mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$  является прямой

$$\text{суммой двух идеалов } \mathbf{I}_1 \text{ и } \mathbf{I}_2: \mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon, \varepsilon^2) = \mathbf{I}_1 \oplus \mathbf{I}_2 = \{(A_{lu}, C_{ch}^*) | A_{lu} \in \mathbf{I}_1, C_{ch}^* \in \mathbf{I}_2\},$$

где  $\forall A_{lu}, C_{ch}^* \in \mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon, \varepsilon^2)$ . Поэтому каждое цветное число  $C = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$

является линейной комбинацией  $C = (C_1^*, C_2^*) = A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + C_{ch}^* \cdot \mathbf{E}_{ch}^*$  «скалярной»

$A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu}$  и «комплексной» частей  $C_{ch}^* \cdot \mathbf{E}_{ch}^*$  в идемпотентном базисе  $\mathbf{e}_{lu} = \frac{(1+\varepsilon+\varepsilon^2)}{3}$ ,

$\mathbf{E}_{ch}^* = 1 - \mathbf{e}_{lu} = \frac{(2-\varepsilon-\varepsilon^2)}{3}$ , где  $(\mathbf{e}_{lu})^2 = \mathbf{e}_{lu}$ ,  $(\mathbf{E}_{ch}^*)^2 = \mathbf{E}_{ch}^*$ ,  $\mathbf{e}_{lu} \mathbf{E}_{ch}^* = \mathbf{E}_{ch}^* \mathbf{e}_{lu} = 0$ . Очевидно,

$$\mathcal{C} \cdot \mathbf{e}_{lu} = (A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + C_{ch}^* \cdot \mathbf{E}_{ch}^*) \cdot \mathbf{e}_{lu} = A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu}^2 + C_{ch}^* \cdot \mathbf{E}_{ch}^* \mathbf{e}_{lu} = A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu},$$

$$\mathcal{C} \cdot \mathbf{E}_{ch}^* = (A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + C_{ch}^* \cdot \mathbf{E}_{ch}^*) \cdot \mathbf{E}_{ch}^* = A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} \mathbf{E}_{ch}^* + C_{ch}^* \cdot (\mathbf{E}_{ch}^*)^2 = C_{ch}^* \cdot \mathbf{E}_{ch}^*.$$

Поэтому,

$$A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} = \mathcal{C} \cdot \mathbf{e}_{lu} = (r + g\varepsilon^1 + b\varepsilon^2) \frac{1+\varepsilon^1+\varepsilon^2}{3} = [r + g + b] \frac{1+\varepsilon^1+\varepsilon^2}{3},$$

$$C_{ch}^* \cdot \mathbf{E}_{ch}^* = \mathcal{C} \cdot \mathbf{E}_{ch}^* = (r + g\varepsilon^1 + b\varepsilon^2) \frac{(2-\varepsilon-\varepsilon^2)}{3} = [(r-b) + (g-b)\varepsilon] \frac{(2-\varepsilon-\varepsilon^2)}{3}.$$

Следовательно,

$$A_{lu} = r + g + b = (r + g\varepsilon + b\varepsilon^2) \bmod(\varepsilon - 1),$$

$$C_{ch}^* = (r-b) + (g-b)\varepsilon^1 = (r + g\varepsilon + b\varepsilon^2) \bmod(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= (A_{lu}, C_{ch}^*) = A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + C_{ch}^* \cdot \mathbf{E}_{ch}^* = \\ &= [r + g + b] \frac{(1 + \varepsilon + \varepsilon^2)}{3} + [(r-b) + (g-b)\varepsilon] \frac{(2-\varepsilon-\varepsilon^2)}{3}. \end{aligned}$$

В новом дуплексном представлении две главные арифметические операции имеют наипростейшую форму:

$$\mathcal{C} + \mathcal{B} = (A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + C_{ch}^* \cdot \mathbf{E}_{ch}^*) + (B^{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + \mathcal{B}_{ch}^* \cdot \mathbf{E}_{ch}^*) = (A_{lu} + B^{lu}) \cdot \mathbf{e}_{lu} + (C_{ch}^* + \mathcal{B}_{ch}^*) \mathbf{E}_{ch}^*,$$

$$\mathcal{C}\mathcal{B} = (A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + C_{ch}^* \cdot \mathbf{E}_{ch}^*) (B^{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + \mathcal{B}_{ch}^* \cdot \mathbf{E}_{ch}^*) = (A_{lu} B^{lu}) \cdot \mathbf{e}_{lu} + (C_{ch}^* \mathcal{B}_{ch}^*) \mathbf{E}_{ch}^*,$$

или в векторной форме

$$\mathcal{C} + \mathcal{B} = (A_{lu}, C_{ch}^*) + (B^{lu}, \mathcal{B}_{ch}^*) = (A_{lu} + B^{lu}, C_{ch}^* + \mathcal{B}_{ch}^*),$$

$$\mathcal{C} \cdot \mathcal{B} = (A_{lu}, C_{ch}^*) \cdot (B^{lu}, \mathcal{B}_{ch}^*) = (A_{lu} \cdot B^{lu}, C_{ch}^* \cdot \mathcal{B}_{ch}^*).$$

Введем теперь новый идемпотентный базис  $\mathbf{e}_{lu} := (1 + \varepsilon + \varepsilon^2)/3$ ,

$\mathbf{E}_{ch} := (1 + \omega_3 \varepsilon^2 + \omega_3^2 \varepsilon)/3$ , который ортогональные «реальный» и «комплексный»

идемпотенты со свойствами:  $\mathbf{e}_{lu}^2 = \mathbf{e}_{lu}$ ,  $\mathbf{E}_{ch}^2 = \mathbf{E}_{ch}$ ,  $\mathbf{e}_{lu} \mathbf{E}_{ch} = \mathbf{E}_{ch} \mathbf{e}_{lu} = 0$ , а  $\omega_3 = e^{i2\pi/3}$ .

Следовательно, цветная алгебра  $\mathbf{Alg}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$  является прямой суммой реального  $\mathbf{R}$  и комплексного  $\mathbf{C}$  полей:  $\mathbf{Alg}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_{lu} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_{ch} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{C}$ . Поэтому каждое триплетное (цветное) число  $C = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$  является линейной комбинацией  $C = A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + \mathbf{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch} = (A_{lu}, \mathbf{Z}_{ch})$  «скалярной»  $A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu}$  и новой «комплексной»  $\mathbf{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch}$  частей в новом идемпотентном базисе  $\{\mathbf{e}_{lu}, \mathbf{E}_{ch}\}$ . Мы будем называть реальные числа  $A_{lu} \in \mathbf{R}$  яркостными числами, а комплексные числа  $\mathbf{z}_{ch} \in \mathbf{C}$  - хроматическими числами. Очевидно,

$$\begin{aligned} C \cdot \mathbf{e}_{lu} &= (A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + \mathbf{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch}) \cdot \mathbf{e}_{lu} = A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu}^2 + \mathbf{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch} \mathbf{e}_{lu} = A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu}, \\ C \cdot \mathbf{E}_{ch} &= (A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + \mathbf{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch}) \cdot \mathbf{E}_{ch} = A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} \mathbf{E}_{ch} + \mathbf{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch}^2 = \mathbf{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} &= C \cdot \mathbf{e}_{lu} = (r + g\varepsilon^1 + b\varepsilon^2) \frac{1 + \varepsilon^1 + \varepsilon^2}{3} = (r + g + b) \frac{1 + \varepsilon^1 + \varepsilon^2}{3}, \\ \mathbf{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch} &= C \cdot \mathbf{E}_{ch} = (r + g\varepsilon^1 + b\varepsilon^2) \frac{1 + \omega^1 \varepsilon^1 + \omega^2 \varepsilon^2}{3} = (r + g\omega^1 + b\omega^2) \frac{1 + \omega^1 \varepsilon^1 + \omega^2 \varepsilon^2}{3}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A_{lu} &= r + g + b, \\ \mathbf{Z}_{ch} &= r + g\omega^1 + b\omega^2 = r + g \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} + b \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \left( r - \frac{g+b}{2} \right) + i \frac{\sqrt{3}}{2} (g - b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= (r + g + b) \cdot \mathbf{e}_{lu} + \frac{1}{2} \left[ (2r - g - b) + i\sqrt{3}(g - b) \right] \cdot \mathbf{E}_{ch} = \\ &= A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + X_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch} + Y_{ch} \cdot i\mathbf{E}_{ch}, \end{aligned}$$

где  $X_{ch} = \frac{1}{2}(2r - g - b)$ ,  $Y_{ch} = \frac{\sqrt{3}}{2}(g - b)$ . В новом дуплексном представлении

две главные арифметические операции также имеют простейшую форму

$$\begin{aligned} C + \mathcal{B} &= (A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + \mathbf{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch}) + (B_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + \mathbf{W}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch}) = \\ &= (A_{lu} + B_{lu}) \cdot \mathbf{e}_{lu} + (\mathbf{Z}_{ch} + \mathbf{W}_{ch}) \cdot \mathbf{E}_{ch}, \\ C \cdot \mathcal{B} &= (A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + \mathbf{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch}) \cdot (B_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + \mathbf{W}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch}) = \\ &= (A_{lu} B_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu}) + (\mathbf{Z}_{ch} \mathbf{W}_{ch}) \cdot \mathbf{E}_{ch}, \end{aligned}$$

или в векторном обозначении

$$\begin{aligned} \mathcal{C} + \mathcal{B} &= (A_{lu}, \mathbf{Z}_{ch}) + (B_{lu}, \mathbf{W}_{ch}) = (A_{lu} + B_{lu}, \mathbf{Z}_{ch} + \mathbf{W}_{ch}), \\ \mathcal{C} \cdot \mathcal{B} &= (A_{lu}, \mathbf{Z}_{ch}) + (B_{lu}, \mathbf{W}_{ch}) = (A_{lu} B_{lu}, \mathbf{Z}_{ch} \mathbf{W}_{ch}). \end{aligned}$$

Таким образом, триплетные числа могут быть представлены в четырех различных формах:

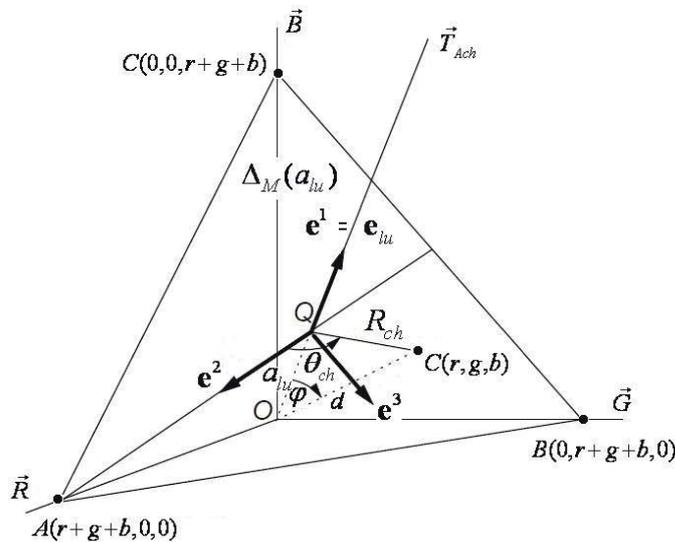
- в векторной форме  $\mathcal{C} = (r, g, b)$ ,
- в триплетной форме  $\mathcal{C} = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$ ,
- в двух дуплексных формах

$$\mathcal{C} = A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + \mathbf{Z}_{ch} \cdot \mathbf{E}_{ch} = (A_{lu}, \mathbf{Z}_{ch}) \text{ и } \mathcal{C} = A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + \mathcal{C}_{ch}^* \cdot \mathbf{E}_{ch}^* = (A_{lu}, \mathcal{C}_{ch}^*),$$

- в триплексной форме  $\mathcal{C} = A_{lu} \cdot \mathbf{e}_{lu} + X_{ch} \cdot \mathbf{E}_0^{ch} + Y_{ch} \mathbf{I}_0^{ch} = (A_{lu}, X_{ch}, Y_{ch})$ .

### 3.2.3 Геометрическое представление триплетных чисел. В

геометрическом представлении (рис. 3.7) триплетное число  $\mathcal{C} = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$



**Рис. 3.7.** Триплетные параметры-характеристики для триплетного числа

$$\mathcal{C} = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2; \quad a_{lu} = (r + g + b) / \sqrt{3}, \quad d = \sqrt{r^2 + g^2 + b^2}, \quad R_{ch} = \sqrt{d^2 - a_{lu}^2}, \quad \theta_{ch}, \varphi.$$

представляется вектором  $(r, g, b) \in \mathbf{R}_{col}^3$  (точкой  $C(r, g, b)$ ) в трехмерном пространстве  $\mathbf{R}_{col}^3$ , натянутом на три координатные оси  $\vec{R}, \vec{G}, \vec{B}$ . Пусть  $O$  -

начало координат  $\vec{R}, \vec{G}, \vec{B}$  осей.  $\vec{T}_{Ach}$  - линия, на которой лежат точки с одинаковым координатами  $r = g = b$  (так называемая ахроматическая диагональ). Как мы выяснили, на ахроматической диагонали находятся яркостные числа. Пусть далее  $\Delta_M(a_{lu})$  плоскость  $r + g + b = a_{lu}$ , перпендикулярная ахроматической оси  $\vec{T}_{Ach}$  и пересекающая ее на удалении  $a_{lu}$  от начала координат. Эта плоскость содержит в себе линию  $QC(r, g, b)$  также перпендикулярную  $\vec{T}_{Ach}$  и называется хроматической плоскостью. На ней располагаются хроматические числа. Тогда вектор  $(r, g, b)$  может быть описан 1) проекцией  $a_{lu}$  отрезка  $OC$  на линию  $\vec{T}_{Ach}$ , т.е. яркостной составляющей и 2) комплексным числом  $Z_{ch}$  в хроматической плоскости. Причем модуль этого числа является расстоянием  $R_{ch} = |Z_{ch}|$  от точки  $C(r, g, b)$  до этой линии, т.е. он описывает насыщенность триплетного числа  $C = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$ , а азимутальный (хроматический) угол  $\theta_{ch} = \arg(Z_{ch})$  представляет его цветовой тон.

Амплитуда  $\rho$  триплетного числа  $C = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$  определяется как  $\rho = \sqrt[3]{r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb}$ . Полярный угол  $\varphi$  между  $QC(r, g, b)$  и ахроматической линией  $\vec{T}_{Ach}$  определяется выражением  $\operatorname{tg}\varphi = R_{ch} / a_{lu}$ . Квадрат расстояния от начала координат до точки  $C(r, g, b)$  есть  $d^2 = r^2 + g^2 + b^2$ . Амплитуда  $\rho$  равна нулю для триплетных чисел, лежащих на ахроматической диагонали  $\vec{T}_{Ach}$  и на хроматической плоскости  $\Delta_M(a_{lu})$ .

Обратные  $C^{-1} = (r + g\varepsilon + b\varepsilon^2)^{-1}$  существуют только у тех триплетных чисел, у которых  $\rho \neq 0$ . Произведение двух триплетных чисел равно нулю, если одно из чисел или оба вместе равны нулю или если одно из чисел лежит на ахроматической диагонали  $\vec{T}_{Ach}$  или хроматической плоскости  $\Delta_M(a_{lu})$ . Проекция  $a_{lu} = OQ$  вектора  $OC$  на ахроматическую линию  $\vec{T}_{Ach}$  с

направляющим вектором  $\mathbf{e}^1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$  есть  $a_{lu} = \frac{1}{\sqrt{3}}(r + g + b) = \frac{A_{lu}}{\sqrt{3}}$ .

Это число называется яркостью точки  $C(r, g, b)$ .

Расстояние  $R_{ch} = C(r, g, b)Q$  от точки  $C(r, g, b)$  до ахроматической линии  $\vec{T}_{Ach}$  называется хроматическим радиусом или насыщенностью точки  $C(r, g, b)$ . Оно вычисляется как расстояние от точки  $C(r, g, b)$  до точки  $Q$  с координатами  $((r + g + b)/3, (r + g + b)/3, (r + g + b)/3)$ :

$$\begin{aligned} R_{ch}^2 &= R_{ch} = d^2 - a_{lu}^2 = (r^2 + g^2 + b^2) - \frac{(r + g + b)^2}{3} = \\ &= \frac{2}{3}(r^2 + g^2 + b^2 - rg - rb - gb) = \frac{1}{3}[(r - g)^2 + (r - b)^2 + (g - b)^2]. \end{aligned}$$

Величины  $a_{lu}$  и  $R_{ch} = CQ$  показаны на рис. 3.7, где плоскость  $\Delta_M(a_{lu})$  перпендикулярна к линии  $\vec{T}_{Ach}$ . Она пересекает координатные оси в точках  $A(r + g + b, 0, 0)$ ,  $B(0, r + g + b, 0)$  и  $C(0, 0, r + g + b)$ . Хроматический угол (насыщенность)  $0 \leq \theta_{ch} < 2\pi$  определяется как угол в плоскости  $\Delta_M(a_{lu})$ .

Выражение для угла  $\theta_{ch}$  в терминах  $r, g, b$  может быть получено в системе координат:  $\langle \mathbf{e}^1 | = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$ ,  $\langle \mathbf{e}^2 | = (-2, 1, 1)/\sqrt{6}$ ,  $\langle \mathbf{e}^3 | = (0, 1, -1)/\sqrt{2}$ . Первый вектор  $\langle \mathbf{e}^1 | = (1, 1, 1)/\sqrt{3} = \langle \mathbf{e}_{lu} |$  лежит на ахроматической линии  $\vec{T}_{Ach}$ , векторы  $\langle \mathbf{e}^2 | = (-2, 1, 1)/\sqrt{6}$  и  $\langle \mathbf{e}^3 | = (0, 1, -1)/\sqrt{2}$  лежат в хроматической плоскости  $\Delta_M(0) \equiv \mathbf{E}_{ch}$ . Все три вектора перенесены с плоскости  $\Delta_M(0) \equiv \mathbf{E}_{ch}$  в плоскость  $\Delta_M(a_{lu})$ . Теперь можно вычислить три ортогональные проекции вектора  $\vec{OC}(r, g, b)$  на три введенных ортогональных вектора

$$\begin{bmatrix} a_{lu} \\ x_{ch} \\ y_{ch} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3}(r + g + b) \\ 1/\sqrt{6}(2r - g - b) \\ 1/\sqrt{2}(g - b) \end{bmatrix},$$

где  $a_{lu} = \langle \mathbf{e}_{lu} | C \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(r + g + b)$  и

$$\mathbf{z}_{ch} = \langle \mathbf{e}^2 | C \rangle + i \langle \mathbf{e}^3 | C \rangle = x_{ch} + iy_{ch} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left[ \left( r - \frac{g-b}{2} \right) + i \frac{\sqrt{3}}{2} (g-b) \right],$$

т.е.

$$C = (a_{lu}, \mathbf{z}_{ch}) = (a_{lu}, x_{ch}, y_{ch}) = \left( \frac{r+g+b}{\sqrt{3}}, \frac{2r-g-b}{\sqrt{6}}, \frac{g-b}{\sqrt{2}} \right).$$

Здесь  $a_{lu} = A_{lu} / \sqrt{3}$ ,  $\mathbf{z} = \sqrt{2} \mathbf{Z}_{ch} / \sqrt{3}$  и  $x_{ch} = \sqrt{2} X_{ch} / \sqrt{3}$ ,  $y_{ch} = \sqrt{2} Y_{ch} / \sqrt{3}$ . Выражение для хроматического угла  $\theta_{ch}$  есть  $\theta_{ch} = \arctg \frac{y_{ch}}{x_{ch}} = \arctg \left( \frac{\sqrt{3}(g-b)}{2r-g-b} \right)$  и, в частности,

$$\cos \theta_{ch} = \frac{2r-g-b}{\sqrt{2(r^2+g^2+b^2)-(rg+rb+gb)}},$$

$$\sin \theta_{ch} = \frac{\sqrt{3}(g-b)}{\sqrt{2(r^2+g^2+b^2)-(rg+rb+gb)}}.$$

Итак, яркостное число  $a_{lu} = \langle \mathbf{e}_{lu} | C \rangle = (r+g+b)/\sqrt{3}$  лежит на ахроматической оси  $\vec{T}_{Ach}$  RGB-пространства. Из двух чисел  $x_{ch}, y_{ch}$  можно построить

комплексное число  $\mathbf{z}_{ch} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ \left( r - \frac{g-b}{2} \right) + i \frac{\sqrt{3}}{2} (g-b) \right]$ , с модулем

$$|\mathbf{z}_{ch}| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\left( r - \frac{g-b}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} (g-b)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{r^2 + g^2 + b^2 - rg - rb - gb} =$$

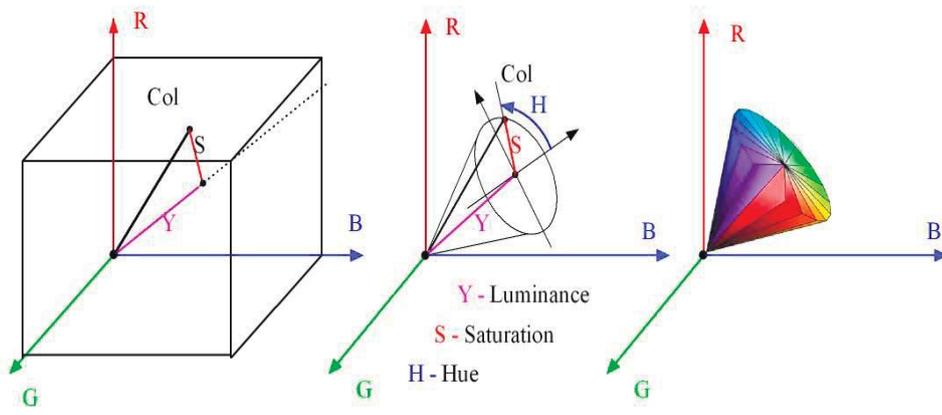
$$= \frac{1}{3} \left[ (r-g)^2 + (r-b)^2 + (g-b)^2 \right] = R_{ch}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\|C\|_1^1 = |A_{lu}| = \sqrt{3} a_{lu}, \quad \|C\|_2^2 = \|\mathbf{z}_{ch}\|^2 = \frac{3}{2} |\mathbf{z}_{ch}|^2 = \frac{3}{2} R_{ch}^2, \quad (3.1)$$

$$\|c\|_3^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a_{lu} |\mathbf{z}_{ch}|^2.$$

Поэтому первую норму можно назвать яркостной нормой, вторую – хроматической и, наконец, третью – яркостно-хроматической (см. рис. 3.8).



**Рис. 3.8.** RGB-куб и HSY-перцептуальное пространство

Полярный угол  $\varphi$  дается выражением  $\operatorname{tg} \varphi = R_{ch} / a_{lu}$ , где  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Нетрудно видеть, что  $d^2 = r^2 + g^2 + b^2 = R_{ch}^2 + a_{lu}^2$ , так, что

$$R_{ch} = d \sin \varphi = \left( \sqrt{r^2 + g^2 + b^2} \right) \sin \varphi,$$

$$a_{lu} = d \cos \varphi = \left( \sqrt{r^2 + g^2 + b^2} \right) \cos \varphi.$$

Нетрудно показать, что если

$$\begin{aligned} C_1 &= r_1 + g_1 \varepsilon + b_1 \varepsilon^2 = C_1(a_{lu}^1, R_{ch}^1, \theta_{ch}^1, \varphi^1), \\ C_2 &= r_2 + g_2 \varepsilon + b_2 \varepsilon^2 = C_2(a_{lu}^2, R_{ch}^2, \theta_{ch}^2, \varphi^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

- два триплетных числа, то для их произведения

$$\begin{aligned} C_1 C_2 &= (r_1 + g_1 \varepsilon + b_1 \varepsilon^2)(r_2 + g_2 \varepsilon + b_2 \varepsilon^2) = \\ &= (r_1 r_2 + g_1 b_2 + b_1 g_2) + (r_1 g_2 + r_2 g_1 + b_1 b_2) \varepsilon + (r_1 b_2 + g_1 g_2 + r_2 b_1) \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

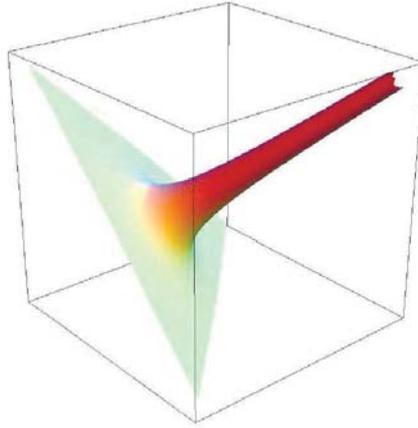
имеем  $a_{lu} = \sqrt{3} a_{lu}^1 a_{lu}^2$ ,  $R_{ch}^1 = \sqrt{\frac{3}{2}} R_{ch}^1 R_{ch}^2$ ,  $\theta_{ch} = \theta_{ch}^1 + \theta_{ch}^2$ ,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \varphi^1 \cdot \operatorname{tg} \varphi^2$ .

Важнейшая характеристика триплетного числа – его амплитуда  $\rho = R_{Ap}$ , определяемая равенством  $\rho = R_{Ap} = \sqrt[3]{\|C\|_3}$ , так что  $\rho^3 = R_{Ap}^3 = r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb$ . Амплитуда  $\rho = R_{Ap}$  произведения  $C_1 C_2$  определяется через амплитуды сомножителей  $\rho = \rho_1 \rho_2$  и может быть получена из следующего соотношения

$$\begin{aligned} &(r_1 r_2 + g_1 b_2 + b_1 g_2)^3 + (r_1 g_2 + r_2 g_1 + b_1 b_2)^3 + (r_1 b_2 + g_1 g_2 + r_2 b_1)^3 - \\ &- 3(r_1 r_2 + g_1 b_2 + b_1 g_2)(r_1 g_2 + r_2 g_1 + b_1 b_2)(r_1 b_2 + g_1 g_2 + r_2 b_1)^3 = \end{aligned}$$

$$= (r_1^3 + g_{11}^3 + b_1^3 - 3r_1g_1b_1)(r_2^3 + g_2^3 + b_2^3 - 3r_2g_2b_2).$$

Нетрудно видеть, что  $\rho^3 = R_{Ap}^3 = r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb = \frac{3^{3/2}}{2} d \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi$ . Это означает, что цилиндрическая поверхность  $\rho^3 = R_{Ap}^3$  является поверхностью вращения  $S_2^3(R_{Ap})$  с осью вращения в виде ахроматической диагонали  $\vec{T}_{Ach}$ , как это показано на рис. 3.9.



**Рис. 3.9.**  $S_2^3(R_{Ap})$ -сфера  $r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb = 1$  (сфера Аппеля)

### 3.3. Геометрия и тригонометрия RGB-пространства

#### 3.3.1. Геометрия RGB-пространства. Если псевдодистанцию $\rho(C, D)$

между двумя триплетными числами  $C$  и  $D$  определить как модуль их разности  $C - D = U = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$ :

$$\rho_1(C - D) = |C - D|_1 = |U|_1 = |r + g + b|,$$

$$\rho_2(C - D) = |C - D|_2 = |U|_2 = \sqrt{(r^2 + g^2 + b^2) - (rg + rb + gb)},$$

$$\rho_3(C - D) = |C - D|_3 = |U|_3 = \sqrt[3]{r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb},$$

то алгебра  $\mathcal{A}_3(\mathbf{R}|1, \varepsilon_{col}, \varepsilon_{col}^2)$  триплетных чисел трансформируется в три трехмерные псевдометрические пространства, обозначаемые как

$$\begin{aligned} \mathbf{Geo}_3^{vis1}(\mathbf{R}^3, \rho_1) = \\ = \left\langle \left\langle \mathbf{Alg}_3^{vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2) \right| \rho_1(C - D) = |r + g + b| \right\rangle \right\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{Geo}_3^{Vis2}(\mathbf{R}^3, \rho_2) = \\ & = \left\langle \left\langle \mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2) \Big| \rho_2(\mathcal{C} - \mathcal{D}) = \sqrt[2]{(r^2 + g^2 + b^2) - (rg + rb + gb)} \right\rangle \right\rangle, \\ & \mathbf{Geo}_3^{Vis3}(\mathbf{R}^3, \rho_3) = \\ & = \left\langle \left\langle \mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2) \Big| \rho_3(\mathcal{C} - \mathcal{D}) = \sqrt[3]{r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb} \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

**Определение 3.1.** Множество всех точек в трехмерных цветных геометриях  $\mathbf{Geo}_3^{Vis1}(\mathbf{R}^3, \rho_1)$ ,  $\mathbf{Geo}_3^{Vis2}(\mathbf{R}^3, \rho_2)$ ,  $\mathbf{Geo}_3^{Vis3}(\mathbf{R}^3, \rho_3)$ , удовлетворяющее уравнениям  $\|\mathcal{C}\|_1 = a_{lu}$ ,  $\|\mathcal{C}\|_2 = R_{ch}^2$ ,  $\|\mathcal{C}\|_3 = R_{Ap}^3$  называются  $\mathbf{Geo}_3^{Vis1}$ ,  $\mathbf{Geo}_3^{Vis2}$ ,  $\mathbf{Geo}_3^{Vis3}$  - сферами с радиусами  $a_{lu}, R_{ch}, R_{Ap}$ , центрированными в начале координат.

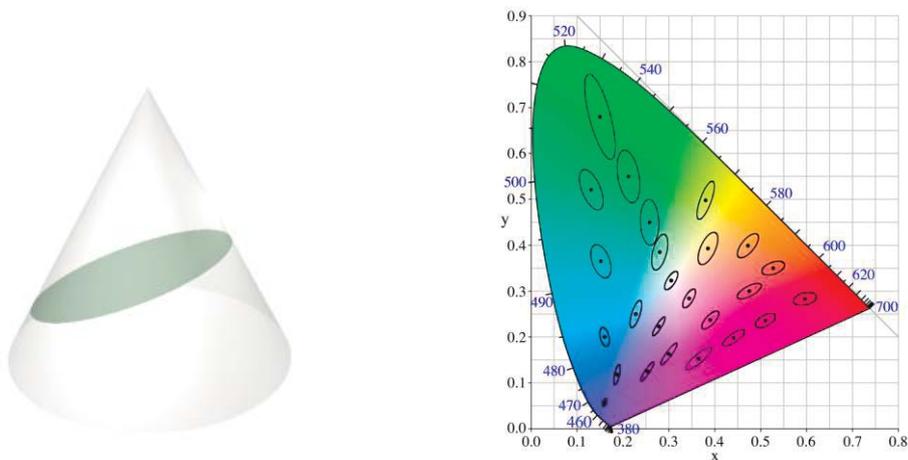
Эти сферы обозначаются символами  $\mathcal{S}_2^1(a_{lu}) \in \mathbf{Geo}_3^{Vis1}$ ,  $\mathcal{S}_2^2(R_{ch}) \in \mathbf{Geo}_3^{Vis2}$ ,  $\mathcal{S}_2^3(R_{Ap}) \in \mathbf{Geo}_3^{Vis3}$ , а уравнения

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}\|_1 &= r + g + b = a_{lu}, \\ \|\mathcal{C}\|_2 &= (r^2 + g^2 + b^2) - (rg + rb + gb) = R_{Ap}^2, \\ \|\mathcal{C}\|_3 &= r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb = R_{Ap}^3 \end{aligned}$$

определяют  $\mathbf{Geo}_3^{Vis1}$ ,  $\mathbf{Geo}_3^{Vis2}$ ,  $\mathbf{Geo}_3^{Vis3}$  - сферы  $\mathcal{S}_2^1(a_{lu})$ ,  $\mathcal{S}_2^2(R_{ch})$ ,  $\mathcal{S}_2^3(R_{Ap})$ . Из рис. 3.9 для  $\mathcal{S}_2^3(R_{Ap})$ -сферы видно, что ее поверхность асимптотически приближается к хроматической плоскости  $r + g + b = 0$  и ахроматической диагонали  $r = g = b$ . В алгебре  $\mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$  эти асимптоты соответствуют идеалам  $\mathbf{I}_2 = \{\mathbf{Z}_{ch} \mathbf{E}_{ch} | \mathbf{Z}_{ch} \in \mathbf{C}\}$  и  $\mathbf{I}_1 = \{A_{lu} \mathbf{e}_{lu} | A_{lu} \in \mathbf{R}\}$ , соответственно.

Заметим, что в международных рекомендациях плоскость одинаковой яркости довольно часто имеет уравнение  $a_{lu} = 0.2126r + 0.7152g + 0.0722b$ . Поэтому она не перпендикулярна к ахроматической диагонали  $\vec{T}_{Ach}$ . По этой причине сечение этой плоскостью сферы Аппеля представляет собой не классическую окружность, а эллипс (см. рис. 3.10). Регулярное множество

эллипсов возникающих в результате пересечения экваторной плоскости  $a_{lu} = 0.2126r + 0.7152g + 0.0722b = const$  с регулярной двумерной гребенкой сдвинутых сфер Аппеля дает знаменитые эллипсы Мак Адамса [42].



**Fig. 3.10.** Эллипсы Мак Адамса

Введем  $A_{lu} = \|C\|_1 = r + g + b$  и параметризуем все точки на окружности Аппеля хроматическим радиусом и полярным хроматическим углом  $(R_{ch}, \theta_{ch})$ . Поверхность  $r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb = R_{Ap}^3$  в этих координатах имеет простое уравнение  $A_{lu} R_{ch}^2 = R_{Ap}^3$ . Для поверхности Аппеля можно выбрать две параметризации  $(a_{lu}, R_{Ap}, \theta_{ch})$  и  $(a_{lu}, R_{ch}, \theta_{ch})$ . В рамках этой параметризации можно определить метрику поверхности Аппеля:

$$ds^2 = \frac{1}{3} \left( 2 + \frac{4R_{Ap}^6}{R_{ch}^6} \right) dR_{ch}^2 + \frac{2}{3} R_{ch}^2 d\theta_{hue}^2$$

и вычислить кривизну Гаусса  $K = -\frac{12a_{lu}^4}{(4a_{lu}^3 + R_{Ap}^3)^2}$ . Кривизна Гаусса отрицательна и стремится к нулю при  $a_{lu} \rightarrow 0$  ( $R_{ch} \rightarrow \infty$ ). В пределе метрика становится плоской:

$$ds^2 = \frac{2}{3} (dR_{ch}^2 + R_{ch}^2 d\theta_{hue}^2).$$

**3.3.2. Тригонометрическая форма триплетных чисел.** Экспоненциальная функция триплетного аргумента может быть определена следующим рядом:  $\exp(C) = 1 + C + C^2/2! + C^3/3! + \dots$ . В силу коммутативности алгебра триплетных

чисел имеет место равенство  $\exp(C_1 + C_2) = \exp(C_1)\exp(C_2)$ . Если  $C = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$ , то число  $\exp(C)$  может быть вычислено как произведение трех чисел  $\exp(C) = \exp(r) \cdot \exp(g\varepsilon) \cdot \exp(b\varepsilon^2)$ . Согласно  $(\varepsilon^1)^{3m} = 1, (\varepsilon^1)^{3m+1} = \varepsilon, (\varepsilon^1)^{3m+2} = \varepsilon^2, (\varepsilon^2)^{3m} = 1, (\varepsilon^2)^{3m+1} = \varepsilon^2, (\varepsilon^2)^{3m+2} = \varepsilon^1$ , где  $m$  - натурально число, можно записать  $\exp(x\varepsilon)$  и  $\exp(x\varepsilon^2)$  как

$$\exp(x\varepsilon) = \text{ap}_0(x) + \text{ap}_1(x)\varepsilon^1 + \text{ap}_2(x)\varepsilon^2, \quad (3.4)$$

$$\exp(x\varepsilon^2) = \text{ap}_0(x) + \text{ap}_2(x)\varepsilon^1 + \text{ap}_1(x)\varepsilon^2, \quad (3.5)$$

где функции  $\text{ap}_0(x), \text{ap}_1(x), \text{ap}_2(x)$ , называются тригонометрическими функциями Аппеля. Они определяются следующими рядами

$$\begin{aligned} \text{ap}_0(x) &= 1 + x^3/3! + x^6/6! + x^9/9! + \dots, \\ \text{ap}_1(x) &= x^4/4! + x^7/7! + x^{10}/10! + \dots, \quad \text{ap}_2(x) = x^2/2! + x^5/5! + x^8/8! + \dots. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что  $\text{ap}_0(x) + \text{ap}_1(x) + \text{ap}_2(x) = \exp(x)$ . Используя тот факт, что  $\exp[\varepsilon(x+y)] = \exp(\varepsilon x)\exp(\varepsilon y)$ , получаются следующие теоремы сложения

$$\text{ap}_0(x+y) = \text{ap}_0(x)\text{ap}_0(y) + \text{ap}_1(x)\text{ap}_2(y) + \text{ap}_2(x)\text{ap}_1(y), \quad (3.6)$$

$$\text{ap}_1(x+y) = \text{ap}_2(x)\text{ap}_2(y) + \text{ap}_1(x)\text{ap}_0(y) + \text{ap}_0(x)\text{ap}_1(y), \quad (3.7)$$

$$\text{ap}_2(x+y) = \text{ap}_1(x)\text{ap}_1(y) + \text{ap}_2(x)\text{ap}_0(y) + \text{ap}_0(x)\text{ap}_2(y). \quad (3.8)$$

Для  $x = y$ , уравнения (3.6)-(3.8) дают выражения для двойного угла

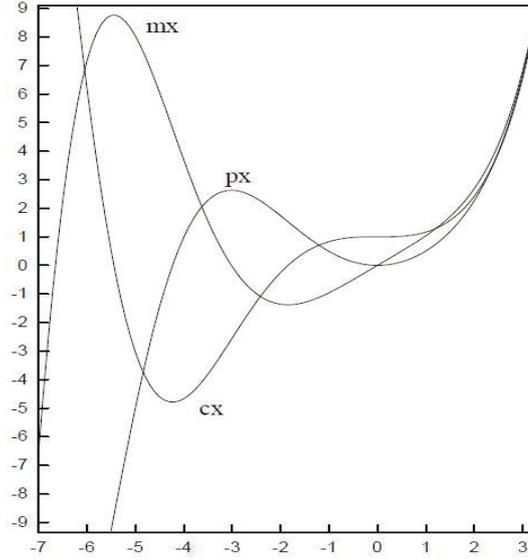
$$\begin{aligned} \text{ap}_0(2x) &= \text{ap}_0^2(x) + 2\text{ap}_1(x)\text{ap}_2(x), \\ \text{ap}_1(2x) &= \text{ap}_2^2(x) + 2\text{ap}_1(x)\text{ap}_0(x), \quad \text{ap}_2(2x) = \text{ap}_1^2(x) + 2\text{ap}_2(x)\text{ap}_0(x). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Выражения тригонометрических функций Аппеля через классические тригонометрические и экспоненциальные функции могут быть получены при

разложении в ряд выражений  $e^{(\varepsilon+\varepsilon^2)x}$  и  $e^{(\varepsilon-\varepsilon^2)x}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{ap}_0(x) &= \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-x/2}, \quad \mathbf{ap}_1(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{2\pi}{3}\right)e^{-x/2}, \\ \mathbf{ap}_2(x) &= \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{2\pi}{3}\right)e^{-x/2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Графики тригонометрических функций Аппеля показаны на рис. 3.11.



**Рис. 3.11.** Графики тригонометрических функций Аппеля  $\mathbf{ap}_0(\varphi), \mathbf{ap}_1(\varphi), \mathbf{ap}_2(\varphi)$

**3.3.3. Экспоненциальная форма триплетных чисел.** Если для триплетного числа  $C = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$  существует другое триплетное число  $\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon + \varphi_2\varepsilon^2$  такое, что

$$\begin{aligned} C = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2 &= \exp(\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon + \varphi_2\varepsilon^2) = \exp(\varphi_0)\exp(\varphi_1\varepsilon + \varphi_2\varepsilon^2) = \\ &= \rho \exp(\varphi_1\varepsilon + \varphi_2\varepsilon^2) = \rho \exp(\alpha(\varepsilon - \varepsilon^2) + (\varepsilon + \varepsilon^2)\beta), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $\rho = \exp(\varphi_0) = \sqrt[3]{\|C\|_3} = \sqrt[3]{r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb}$ ,  $\alpha = (\varphi_1 + \varphi_2) \in [0, 2\pi/\sqrt{3}]$ ,

$\beta = \varphi_1 - \varphi_2 \in \mathbf{R}$  и  $\rho = \exp(\varphi_0) = \sqrt[3]{\|C\|_3} = \sqrt[3]{r^3 + g^3 + b^3 - 3rgb}$ , то говорят что  $\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon + \varphi_2\varepsilon^2$  является логарифмом числа  $C = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$ :  $\varphi_0 + \varphi_1\varepsilon + \varphi_2\varepsilon^2 = \ln(r + g\varepsilon + b\varepsilon^2)$ . Можно доказать, что:

$$\begin{aligned}
r &= e^{\varphi_0} [\mathbf{ap}_0(\varphi_1)\mathbf{ap}_0(\varphi_2) + \mathbf{ap}_1(\varphi_1)\mathbf{ap}_1(\varphi_2) + \mathbf{ap}_2(\varphi_1)\mathbf{ap}_2(\varphi_2)], \\
g &= e^{\varphi_0} [\mathbf{ap}_0(\varphi_1)\mathbf{ap}_2(\varphi_2) + \mathbf{ap}_1(\varphi_1)\mathbf{ap}_0(\varphi_2) + \mathbf{ap}_2(\varphi_1)\mathbf{ap}_1(\varphi_2)], \\
g &= e^{\varphi_0} [\mathbf{ap}_0(\varphi_1)\mathbf{ap}_1(\varphi_2) + \mathbf{ap}_2(\varphi_1)\mathbf{ap}_0(\varphi_2) + \mathbf{ap}_1(\varphi_1)\mathbf{ap}_2(\varphi_2)].
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Триплетное число  $C = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2$  записывается и в такой форме

$$C = r + g\varepsilon + b\varepsilon^2 = R_{ch} \left[ \frac{1 + \varepsilon - \varepsilon^2}{3} \frac{a_{lu}}{R_{ch}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{2 - \varepsilon - \varepsilon^2}{3} \cos \varphi_1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon^2}{\sqrt{2}} \sin \varphi_1 \right].$$

Легко доказывается, что

$$\begin{aligned}
C^m &= (r + g\varepsilon + b\varepsilon^2)^m = \\
&= \rho^m \left[ \frac{2 - \varepsilon - \varepsilon^2}{3} \left( \frac{\operatorname{tg} \theta_{ch}}{\sqrt{2}} \right)^{m/3} + \frac{1 + \varepsilon + \varepsilon^2}{3} \left( \frac{\operatorname{tg} \theta_{ch}}{\sqrt{2}} \right)^{2m/3} \right] \exp \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} (\varepsilon - \varepsilon^2) m \varphi_1 \right],
\end{aligned} \tag{3.13}$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{aligned}
C^m &= (r + g\varepsilon + b\varepsilon^2)^m = \\
&= R_{ch}^m \left[ \frac{1 + \varepsilon - \varepsilon^2}{3} \left( \frac{a_{lu}}{R_{ch}} \right)^m + \frac{2 - \varepsilon - \varepsilon^2}{\sqrt{2}} \left( \frac{3}{2} \right)^{m/2} \cos m \varphi_1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon^2}{\sqrt{3}} 2^{m/2} \sin m \varphi_1 \right].
\end{aligned} \tag{3.14}$$

**3.3.4. Триплетные преобразования RGB-пространства.** Согласно триплетной версии формулы Эйлера следующая триплетная группа "унитарных" вращений  $\mathbf{Rot} \{ \mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R} | \varepsilon) \}$  может быть сконструирована:

$$\hat{\mathbf{U}}(\alpha, \beta) = \exp(\alpha\varphi + \varepsilon^2\beta) = \exp(\alpha\varphi) \cdot \exp(\varepsilon^2\beta) = \hat{\mathbf{U}}_1(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{U}}_2(\beta),$$

где  $\alpha, \beta$  - групповые параметры. Условие триплетной унитарности суть:

$$\mathbf{U}(\alpha, \beta) \tilde{\mathbf{U}}(\alpha, \beta) \tilde{\tilde{\mathbf{U}}}(\alpha, \beta) = \mathbf{I}, \text{ где}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}(\alpha, \beta) = \exp((\omega\varepsilon)\alpha + (\omega\varepsilon)^2\beta), \quad \tilde{\tilde{\mathbf{U}}}(\alpha, \beta) = \exp((\omega^2\varepsilon)\alpha + (\omega\varepsilon^2)\beta).$$

Обсудим теперь  $\mathbf{U}_1(\alpha) = \exp(\alpha\varepsilon)$  и  $\mathbf{U}_2(\beta) = \exp(\varepsilon^2\beta)$ . Генераторы  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^2$

имеют следующее матричное представление:  $\varepsilon = \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}$ ,  $\varepsilon^2 = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}$ .

Следовательно,

$$U_1(\alpha) = \exp\left(\alpha \cdot \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{ap}_0^1\alpha & \mathbf{ap}_1^1\alpha & \mathbf{ap}_2^1\alpha \\ \mathbf{ap}_2^1\alpha & \mathbf{ap}_0^1\alpha & \mathbf{ap}_1^1\alpha \\ \mathbf{ap}_1^1\alpha & \mathbf{ap}_2^1\alpha & \mathbf{ap}_0^1\alpha \end{bmatrix},$$

$$U_2(\beta) = \exp\left(\beta \cdot \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{ap}_0^2\alpha & \mathbf{ap}_1^2\alpha & \mathbf{ap}_2^2\alpha \\ \mathbf{ap}_2^2\alpha & \mathbf{ap}_0^2\alpha & \mathbf{ap}_1^2\alpha \\ \mathbf{ap}_1^2\alpha & \mathbf{ap}_2^2\alpha & \mathbf{ap}_0^2\alpha \end{bmatrix}.$$

Если  $\mathcal{F} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^1 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^1 \end{bmatrix}$  - дискретное  $(3 \times 3)$ -преобразование Фурье, то

$$\mathcal{F} \cdot U_1(\alpha) \cdot \mathcal{F}^+ = \exp\left(\alpha \cdot \mathcal{F} \begin{bmatrix} & & 1 \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix} \mathcal{F}^+\right) = \mathcal{F}^+ \begin{bmatrix} \mathbf{ap}_0^1\alpha & \mathbf{ap}_1^1\alpha & \mathbf{ap}_2^1\alpha \\ \mathbf{ap}_2^1\alpha & \mathbf{ap}_0^1\alpha & \mathbf{ap}_1^1\alpha \\ \mathbf{ap}_1^1\alpha & \mathbf{ap}_2^1\alpha & \mathbf{ap}_0^1\alpha \end{bmatrix} \mathcal{F},$$

или

$$\mathcal{F} \cdot U_1(\alpha) \cdot \mathcal{F}^+ = \exp\left(\alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \omega^1 & \\ & & \omega^2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \text{Diag} \left( \mathbf{ap}_0^1\alpha + \mathbf{ap}_1^1\alpha + \mathbf{ap}_2^1\alpha, \mathbf{ap}_0^1\alpha + \omega^1\mathbf{ap}_1^1\alpha + \omega^2\mathbf{ap}_2^1\alpha, \mathbf{ap}_0^1\alpha + \omega^2\mathbf{ap}_1^1\alpha + \omega^1\mathbf{ap}_2^1\alpha \right).$$

Аналогично,

$$\mathcal{F} \cdot U_2(\beta) \cdot \mathcal{F}^+ = \exp\left(\beta \cdot \mathcal{F} \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \mathcal{F}^+\right) = \mathcal{F}^+ \begin{bmatrix} \mathbf{ap}_0^2\beta & \mathbf{ap}_1^2\beta & \mathbf{ap}_2^2\beta \\ \mathbf{ap}_2^2\beta & \mathbf{ap}_0^2\beta & \mathbf{ap}_1^2\beta \\ \mathbf{ap}_1^2\beta & \mathbf{ap}_2^2\beta & \mathbf{ap}_0^2\beta \end{bmatrix} \mathcal{F},$$

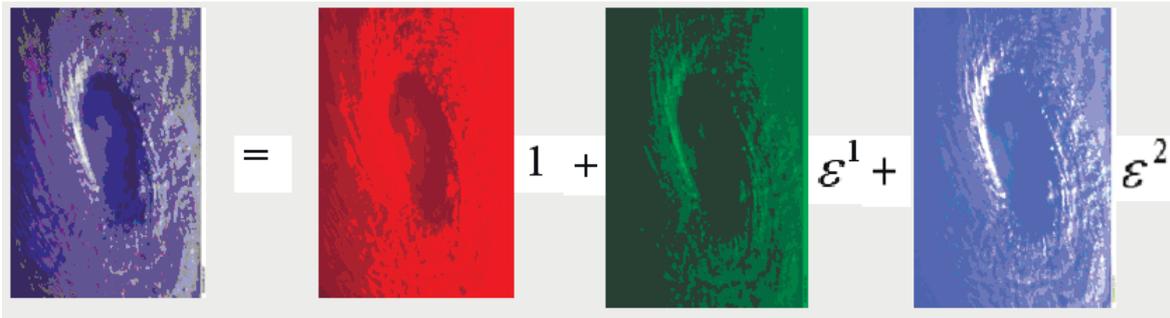
или

$$\mathcal{F} \cdot U_2(\beta) \cdot \mathcal{F}^+ = \exp\left(\beta \cdot \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \omega^2 & \\ & & \omega^1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \text{Diag} \left( \mathbf{ap}_0^2\beta + \mathbf{ap}_1^2\beta + \mathbf{ap}_2^2\beta, \mathbf{ap}_0^2\beta + \omega^2\mathbf{ap}_1^2\beta + \omega^1\mathbf{ap}_2^2\beta, \mathbf{ap}_0^2\beta + \omega^1\mathbf{ap}_1^2\beta + \omega^2\mathbf{ap}_2^2\beta \right).$$

### 3.4. Триpletные модели цветных изображений

Цветное изображение обычно интерпретируется, как векторно-значный сигнал  $\mathbf{f}^{col}(\mathbf{x}) = (f_R(\mathbf{x}), f_G(\mathbf{x}), f_B(\mathbf{x}))$ . Мы предлагаем интерпретировать цветные изображения как триплетно-значные сигналы, которые будем записывать в двух форматах: в первом в (R,G,B)-формате  $\mathbf{f}_{col}(\mathbf{x}) = f_R(\mathbf{x}) + f_G(\mathbf{x})\varepsilon^1 + f_B(\mathbf{x})\varepsilon^2 = (f_R(\mathbf{x}), f_G(\mathbf{x}), f_B(\mathbf{x}))$  (см. рис. 3.12), и во втором в “люминасно-хроматическом” (LC) формате:  $\mathbf{f}_{col}(\mathbf{x}) = f_{lu}(\mathbf{x})\mathbf{e}_{lu} + \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x})\mathbf{E}_{ch} = (f_{lu}(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x}))$  [43-50]. Последний формат  $(f_{lu}(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x}))$  определяет изображение в терминах яркостной  $f_{lu}(\mathbf{x})$  и хроматической  $\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x})$  составляющих.



**Рис. 3.12.** В традиционном подходе каждый цветной пиксель ассоциируется с точкой в 3-D цветовом RGB векторном пространстве, а в предлагаемом подходе каждый пиксель ассоциируется с триплетным числом. Такое представление называется RGB-форматом

**Определение 3.2.** Цветные изображения следующих типов

$$\mathbf{f} : \text{Alg}_2^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R} | 1, I) \rightarrow \text{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2),$$

$$\mathbf{f}(x + Iy) = f_R(x + Iy) + f_G(x + Iy)\varepsilon + f_B(x + Iy)\varepsilon^2,$$

$$\mathbf{f} : \text{Vec}\{\text{Alg}_4^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1I_2)\} \rightarrow \text{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2),$$

$$\mathbf{f}(xI_1 + yI_2 + zI_1I_2) =$$

$$= f_R(xI_1 + yI_2 + zI_1I_2) + f_G(xI_1 + yI_2 + zI_1I_2)\varepsilon + f_B(xI_1 + yI_2 + zI_1I_2)\varepsilon^2,$$

называются триплетно-значными 2D- и 3D изображениями в RGB-формате.

**Определение 3.3.** Цветные изображения следующих типов

$$\mathbf{f} : \mathbf{Alg}_2^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R} | 1, I) \rightarrow \mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2),$$

$$\mathbf{f}(x + Iy) = f_{lu}(x + Iy)\mathbf{e}_{lu} + \mathbf{f}_{ch}(x + Iy)\mathbf{E}_{ch},$$

$$\mathbf{f} : \mathbf{Vec}\{\mathbf{Alg}_4^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1I_2)\} \rightarrow \mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2),$$

$$\mathbf{f}(xI_1 + yI_2 + zI_1I_2) = f_{lu}(xI_1 + yI_2 + zI_1I_2)\mathbf{e}_{lu} + \mathbf{f}_{ch}(xI_1 + yI_2 + zI_1I_2)\mathbf{E}_{ch}$$

называются триплетно-значными 2D- и 3D изображениями в триплетном LC-формате. Второй формат (рис. 3.13) определяет каждый пиксель в терминах яркостной  $f_{lu}(\mathbf{x})$  и хроматической  $\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x})$  составляющих, где  $|\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x})|$  - суть насыщенность и  $\mathbf{arg}\{\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x})\}$  - цветовой тон изображения  $\mathbf{f}_{col}(\mathbf{x})$ . В этом формате изображение делится на две части: люминансную (яркостную) часть  $f_{lu}(\mathbf{x})$  и хроматическую часть  $\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x})$ .

Аргумент комплексного числа  $\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x})$  непосредственно эквивалентен определению цветового тона (hue), а модуль комплексного числа  $|\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x})|$  эквивалентен насыщенности пикселя с координатой  $\mathbf{x}$ .

**Определение 3.4.** Два пространства

$$\mathfrak{L}(\mathbf{Alg}_2^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R} | 1, I), \mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2)) :=$$

$$= \left\{ \mathbf{f}(\mathbf{z}) \mid \mathbf{f}(\mathbf{z}) : \mathcal{A}_4^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R} | 1, I) \rightarrow \mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2) \right\},$$

$$\mathfrak{L}(\mathbf{Vec}\{\mathbf{Alg}_4^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1I_2)\}, \mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2)) :=$$

$$= \left\{ \mathbf{f}(\mathbf{r}) \mid \mathbf{f}(\mathbf{r}) : \mathbf{Vec}\{\mathcal{A}_4^{Sp(p,q,r)}(\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, I_1I_2)\} \rightarrow \mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^1, \varepsilon^2) \right\}$$

называются пространствами Гревса-Гильберта цветных 2D- и 3D-изображений. Изменения в перцептуальном пространстве, такие, как

изменения яркости, цветового тона и насыщенности могут быть просто описаны на алгебраическом языке триплетной алгебры  $\mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ .

$$\begin{aligned}
 f_{col}(x,y) &= \text{[Image of colorful bicycles]} = \\
 &= f_{lu}(x,y)e_{lu} + \mathbf{f}_{Ch}(x,y)E_{Ch} = \\
 &\text{[Image of grayscale bicycles]} e_{lu} + \text{[Image of color map]} E_{Ch}
 \end{aligned}$$

**Рис. 3.13.** Триплетный LC-формат цветного изображения

Пусть для примера  $\mathcal{A} = (a_{lu}, \mathbf{z}_{ch}) = (a_{lu}, |\mathbf{z}_{ch}|e^{i\varphi})$ , где  $a_{lu} > 0$ , тогда следующее преобразование

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{col}(\mathbf{x}) &\rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathbf{f}_{col}(\mathbf{x}) = (a_{lu}, \mathbf{z}_{ch}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x})) = \\
 &= (a_{lu}, |\mathbf{z}_{ch}|e^{i\varphi}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x})) = (a_{lu}f_{lu}(\mathbf{x}), |\mathbf{z}_{ch}|e^{i\varphi}\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x}))
 \end{aligned}$$

изменяет яркость, цветовой тон и насыщенность исходного изображения. Множество таких преобразований формирует люминансно-хроматическую группу  $\mathbf{LCG}(\mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2)) = \{(a_{lu}, \mathbf{z}_{ch}) | (a_{lu} \in \mathbf{R}^+) \& (\mathbf{z}_{ch} \in \mathbf{C})\}$ .

1. Пусть для примера  $\mathcal{A} = (a_{lu}, \mathbf{z}_{ch}) = (1, e^{i\varphi})$ , тогда преобразование

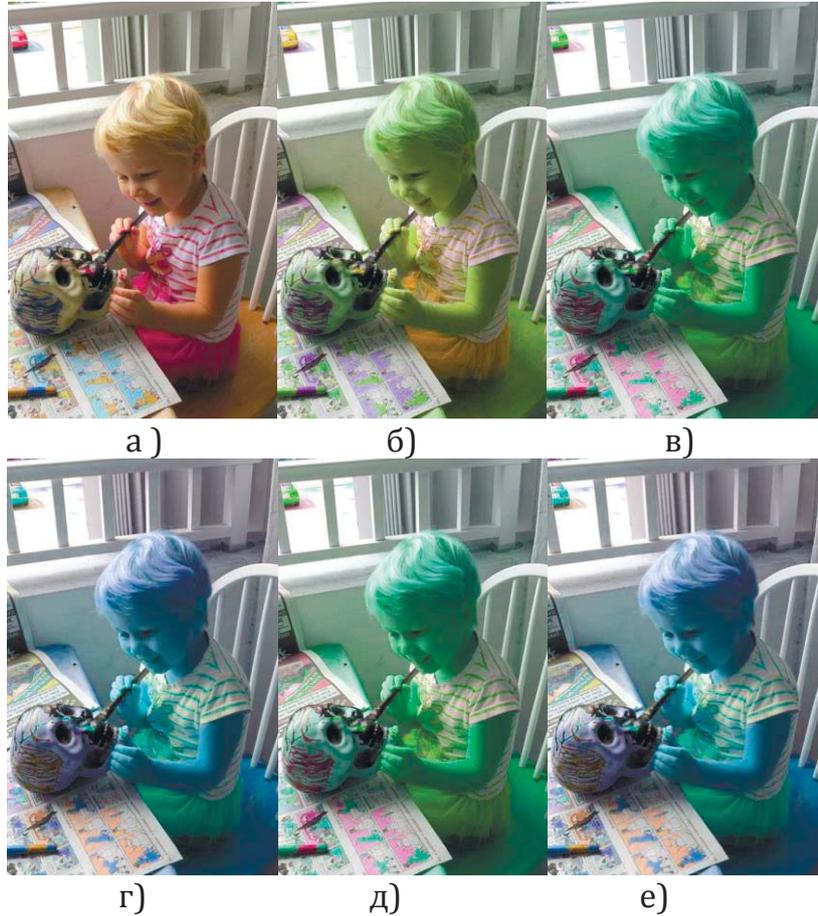
$$\mathbf{f}_{col}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathbf{f}_{col}(\mathbf{x}) = (1, e^{i\varphi}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x})) = (f_{lu}(\mathbf{x}), e^{i\varphi}\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x}))$$

изменяет цветовой тон исходного изображения (см. рис. 3.14). Множество всех таких преобразований формирует унитарную группу преобразований цветового тона  $\mathbf{Hog}(\mathbf{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2)) = \{(1, e^{i\varphi}) | e^{i\varphi} \in \mathbf{C}\}$ . Эта группа сохраняет все три нормы:  $\|\mathcal{A} \cdot \mathbf{f}_{col}(\mathbf{x})\|_{1,2,3} = \|\mathcal{A}\|_{1,2,3} \|\mathbf{f}_{col}(\mathbf{x})\|_{1,2,3} = \|\mathbf{f}_{col}(\mathbf{x})\|_{1,2,3}$ .

2. Пусть теперь  $\mathcal{A} = (1, a)$ ,  $a > 0$  тогда следующие преобразования

$$\mathbf{f}_{col}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathbf{f}_{col}(\mathbf{x}) = (1, a) \cdot (f_{lu}(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x})) = (f_{lu}(\mathbf{x}), a\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x}))$$

изменяют только насыщенность цветного изображения (см. рис. 3.15). Множество таких преобразований формирует группу преобразований насыщенности  $\text{SAG}\left(\text{Alg}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2)\right) = \{(1, a) | a \in \mathbf{R}^+\}$ .



**Рис. 3.14.** Изменение цветового тона у исходного изображения  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (1, e^{i\varphi}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x})) = (f_{lu}(\mathbf{x}), e^{i\varphi}\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x}))$ ; а) исходное изображение "Yorick" ( $\varphi = 0$ ), б)  $\varphi = \pi/12$ , в)  $\varphi = \pi/6$ , г)  $\varphi = \pi/4$ , д)  $\varphi = -\pi/12$ , е)  $\varphi = -\pi/6$

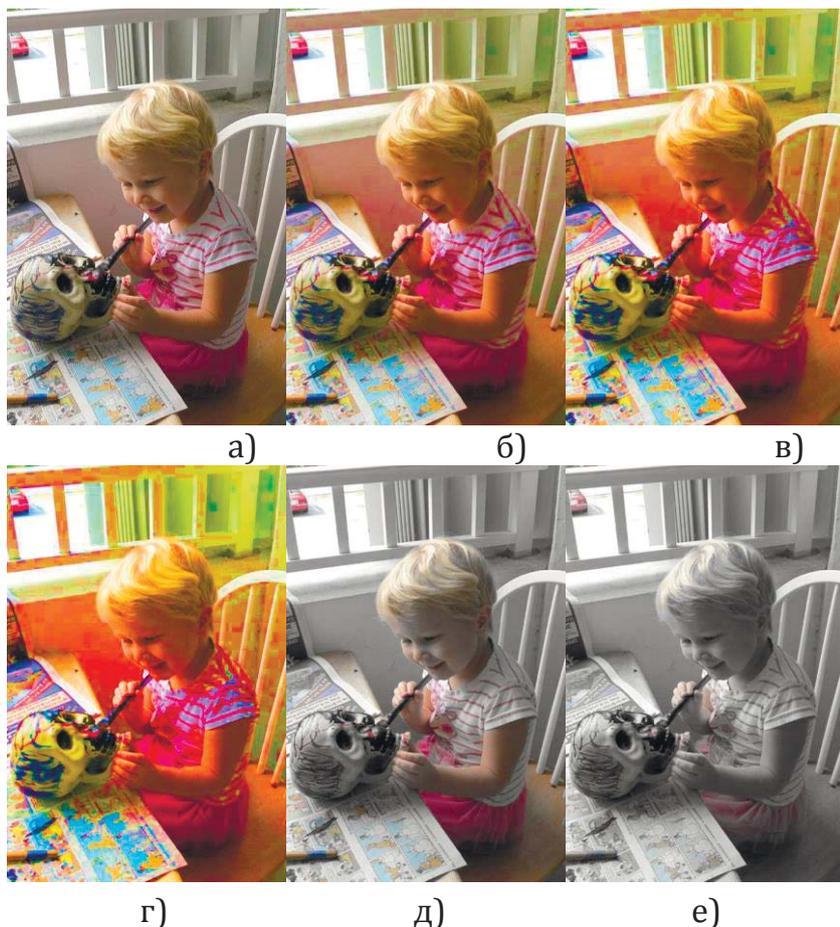
3. Если  $\mathcal{A} = (1, \mathbf{z}_{ch}) = (1, ae^{i\varphi})$ , то преобразования

$$\mathbf{f}_{col}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathbf{f}_{col}(\mathbf{x}) = (1, ae^{i\varphi}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x})) = (f_{lu}(\mathbf{x}), ae^{i\varphi}\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x}))$$

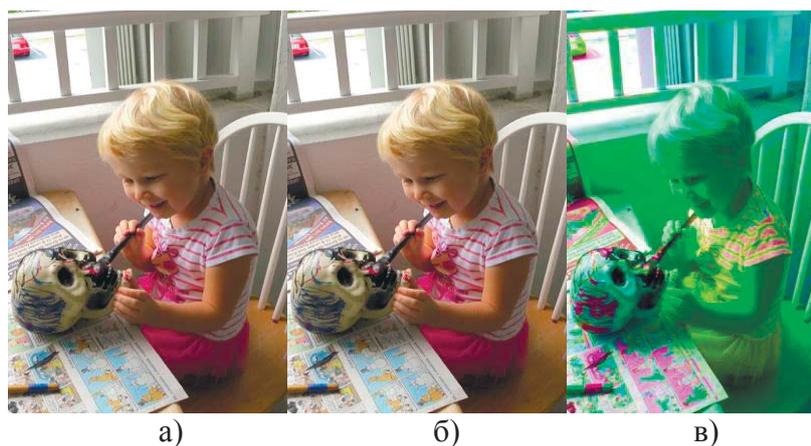
изменяют и цветовой тон, и насыщенность (см. рис. 3.16).

Множество таких преобразований формирует хроматическую группу

$$\text{Chg}\left(\text{Alg}_3^{\text{Vis}}(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2)\right) = \{(1, ae^{i\varphi}) | (e^{i\varphi} \in \mathbf{C}) \& (a \in \mathbf{R}^+)\}.$$



**Рис. 3.15.** Изменение насыщенности исходного цветного изображения  $\mathbf{f}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{z}) = (1, s) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z})) = (f_{lu}(\mathbf{z}), s\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z}))$  а) исходное изображение "Yorick" ( $s = 1$ ), б)  $s = 1,3$ ; в)  $s = 1,6$ ; г)  $s = 0,6$ , д)  $s = 0,3$



**Рис. 3.16.** Изменение хроматической составляющей (цветового тона и насыщенности) цветного изображения  $\mathbf{f}(\mathbf{z}) \rightarrow \mathcal{A} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{z}) = (1, se^{i\varphi}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{z}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z})) = (f_{lu}(\mathbf{z}), se^{i\varphi}\mathbf{f}_{ch}(\mathbf{z}))$  а) исходное изображение "Yorick" ( $s = 1, \varphi = 0$ ), б)  $s = 1,3; \varphi = -\pi/12$ ; в)  $s = 1,6; \varphi = +\pi/12$

Мы будем рассматривать искажения, вызванные следующими преобразованиями.

1) Пространственные преобразования:

- трансляции  $\vec{x}' \rightarrow \vec{x} + \vec{p}$ ,
- вращения  $\vec{r}' = e^{i_{sp}\varphi/2} \cdot \vec{r} \cdot e^{-i_{sp}\varphi/2}$
- дилатации  $\vec{r}' \rightarrow \lambda \vec{r}$ .

2) Перцептуальные преобразования:

- яркостные преобразования  $(a_{lu}, 1) \cdot (f_{lu}(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x}))$ ,
- преобразования цветового тона  $(1, e^{i\varphi}) \cdot (f_{lu}(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x}))$ ,
- преобразования насыщенности  $(1, a) \cdot (f_{lu}(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{ch}(\mathbf{x}))$ .

Если  $\mathbf{f}(\vec{x})$  - исходное изображение а  ${}^{(a_{lu}, \mathbf{z}_{ch})} \mathbf{f}_{(\lambda, \mathbf{Q}, \vec{p})}(\vec{x})$  - его искаженная

версия, то они связаны друг с другом следующим соотношением

$$\begin{aligned} {}^{(a_{lu}, \mathbf{z}_{ch})} \mathbf{f}_{(\lambda, \mathbf{Q}, \vec{p})}(\vec{x}) &= {}^{(a_{lu}, \mathbf{z}_{ch})} \mathbf{f}(\vec{x}') = \mathcal{A} \cdot \mathbf{f}\left(e^{i_{sp}\varphi/2} \cdot \vec{x} \cdot e^{-i_{sp}\varphi/2} + \vec{p}\right) = \\ &= \left(a_{lu} f_{lu}\left(e^{i_{sp}\varphi/2} \cdot \vec{x} \cdot e^{-i_{sp}\varphi/2} + \vec{p}\right), |\mathbf{z}_{ch}| e^{i\varphi} \mathbf{f}_{ch}\left(e^{i_{sp}\varphi/2} \cdot \vec{x} \cdot e^{-i_{sp}\varphi/2} + \vec{p}\right)\right), \end{aligned}$$

где  $\vec{x}' = e^{i_{sp}\varphi/2} \cdot \vec{x} \cdot e^{-i_{sp}\varphi/2} + \vec{p}$ .

### 3.5. Преобразования цветных изображений

Классический спектральный анализ, основанный на ортогональных и унитарных преобразованиях, играет важнейшую роль в цифровой обработке изображений. Преобразования, подобные дискретному преобразованию Фурье (ДПФ) и Уолша (ДПУ), интенсивно используются в различных приложениях. Естественным образом возникает вопрос о синтезе преобразований цветных (триплетно-значных) изображений. В этой части мы предлагаем широкий класс так называемых орто-унитарных преобразований для обработки цветных изображений.

### 3.5.1. Орто-унитарные преобразования изображений. 2-D цветные

$(N \times N)$ -изображения  $\mathbf{f}_{col} := [\mathbf{f}_{col}(i, j)]_{i,j=1}^N$  - суть  $(N \times N)$ -массивы. Здесь каждый цветной пиксель  $\mathbf{f}_{col}(i, j)$  в позиции  $(i, j)$  является триплетным числом, записанным в (R,G,B) или в LC форматах, соответственно. Все изображения  $[\mathbf{f}_{col}(i, j)]_{i,j=1}^N$  формируют  $N^2$ -мерное векторное пространство  $(Alg_3^{Vis})^{N^2}$  над триплетной алгеброй  $Alg_3^{Vis}$ .

**Определение 3.5.** Величина  $\mathbb{N}_k(\mathbf{f}_{col}) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{Z}_N^2} \|\mathbf{f}_{col}(i, j)\|_k$  называется нормой изображения  $\mathbf{f}_{col}$  где  $\|\cdot\|_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  – одна из трех триплетных норм.

**Определение 3.6.** Линейный оператор  $\mathcal{L}_{2D} : (Alg_3^{Vis})^{N^2} \rightarrow (Alg_3^{Vis})^{N^2}$  называется орто-унитарным, если он сохраняет норму цветного изображения.

Заметим, что ортогональные изображения сохраняют норму у реально-значных (серых) изображений, а унитарные – у комплексно-значных (бихроматических) изображений. Поскольку триплетное число в LC формате является своеобразным агрегатом из действительного и комплексного чисел, то естественно назвать введенные преобразования орто-унитарными или цветными. В LC-формате такие преобразования могут быть синтезированы с помощью ортогонального  $O_{2D}$  и унитарного  $U_{2D}$  2D преобразований:

$$\mathcal{L}_{2D} = O_{2D} \mathbf{e}_{lu} + U_{2D} \mathbf{E}_{ch} = (O_{1D} \otimes O_{1D}) \mathbf{e}_{lu} + (U_{1D} \otimes U_{1D}) \mathbf{E}_{ch},$$

где  $\otimes$ -символ тензорного произведения. Поэтому каждая пара  $(O_{1D}, U_{1D})$  из ортогонального  $O_{1D}$  и унитарного  $U_{1D}$  преобразований генерирует орто-унитарное преобразование  $\mathcal{L}_{2D} = (O_{1D} \otimes O_{1D}) \mathbf{e}_{lu} + (U_{1D} \otimes U_{1D}) \mathbf{E}_{ch}$ . В качестве примера в таблице 1 приведены некоторые цветные преобразования. Здесь  $O_{1D} = W, Hd, Ht, Hr, Wv$  – суть ортогональные преобразования Уолша, Адамара, Хартли, Хаара и вейвлет-преобразование, соответственно; а  $U_{1D} = F, \dot{W}, \dot{Hd}, \dot{Wv}$  – суть унитарное преобразование Фурье, комплексно-

значное преобразование Уолша и Адамара и, наконец, комплексно-значное вейвлет преобразование, соответственно.

**Таблица 1.** Примеры цветных преобразований

	$F$	$\dot{W}$	$\dot{H}d$	$\dot{W}v$
$W$	$W \cdot \mathbf{e}_{lu} + F \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$W \cdot \mathbf{e}_{lu} + \dot{W}\mathbf{E}_{ch}$	$W \cdot \mathbf{e}_{lu} + \dot{H}d \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$W \cdot \mathbf{e}_{lu} + \dot{W}v \cdot \mathbf{E}_{ch}$
$Hd$	$Hd \cdot \mathbf{e}_{lu} + F \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Hd \cdot \mathbf{e}_{lu} + \dot{W} \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Hd \cdot \mathbf{e}_{lu} + \dot{H}d \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Hd \cdot \mathbf{e}_{lu} + \dot{W}v \cdot \mathbf{E}_{ch}$
$Ht$	$Ht \cdot \mathbf{e}_{lu} + F \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Ht \cdot \mathbf{e}_{lu} + \dot{W} \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Ht \cdot \mathbf{e}_{lu} + \dot{H}d \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Ht \cdot \mathbf{e}_{lu} + \dot{W}v \cdot \mathbf{E}_{ch}$
$Hr$	$Hr \cdot \mathbf{e}_{lu} + F \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Hr \cdot \mathbf{e}_{lu} + \dot{W} \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Hr \cdot \mathbf{e}_{lu} + \dot{H}d \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Hr \cdot \mathbf{e}_{lu} + \dot{W}v \cdot \mathbf{E}_{ch}$
$Wv$	$Wv \cdot \mathbf{e}_{lu} + F \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Wv \cdot \mathbf{e}_{lu} + \dot{W} \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Wv \cdot \mathbf{e}_{lu} + \dot{H}d \cdot \mathbf{E}_{ch}$	$Wv \cdot \mathbf{e}_{lu} + \dot{W}v \cdot \mathbf{E}_{ch}$

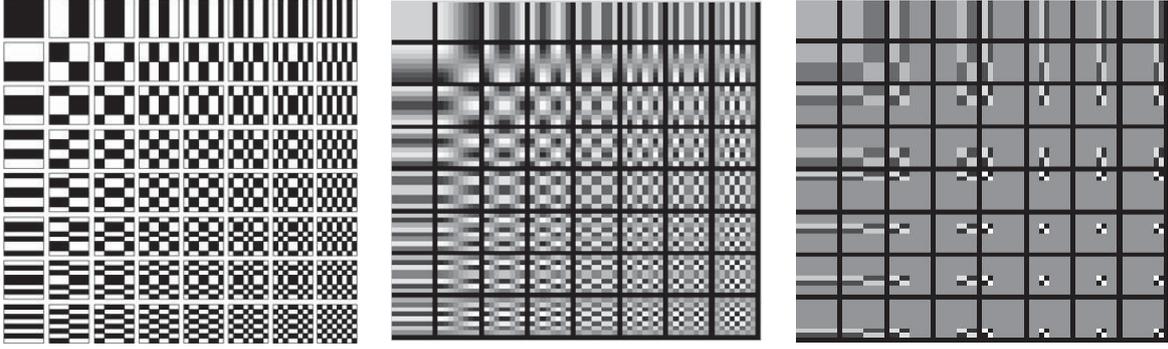
Если  $O = [\varphi_k(n)]_{k,n=0}^{N-1}$  и  $U = [\psi_k(n)]_{k,n=0}^{N-1}$  - произвольные ортогональное и унитарные преобразования, строки которых образуют базисы из реально- и комплексно-значных функций  $\{\varphi_k(n)\}_{k,n=0}^{N-1}$  и  $\{\psi_k(n)\}_{k,n=0}^{N-1}$ , то выражение

$$(O \otimes O)\mathbf{e}_{lu} + (U \otimes U)\mathbf{E}_{ch} = \left( [\varphi_{k_1}(n_1)] \otimes [\varphi_{k_2}(n_2)] \right) \mathbf{e}_{lu} + [\psi_{k_1}(n_1)] \otimes [\psi_{k_2}(n_2)] \mathbf{E}_{ch} = \\ = [\varphi_{k_1}(n_1)\varphi_{k_2}(n_2)] \mathbf{e}_{lu} + [\psi_{k_1}(n_1)\psi_{k_2}(n_2)] \mathbf{E}_{ch}$$

представляет цветное преобразование, где  $\{\varphi_{k_1}(n_1)\varphi_{k_2}(n_2)\}_{k_1,k_2=0, n_1,n_2=0}^{N-1, N-1}$  и  $\{\psi_{k_1}(n_1)\psi_{k_2}(n_2)\}_{k_1,k_2=0, n_1,n_2=0}^{N-1, N-1}$  формируют  $N^2$  ортогональных и унитарных базисных функций.

Обычно картинки собирают в 2-D массив, каждая ячейка которого занята одной 2-D базисной функцией. Мы называем такой массив иконостасом. Для примера, иконостасы для 2-D функций Уолша, косинусоидальных функций Хаара приведены на рис. 3.17. Некоторые примеры иконостасов для цветных преобразований показаны на рис. 3.18.

**3.5.2. Орто-унитарные (цветные) всплески.** Пусть  $\psi^R(x)$  – реально-значная материнская вейвлет-функция (всплеск), а  $\psi_{s,\tau}^R(x)$  - ее сдвинутые и масштабируемые версии  $\psi_{s,\tau}^R(x) = \left(\sqrt{|s|}\right)^{-1} \psi^R((x-\tau)/s)$ ,  $s, \tau \in \mathbf{R}$ ,  $s \neq 0$ . Они формируют ортогональный базис пространства  $L_2(\mathbf{R})$ .



64 2-D базисные 8x8-  
функции Уолша

64 2-D базисные 8x8-  
функции косинусной  
формы

64 2D базисные 8x8-  
функции Хаара

**Рис. 3.17.** Иконостас из 2-D базисных функций трех ортогональных преобразований

Построим цветные всплески как агрегат из яркостной и хроматической составляющих. В качестве первой используем реально-значный всплеск  $\psi^R(x)$ . Хроматическую составляющую определим как аналитический комплексно-значный сигнал следующего вида:  $\psi_{s,\tau}^{Ch}(x) = \psi_{s,\tau}^R(x) + j\mathcal{H}_1\{\psi_{s,\tau}^R(x)\}$ , где  $\mathcal{H}_1\{\cdot\}$  - суть одномерное преобразование Гильберта.

Используя идемпотенты  $\mathbf{e}_{lu}, \mathbf{E}_{Ch}$ , построим цветные базисные всплески

$$\begin{aligned}\psi_{s,\tau}^{Col}(x) &= \varphi_{s,\tau}^{lu}(x) \cdot \mathbf{e}_{lu} + \psi_{s,\tau}^{Ch}(x) \cdot \mathbf{E}_{Ch} = \varphi_{s,\tau}^{lu}(x) \cdot \mathbf{e}_{lu} + \left[ \varphi_{s,\tau}^{lu}(x) + j\mathcal{H}\{\varphi_{s,\tau}^{lu}(x)\} \right] \cdot \mathbf{E}_{Ch} = \\ &= \varphi_{s,\tau}^{lu}(x) \cdot [\mathbf{e}_{lu} + \mathbf{E}_{Ch}] + j\mathcal{H}\{\varphi_{s,\tau}^{lu}(x)\} \cdot \mathbf{E}_{Ch} = \varphi_{s,\tau}^{lu}(x) \cdot \mathbf{I}_3 + j\mathcal{H}\{\varphi_{s,\tau}^{lu}(x)\} \cdot \mathbf{E}_{Ch},\end{aligned}$$

где  $\varphi_{s,\tau}^{lu}(x) = \varphi_{s,\tau}^R(x)$  - реально-значная (яркостная) компонента всплеска и  $\psi_{s,\tau}^{Ch}(x)$  - его комплексная (хроматическая) составляющая,  $\mathbf{I}_3 = \mathbf{e}_{lu} + \mathbf{E}_{Ch}$  - суть единичное  $(3 \times 3)$ -преобразование.

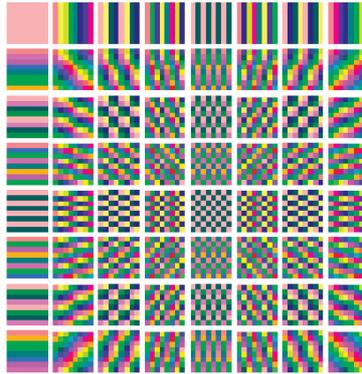
Очевидно, аналитические функции двух переменных

$$\begin{aligned}\psi_{s_1,\tau_1}^{Col}(x)\psi_{s_2,\tau_2}^{Col}(y) &= \\ &= \varphi_{s_1,\tau_1}^{lu}(x)\varphi_{s_2,\tau_2}^{lu}(y) \cdot \mathbf{e}_{lu} + \left[ \varphi_{s_1,\tau_1}^{lu}(x)\varphi_{s_2,\tau_2}^{lu}(y) + j\mathcal{H}_2\{\varphi_{s_1,\tau_1}^{lu}(x)\varphi_{s_2,\tau_2}^{lu}(y)\} \right] \cdot \mathbf{E}_{Ch} \\ &= \varphi_{s_1,\tau_1}^{lu}(x)\varphi_{s_2,\tau_2}^{lu}(y) \cdot \mathbf{I}_3 + j\mathcal{H}_2\{\varphi_{s_1,\tau_1}^{lu}(x)\varphi_{s_2,\tau_2}^{lu}(y)\} \cdot \mathbf{E}_{Ch},\end{aligned}$$

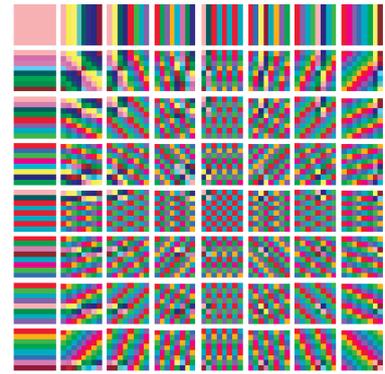
формируют 2D всплески, где  $\mathcal{H}_2\{\cdot\}$  - суть 2D преобразование Гильберта.



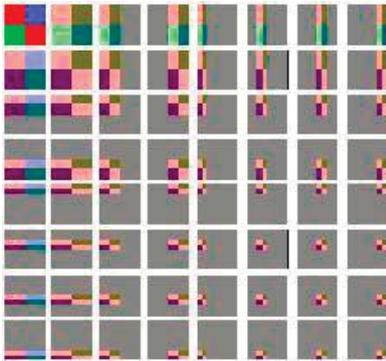
Цветные 2-D базисные 8x8-функции Уолша-Фурье



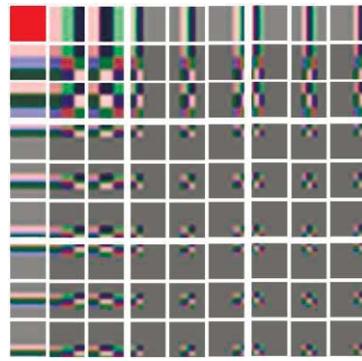
Цветные 2-D базисные 8x8-функции Хартли-Фурье



Цветные 2-D базисные 8x8-функции Хаара-Фурье



Цветные комплексные С-Уолша-Р-Уолша базисные 2D 8x8-функции



Цветные Фурье-Голей базисные 2D 9x9-функции



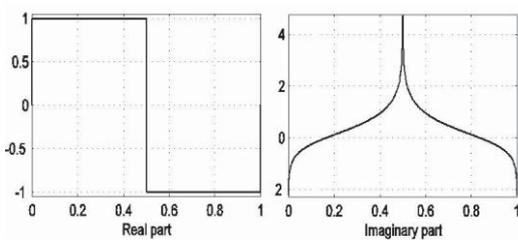
Цветные Хаар-Френель базисные 2D 9x9-функции,

**Рис. 3.18.** Иконостас из 2-D базисных цветных функций

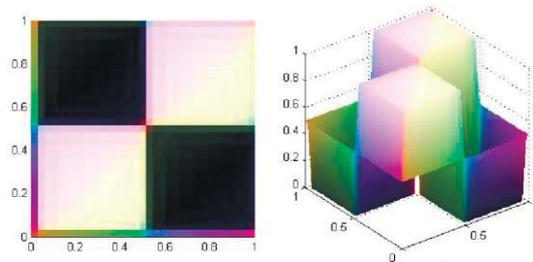
Мы определяем цветное (орто-унитарное) двумерное вейвлет-преобразование как

$$F_{COUT}^{col}(s_1, \tau_1, s_2, \tau_2) = \left( \sqrt{|s_1||s_2|} \right)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}_{col}(x, y) \psi_{s_1, \tau_1}^{Col}(x) \psi_{s_2, \tau_2}^{Col}(y) dx dy.$$

Примеры цветных всплесков и их составляющих приведены на рис. 3.19.

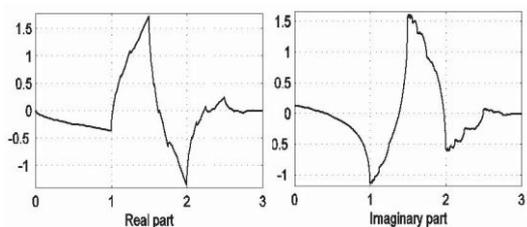


Реальная и мнимая части 1-D всплеска

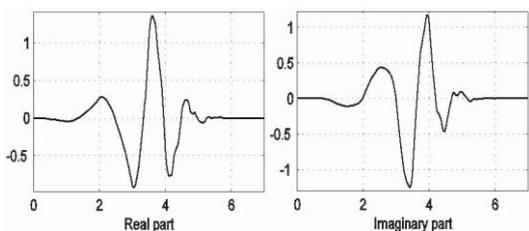


Хроматическая составляющая (слева) и

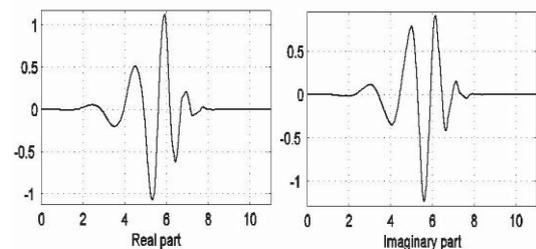
Хаара



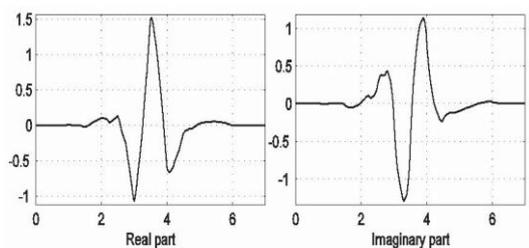
Реальная и мнимая части 1-D всплеска Добюши-2



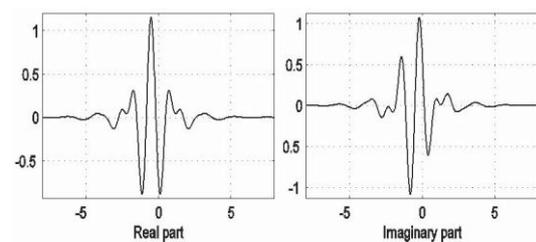
Реальная и мнимая части 1-D всплеска Добюши-4



Реальная и мнимая части 1-D всплеска Добюши-6

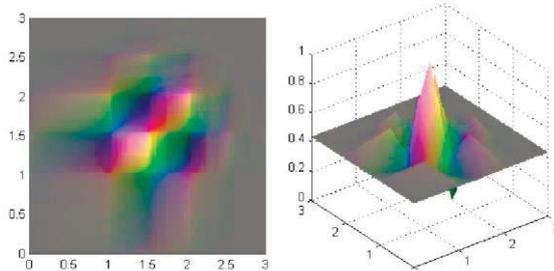


Реальная и мнимая части 1-D всплеска Symlet-4

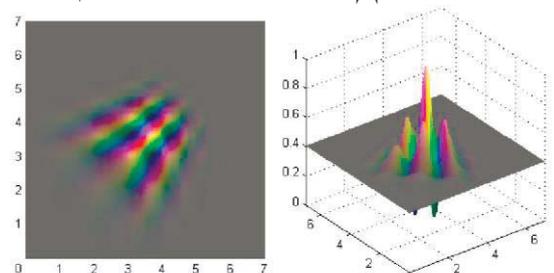


Реальная и мнимая части 1-D всплеска Мейера (Meyer)

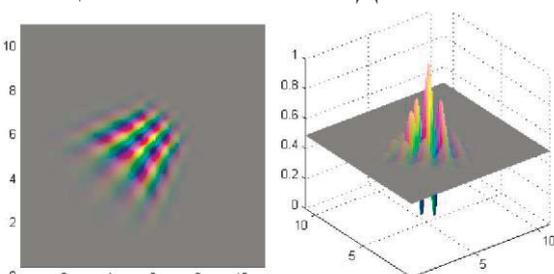
цветной 2-D всплеск Хаара



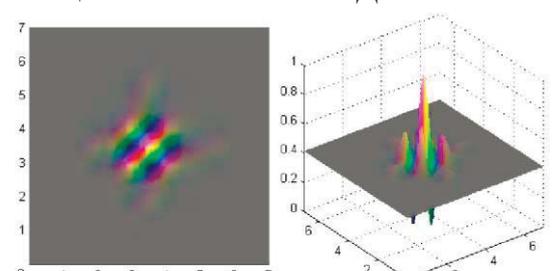
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Добюши-2



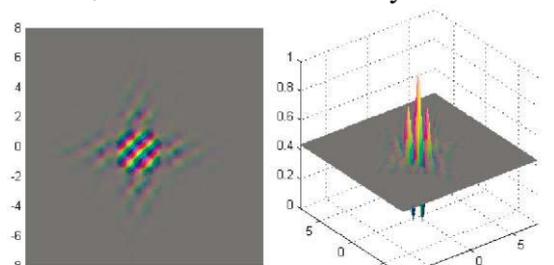
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Добюши-4



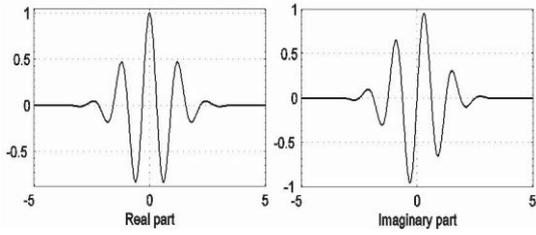
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Добюши-6



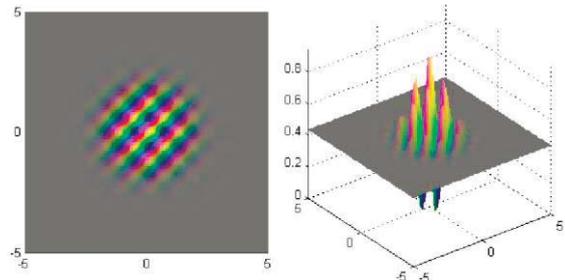
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Symlet-4



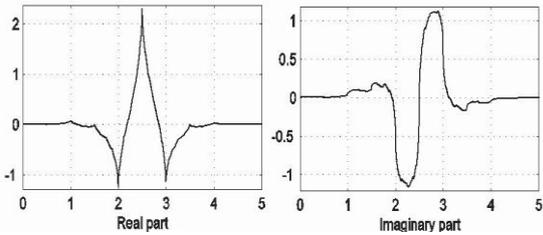
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Мейера



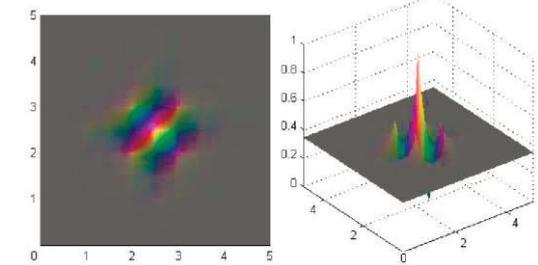
Реальная и мнимая части 1-D всплеска Морлета (Morlet)



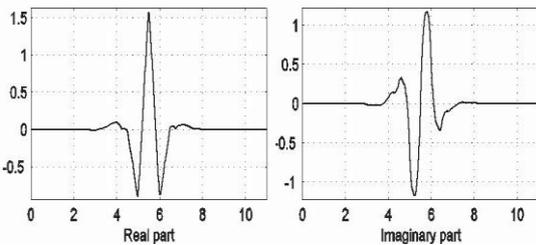
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Морлета



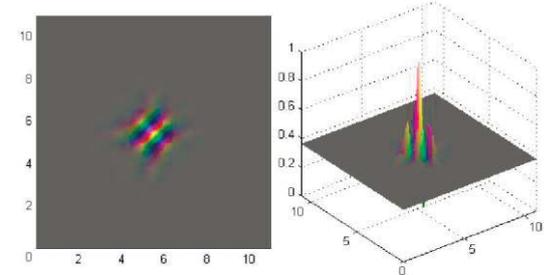
Реальная и мнимая части 1-D всплеска Koif-1



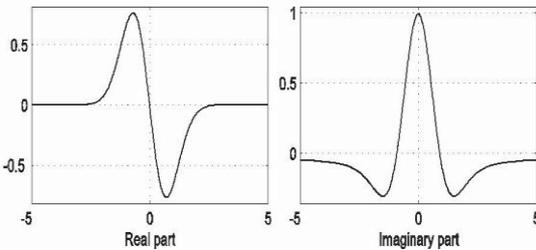
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Koif-1



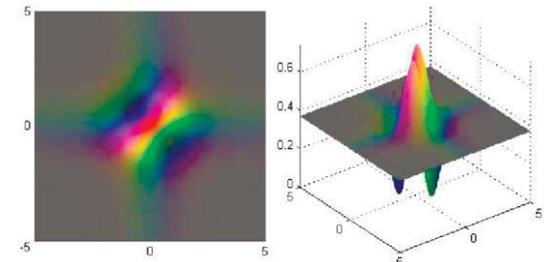
Реальная и мнимая части 1-D всплеска Koif-2



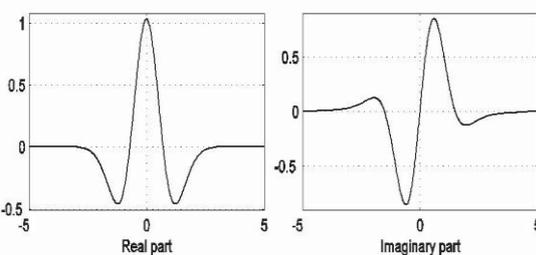
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Koif-2



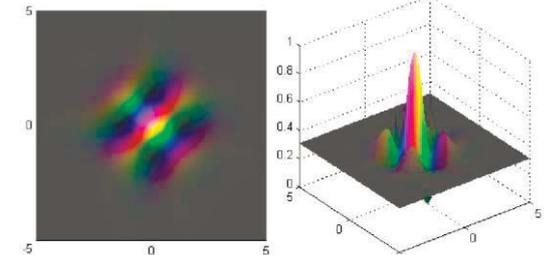
Реальная и мнимая части 1-D всплеска Гаусса-1



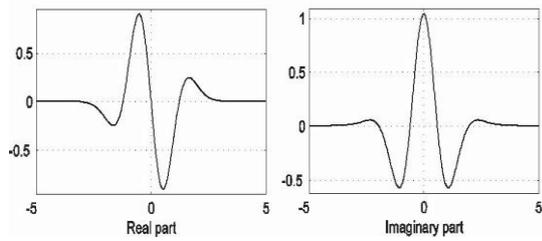
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Гаусса-1



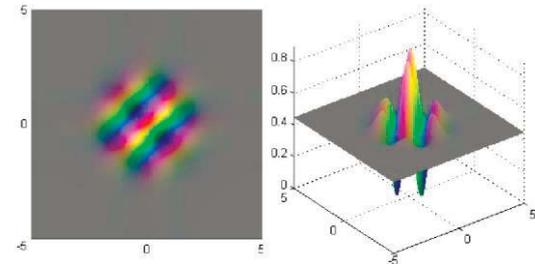
Реальная и мнимая части 1-D всплеска Гаусса-2



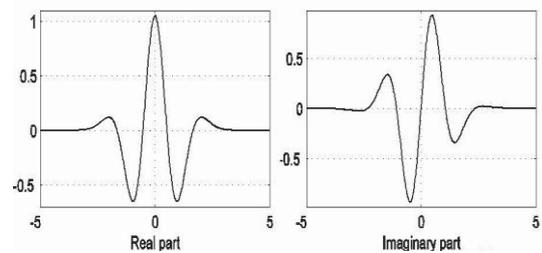
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Гаусса-2



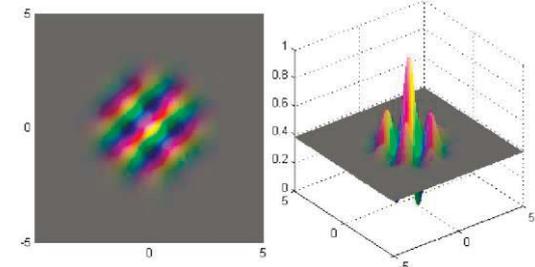
Реальная и мнимая части 1-D всплеска Гаусса-3



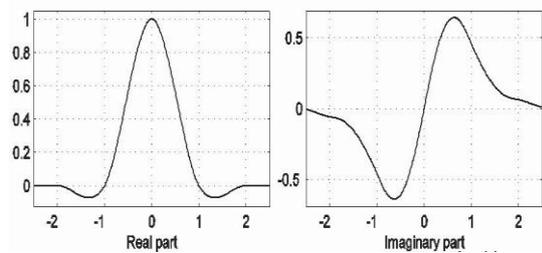
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Гаусса-3



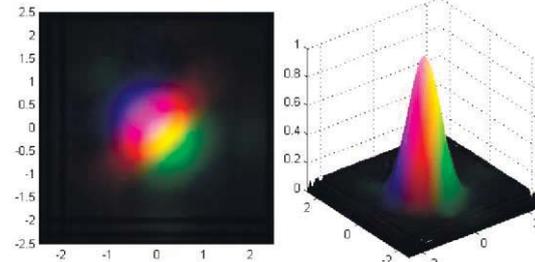
Реальная и мнимая части 1-D всплеска Гаусса-4



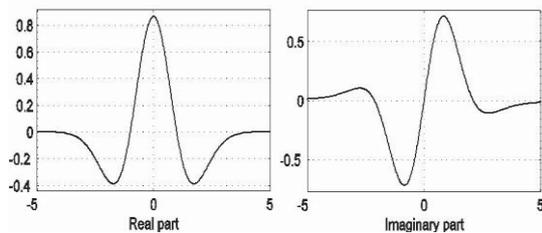
Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Гаусса-4



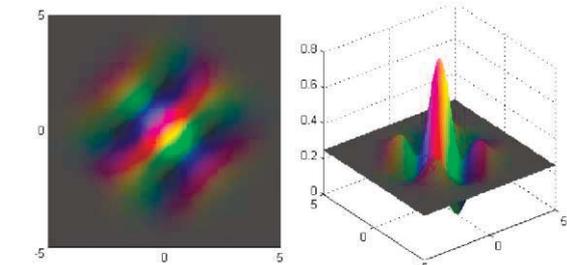
Реальная и мнимая части 1-D всплеска Кейса (Keiser)



Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Кейса



Реальная и мнимая части 1-D Mexican Hat всплеска



Хроматическая составляющая (слева) и цветной 2-D всплеск Mexican Hat

**Рис 3.19.** Слева направо: примеры реальной и мнимой частей 1-D серых всплесков, построенные на их основе хроматические 2-D составляющие и соответствующие им цветные 2-D всплески.

**3.5.3. Орто-унитарные сплайны.** Подобно цветным всплескам, можно построить цветные сплайны. Пусть  $Spl(x)$  - реально-значный сплайн. Цветной сплайн - суть триплетно-значная функция вида:

$$\begin{aligned}
 Spl^{Col}(x) &= Spl(x) \cdot \mathbf{e}_{lu} + [Spl(x) + j\mathcal{H}\{Spl(x)\}] \cdot \mathbf{E}_{Ch} = \\
 &= Spl(x) \cdot [\mathbf{e}_{lu} + \mathbf{E}_{Ch}] + j\mathcal{H}\{Spl(x)\} \cdot \mathbf{E}_{Ch} = Spl(x) \cdot \mathbf{I}_3 + j\mathcal{H}\{Spl(x)\} \cdot \mathbf{E}_{Ch}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Пусть к примеру  $Spl(x) \equiv BSpl(x)$  произвольный В-сплайн, который строится с помощью итерационной свертки прямоугольного импульса:

$$BSpl_0(x) = \begin{cases} 1, & -1/2 < x < 1/2, \\ 1/2, & |x|=1/2, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

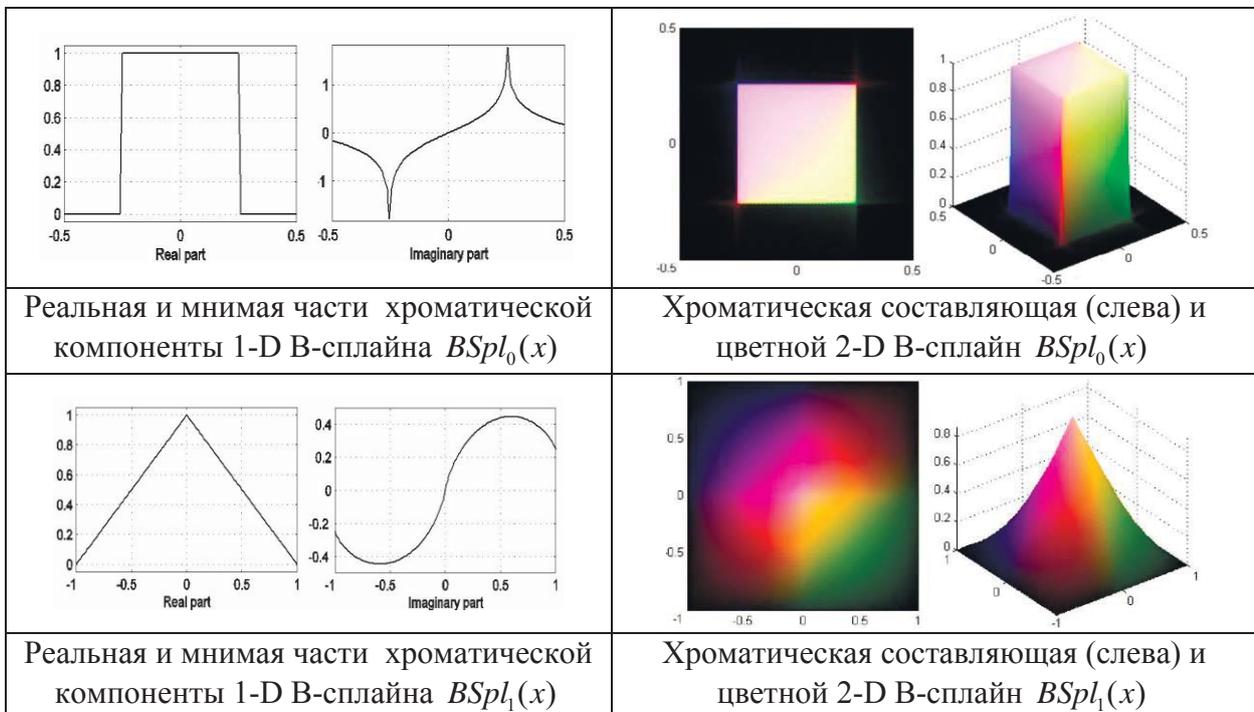
посредством  $BSpl_n = BSpl_{n-1} * BSpl_0$ , где \* - символ свертки. В соответствии с (3.15) цветной одномерный В-сплайн имеет следующую форму:

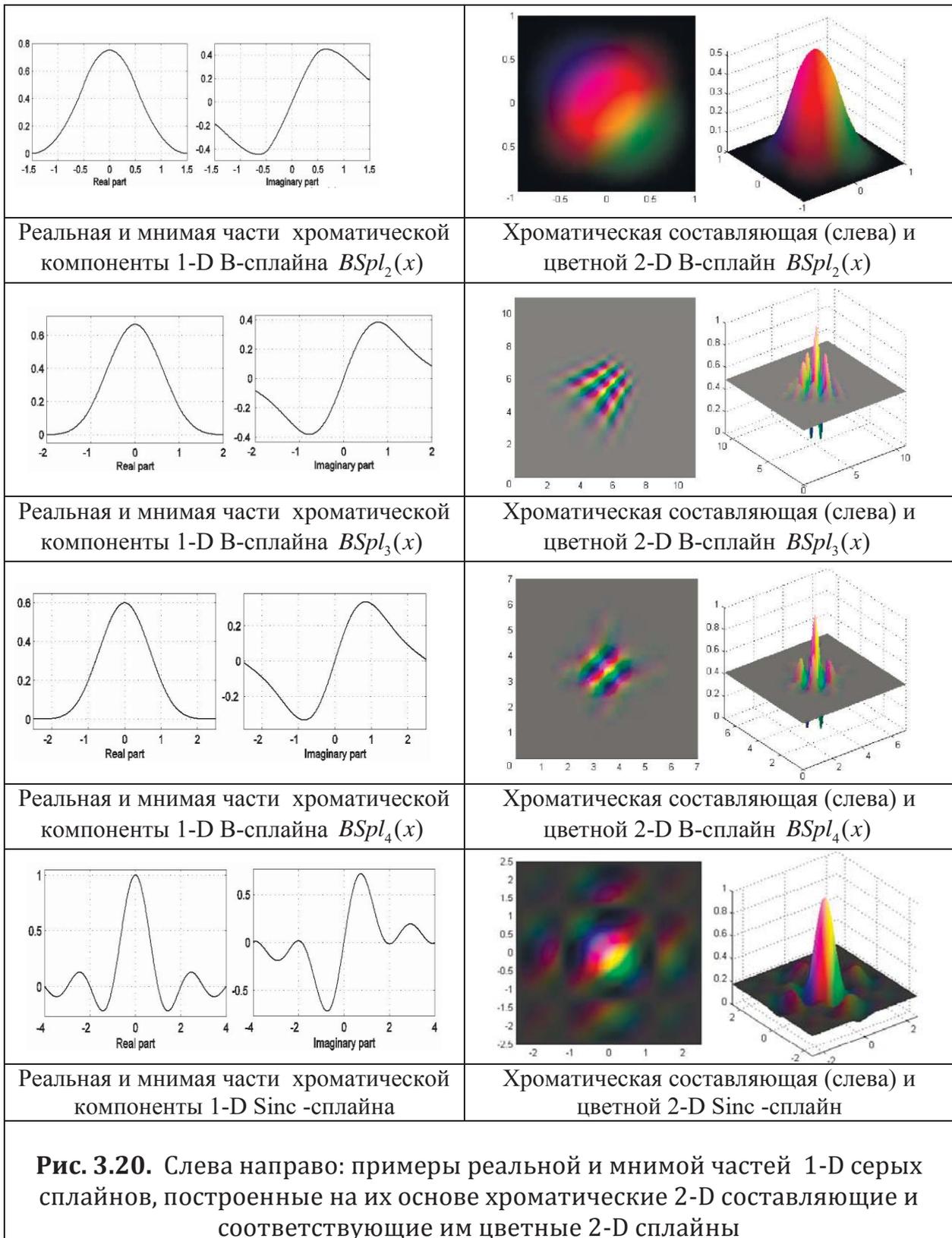
$$BSpl_n^{Col}(x) = BSpl_n(x) \cdot \mathbf{I}_3 + j\mathcal{H}\{BSpl_n(x)\} \cdot \mathbf{E}_{Ch}.$$

Очевидно, что следующие функции

$$BSpl_n^{Col}(x) \cdot BSpl_n^{Col}(y) = BSpl_n(x) \cdot BSpl_n(y) \cdot \mathbf{I}_3 + j\mathcal{H}_2\{BSpl_n(x) \cdot BSpl_n(y)\} \cdot \mathbf{E}_{Ch},$$

представляют 2D сплайны. В качестве примера на рис. 3.20 приведены некоторые цветные 1D сплайны.





**Рис. 3.20.** Слева направо: примеры реальной и мнимой частей 1-D серых сплайнов, построенные на их основе хроматические 2-D составляющие и соответствующие им цветные 2-D сплайны

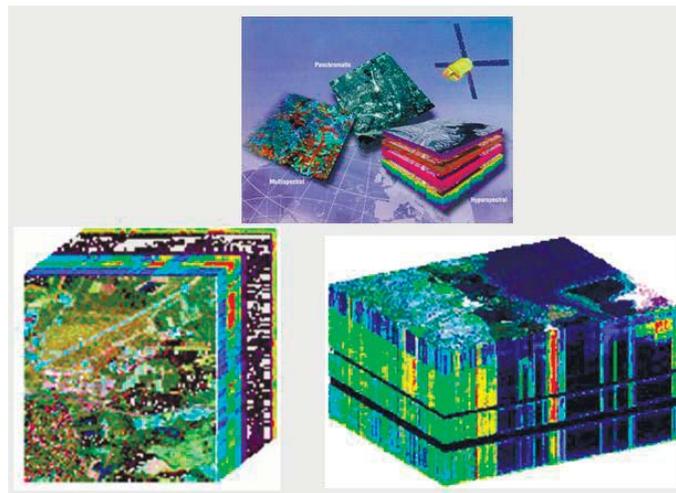


## Глава 4.

# МУЛЬТИПЛЕТНЫЕ МОДЕЛИ МУЛЬТИКОМПОНЕНТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

### 4.1. Что есть мультицветное и гиперспектральное изображения?

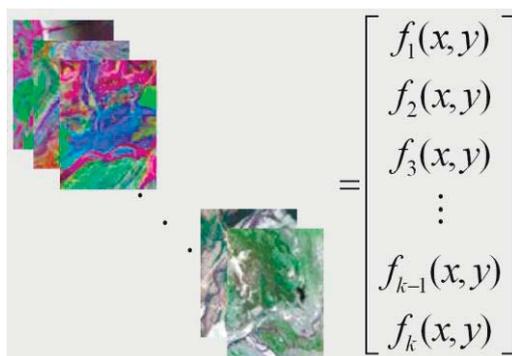
В настоящей работе термины «мультиспектральные и гиперспектральные изображения» используются для изображений с более чем одной компонентой. Они представляют собой пакет (серию) изображений, полученных оптическими датчиками в различных частотных диапазонах с длинами волн  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , называемыми спектральными каналами, где  $k$  - число различных оптических каналов [5-8]. Мультицветная техника использует малое число спектральных компонент (меньше, чем  $k = 10$ ).



**Рис 4.1.** Гиперспектральная камера формирует пакет из  $k$  одноканальных изображений в виде “3-мерного куба” с тремя координатными направлениями  $(x, y, \lambda)$  - (две пространственные координаты  $(x, y)$ , а третья  $\lambda$  – спектральная)

Гиперспектральные системы используют несколько десятков и даже сотен спектральных каналов. Гиперспектральная камера формирует пакет из  $k$  одноканальных изображений, каждое из которых получено в одном спектральном диапазоне. В этом случае формируется так называемый “3-мерный куб” (рис. 4.1) с тремя координатными направлениями  $(x, y, \lambda)$ - (две пространственные координаты  $(x, y)$ , а третья  $\lambda$  – спектральная).

$$\vec{\mathbf{f}}_{mcol}(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_{\lambda_1}(x, y) \\ f_{\lambda_2}(x, y) \\ \dots \\ f_{\lambda_k}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ \dots \\ f_k(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\lambda} S^{obj}(\lambda, x, y, z) H_1(\lambda) d\lambda \\ \int_{\lambda} S^{obj}(\lambda, x, y, z) H_2(\lambda) d\lambda \\ \dots \\ \int_{\lambda} S^{obj}(\lambda, x, y, z) H_k(\lambda) d\lambda \end{bmatrix} \quad (4.1)$$



**Рис 4.2.** Мультикомпонентные (или  $k$ -канальные) изображения могут быть охарактеризованы как изображения, содержащие  $k$ -мерные пиксели

Каждый пиксель в  $(x, y, \lambda)$ -кубе, представляет собой дискретный спектр, измеренный на длинах волн  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  и наблюдаемый в точке  $(x, y)$  двумерной сцены. Подобные изображения могут быть охарактеризованы как изображения, состоящие из  $k$ -мерных векторно-значных пикселей (см. рис. 4.2). Цветное 3-канальное RGB изображение - пример такого изображения:

$$\vec{\mathbf{f}}_{col}(x, y) = (f_R(x, y), f_G(x, y), f_B(x, y)) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y)), \quad (4.2)$$

где каждый пиксель характеризуется тремя положительными числами-компонентами: R (red)  $f_R(x, y)$ , G (green)  $f_G(x, y)$  и B (blue)  $f_B(x, y)$ .

Второй пример - гиперспектральные изображения, формируемые системами дистанционного зондирования Земли, которые наблюдают за земной поверхностью в  $k$  оптических диапазонах (каналах). У некоторых систем каждый пиксель может иметь несколько сотен спектральных компонент. Если изображение составлено из нескольких спектральных каналов ( $<10$ ), то оно называется мультицветным, в то время как изображение, содержащее несколько десятков или сотен каналов, называется гиперспектральным. В оставшейся части работы мы будем использовать термин мультикомпонентные изображения для обозначения мультицветных и гиперспектральных изображений. Гиперспектральные системы используют несколько десятков и даже сотен спектральных каналов. Гиперспектральная камера формирует  $k$  одноканальных изображений, каждое из которых получено в одном спектральном диапазоне. В этом случае формируется так называемый “3-мерный куб” с тремя координатными направлениями  $(x, y, \lambda)$ - (две пространственные координаты  $(x, y)$ , а третья  $\lambda$  – спектральная).

Наш подход к цветным и мультикомпонентным изображениям основывается на мультиплетных алгебрах и алгебрах Клиффорда. Реальные и комплексные числа могут быть легко обобщены до многомерных чисел, называемых в данной работе гиперкомплексными числами. В частности, изображения, которые возникают на сетине животных или на видео датчиках мы интерпретируем как мультиплетнозначные сигналы

$$\mathbf{f}_{mcol}(\mathbf{x}) = f_0(\mathbf{x}) + f_1(\mathbf{x})\varepsilon^1 + f_2(\mathbf{x})\varepsilon^2 + \dots + f_B(\mathbf{x})\varepsilon^{k-1}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \quad n = 2, 3, \dots \quad (4.3)$$

которые принимают свои значения в так называемых мультиплетных (мультицветных) алгебрах  $\text{Alg}_3^{Vis}(\mathbf{R} | 1, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{k-1}) = \mathbf{R} + \mathbf{R}\varepsilon^1 + \dots + \mathbf{R}\varepsilon^{k-1}$ , где  $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{k-1}$  - мультицветные гипермнимые единицы со свойством  $\varepsilon^k = +1, 0, -1$ .

Среди различных типов гиперкомплексных чисел, множество так называемых триплетных чисел и чисел Клиффорда имеют специальный

статус, потому что первые описывают цветные изображения, возникающие на ретине глаза, а вторые описывают изображения в головном мозге и используются им для различных геометрических и цветовых преобразований.

## 4.2. Мультиплетная (мультицветная) алгебра

Мультиплетные числа (многомерные обобщения комплексных чисел) представляются в следующей форме  $\mathcal{M} = a_0 + a_1\varepsilon^1 + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_{k-1}\varepsilon^{k-1}$ ,  $a_i \in \mathbf{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-1$ , где  $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{k-1}$  многоцветные гиперкомплексные единицы, удовлетворяющие одному из трех равенств  $\varepsilon_{col}^k = +1, 0, -1$ . Сложение и вычитание мультиплетных чисел  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  определяется покомпонентно:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \pm \mathcal{M}_2 = (a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_{k-1}\varepsilon^{k-1}) \pm (b_0 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \dots + b_{k-1}\varepsilon^{k-1}) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)\varepsilon + (a_2 \pm b_2)\varepsilon^2 + \dots + (a_{k-1} \pm b_{k-1})\varepsilon^{k-1}.$$

Следовательно, по отношению к сложению все три алгебры формируют три изоморфных 3-D векторных пространства. Правила умножения любой пары мультиплетных чисел  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  в трех мультиплетных алгебрах различны. Для гипермнимых единиц имеют место следующие таблицы умножения:

·	1	$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^2$	...	$\varepsilon_+^{k-1}$
1	1	$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^2$	...	$\varepsilon_+^{k-1}$
$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^1$	$\varepsilon_+^2$	...	$\varepsilon_+^{k-1}$	1
$\varepsilon_+^2$	$\varepsilon_+^2$	...	$\varepsilon_+^{k-1}$	1	$\varepsilon_+^1$
...	...	...	...	...	...
$\varepsilon_+^{k-1}$	$\varepsilon_+^{k-1}$	1	$\varepsilon_+^1$	...	$\varepsilon_+^{k-2}$

·	1	$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^2$	...	$\varepsilon_-^{k-1}$
1	1	$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^2$	...	$\varepsilon_-^{k-1}$
$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^1$	$\varepsilon_-^2$	...	$\varepsilon_-^{k-1}$	-1
$\varepsilon_-^2$	$\varepsilon_-^2$	...	$\varepsilon_-^{k-1}$	-1	$-\varepsilon_-^1$
...	...	...	...	...	...
$\varepsilon_-^{k-1}$	$\varepsilon_-^{k-1}$	-1	$-\varepsilon_-^1$	...	$-\varepsilon_-^{k-2}$

·	1	$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^2$	...	$\varepsilon_0^{k-1}$
1	1	$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^2$	...	$\varepsilon_0^{k-1}$
$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^1$	$\varepsilon_0^2$	...	$\varepsilon_0^{k-1}$	0
$\varepsilon_0^2$	$\varepsilon_0^2$	...	$\varepsilon_0^{k-1}$	0	0
...	...	...	...	...	...
$\varepsilon_0^{k-1}$	$\varepsilon_0^{k-1}$	0	0	...	0

Произведение двух мультиплетных чисел  $\mathcal{M}_1 = (a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_{k-1}\varepsilon^{k-1})$  и  $\mathcal{M}_2 = (b_0 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \dots + b_{k-1}\varepsilon^{k-1})$  определяется в соответствии с выше приведенными таблицами умножения гиперкомплексных единиц, а именно

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_2 = \left( \sum_{n=0}^{k-1} a_n \varepsilon_-^n \right) \cdot \left( \sum_{m=0}^{k-1} b_m \varepsilon_-^m \right) = \sum_{l=0}^{k-1} \left( \sum_{m=0}^{k-1} a_{l \ominus m} b_m \right) \varepsilon_-^l = \sum_{l=0}^{k-1} c_l \varepsilon_-^l$$

для  $\mathbf{Alg}_k^{-,Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_-^1, \varepsilon_-^2, \dots, \varepsilon_-^{k-1})$ ;

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_2 = \left( \sum_{n=0}^{k-1} a_n \varepsilon_+^n \right) \cdot \left( \sum_{m=0}^{k-1} b_m \varepsilon_+^m \right) = \sum_{l=0}^{k-1} \left( \sum_{m=0}^{k-1} \mathbf{Sign}(l-m) a_{l \ominus m} b_m \right) \varepsilon_+^l = \sum_{l=0}^{k-1} c_l \varepsilon_+^l$$

для  $\mathbf{Alg}_k^{+,Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_+^1, \varepsilon_+^2, \dots, \varepsilon_+^{k-1})$  и

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_2 = \left( \sum_{n=0}^{k-1} a_n \varepsilon_0^n \right) \cdot \left( \sum_{m=0}^{k-1} b_m \varepsilon_0^m \right) = \sum_{l=0}^{k-1} \left( \sum_{m=0}^{k-1} \mathbf{Hev}(l-m) a_{l \ominus m} b_m \right) \varepsilon_0^l = \sum_{l=0}^{k-1} c_l \varepsilon_0^l$$

для алгебры  $\mathbf{Alg}_k^{0,Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_0^1, \varepsilon_0^2, \dots, \varepsilon_0^{k-1})$ , где  $\ominus$  есть вычитание по модулю  $k$ , и

$$\mathbf{Sign}(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0, \end{cases} \quad \mathbf{Hev}(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

- есть знаковая функция и функция Хевисайда. Эти числа формируют три мультиплетных алгебры [43-50]:

$$\mathbf{Alg}_k^{+,Vis}(\mathbf{R}) = \mathbf{Alg}_k^{+,Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_+^1, \varepsilon_+^2, \dots, \varepsilon_+^{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{R} \varepsilon_+^i,$$

$$\mathbf{Alg}_k^{-,Vis}(\mathbf{R}) = \mathbf{Alg}_k^{-,Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_-^1, \varepsilon_-^2, \dots, \varepsilon_-^{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{R} \varepsilon_-^i,$$

$$\mathbf{Alg}_k^{0,Vis}(\mathbf{R}) = \mathbf{Alg}_k^{0,Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon_0^1, \varepsilon_0^2, \dots, \varepsilon_0^{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{R} \varepsilon_0^i.$$

Они называются, соответственно, циклической, ациклической и нильпотентной алгебрами. Нетрудно видеть, что мультиплетные произведения изоморфны  $k$ -точным циклической, ациклической и нильпотентной сверткам. Другой метод представления умножения

мультиплетных чисел основывается на их матричном представлении, при котором каждому мультиплетному числу  $\mathcal{M} = (a_0 + a_1\varepsilon + \dots + a_{k-1}\varepsilon^{k-1})$  в соответствие ставится циклическая, ациклическая и нильпотентная матрицы:

$$\mathcal{M} = (a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_{k-1}\varepsilon^{k-1}) \Leftrightarrow \hat{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_0 \\ a_2 & \dots & a_{k-1} & a_0 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M} = (a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_{k-1}\varepsilon^{k-1}) \Leftrightarrow \hat{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & -a_0 \\ a_2 & \dots & a_{k-1} & -a_0 & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M} = (a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots + a_{k-1}\varepsilon^{k-1}) \Leftrightarrow \hat{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & 0 \\ a_2 & \dots & a_{k-1} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда произведению  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$  мультиплетных чисел  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  будет соответствовать матричное произведение

$$\mathcal{M} \Leftrightarrow \hat{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} & c_0 \\ c_2 & \dots & c_{k-1} & c_0 & c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k-1} & c_0 & c_1 & c_2 & \dots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_0 \\ a_2 & \dots & a_{k-1} & a_0 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{k-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{k-1} & b_0 \\ b_2 & \dots & b_{k-1} & b_0 & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k-1} & b_0 & b_1 & b_2 & \dots \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M} \Leftrightarrow \hat{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} & -c_0 \\ c_2 & \dots & c_{k-1} & -c_0 & -c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k-1} & -c_0 & -c_1 & -c_2 & \dots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & -a_0 \\ a_2 & \dots & a_{k-1} & -a_0 & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{k-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{k-1} & -b_0 \\ b_2 & \dots & b_{k-1} & -b_0 & -b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k-1} & -b_0 & -b_1 & -b_2 & \dots \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{M} \Leftrightarrow \hat{\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} & 0 \\ c_2 & \dots & c_{k-1} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & 0 \\ a_2 & \dots & a_{k-1} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{k-1} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{k-1} & 0 \\ b_2 & \dots & b_{k-1} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 4.3. Люминансно-хроматическое представление мультиплетных чисел

Используя полиномиальную китайскую теорему об остатках, можно легко доказать, что две алгебры  $\mathbf{Alg}_k^{+,Vis}(\mathbf{R})$  и  $\mathbf{Alg}_k^{-,Vis}(\mathbf{R})$  являются прямыми суммами полей реальных и комплексных чисел:

$$\mathbf{Alg}_k^{+,Vis}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{k_{lu}} \oplus \mathbf{C}^{k_{ch}} = \begin{cases} \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_{lu}^1 + \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_{lu}^2 + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_{ch}^j, & \text{если } k \text{ четное,} \\ \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_{lu}^1 + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_{ch}^j, & \text{если } k \text{ нечетное,} \end{cases}$$

$$\mathbf{Alg}_k^{-,Vis}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{k_{lu}} \oplus \mathbf{C}^{k_{ch}} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_{ch}^j, & \text{если } k \text{ четное,} \\ \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_{lu}^1 + \sum_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}_{ch}^j, & \text{если } k \text{ нечетное,} \end{cases}$$

где  $\mathbf{e}_{lu}^i$  и  $\mathbf{E}_{ch}^j$  - "вещественный" и "комплексный" ортогональные идемпотенты, такие, что  $(\mathbf{e}_{lu}^i)^2 = \mathbf{e}_{lu}^i$ ,  $(\mathbf{E}_{ch}^j)^2 = \mathbf{E}_{ch}^j$ ,  $\mathbf{e}_{lu}^i \mathbf{E}_{ch}^j = \mathbf{E}_{ch}^j \mathbf{e}_{lu}^i$  для всех  $i$  и  $j$ .

Пусть  $k_{lu} = 0, 1, 2$  и  $k_{ch} = \frac{k}{2}, \frac{k}{2} - 1, \frac{k-1}{2}$ . Каждое мультиплетное число

$\mathcal{M} \in \mathcal{A}_k^{+,mcol}(\mathbf{R})$  может быть представлено как линейная комбинация  $k_{lu}$  «скалярных» частей и  $k_{ch}$  «комплексных» частей:

$$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{k_{lu}} (a_i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i) + \sum_{j=1}^{k_{ch}} (z_j \cdot \mathbf{E}_{ch}^j). \quad (4.4)$$

Числа  $a_i \in \mathbf{R}$  и  $z_j = b + ic \in \mathbf{C}$  называются мультилюминансными и мультихроматическими числами.

В таком представлении две главные арифметические операции имеют простейшую форму

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 &= \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} a_i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} z_j \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right) + \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} b_i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} w_j \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} (a_i + b_i) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} (z_j + w_j) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_2 &= \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} a_i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} z_j \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} b_i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} w_j \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^{K_{lu}} (a_i \cdot b_i) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{K_{ch}} (z_j \cdot w_j) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 &= \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} a_i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} \mathbf{z}_j \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right) + \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} b_i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right) = \\
&= \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} (a_i + b_i) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} (\mathbf{z}_j + \mathbf{w}_j) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right), \\
\mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_2 &= \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} a_i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} \mathbf{z}_j \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} b_i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right) = \\
&= \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} (a_i \cdot b_i) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} (\mathbf{z}_j \cdot \mathbf{w}_j) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j \right),
\end{aligned}$$

Мультиплетные алгебры формируют числовые кольца с делителями нуля.

#### 4.4. Мультиплетные алгебраические модели мультикомпонентных изображений

Мультикомпонентные изображения  $\vec{\mathbf{f}}_{mcol}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))$  в этом разделе будем интерпретировать как мультиплетнозначные сигналы, принимающие свои значения в некоторой мультиплетной алгебре.

**Определение 4.1.** Мультикомпонентное изображение формы

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{mcol}(\mathbf{x}) &= f_0(\mathbf{x}) + f_1(\mathbf{x})\varepsilon^1 + \dots + f_{m-1}(\mathbf{x})\varepsilon^{k-1} = \\
&= \sum_{i=1}^{k_{lu}} [f_{lu}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i] + \sum_{j=1}^{k_{ch}} [\mathbf{f}_{ch}^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j] = \\
&= (f_{lu}^1(\mathbf{x}), f_{lu}^2(\mathbf{x}), \dots, f_{lu}^{k_{lu}}(\mathbf{x}); \mathbf{f}_{ch}^1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{ch}^2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_{ch}^{k_{ch}}(\mathbf{x}))
\end{aligned}$$

называется мультиплетнозначным изображением в мультиплетной и мультилюминансно-мультихроматической формах, соответственно.

Первая форма определяет изображение  $k$  яркостями каждого канала. Вторая определяет каждый пиксель в терминах  $k_{lu}$  люминансных частей  $(f_{lu}^1(\mathbf{x}), f_{lu}^2(\mathbf{x}), \dots, f_{lu}^{k_{lu}}(\mathbf{x}))$  и  $k_{ch}$  хроматических частей  $(\mathbf{f}_{ch}^1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_{ch}^2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{f}_{ch}^{k_{ch}}(\mathbf{x}))$ , где

$$|\mathbf{f}_{ch}^1(\mathbf{x})|, |\mathbf{f}_{ch}^2(\mathbf{x})|, \dots, |\mathbf{f}_{ch}^{k_{ch}}(\mathbf{x})| \quad (4.5)$$

- мультинасыщенность, а

$$\arg\{\mathbf{f}_{ch}^1(\mathbf{x})\}, \arg\{\mathbf{f}_{ch}^2(\mathbf{x})\}, \dots, \arg\{\mathbf{f}_{ch}^{k_{ch}}(\mathbf{x})\} \quad (4.6)$$

- мультицветность мультикомпонентного изображения  $\mathbf{f}_{mcol}(\mathbf{x})$ .

Изменения мульти-яркости и мульти-хроматичности у многоканального изображения описываются на языке мультиплетной алгебры  $\mathbf{Alg}_k^{Vis}(\mathbf{R})$  как преобразование  $\mathbf{f}_{mcol}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{M} \cdot \mathbf{f}_{mcol}(\mathbf{x})$  для подходящего  $\mathcal{M}$ . Например, если

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= (a_{lu}^1, a_{lu}^2, \dots, a_{lu}^{k_{lu}}; \mathbf{z}_{ch}^1, \mathbf{z}_{ch}^2, \dots, \mathbf{z}_{ch}^{k_{ch}}) = \\ &= (a_{lu}^1, a_{lu}^2, \dots, a_{lu}^{k_{lu}}; |\mathbf{z}_{ch}^1| e^{i\varphi_{ch}^1}, |\mathbf{z}_{ch}^2| e^{i\varphi_{ch}^2}, \dots, |\mathbf{z}_{ch}^{k_{ch}}| e^{i\varphi_{ch}^{k_{ch}}}), \end{aligned}$$

то преобразование

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{mcol}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{M} \cdot \mathbf{f}_{mcol}(\mathbf{x}) &= \\ &= \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} [a_{lu}^i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i] + \sum_{j=1}^{k_{ch}} [|\mathbf{z}_{ch}^j(\mathbf{x})| e^{i\varphi_{ch}^j} \cdot \mathbf{E}_{ch}^j] \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} [f_{lu}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i] + \sum_{j=1}^{k_{ch}} [\mathbf{f}_{ch}^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j] \right) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} [a_{lu}^i f_{lu}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i] + \sum_{j=1}^{k_{ch}} [|\mathbf{z}_{ch}^j| e^{i\varphi_{ch}^j} \mathbf{f}_{ch}^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j] \right) \end{aligned}$$

изменяет мультилюминансность, мультицветность и мультинасыщенность исходного изображения. Множество таких преобразований образуют группу мультилюминансных и мультихроматических преобразований

$$\begin{aligned} \text{MLCG}(\mathbf{Alg}_k^{Vis}(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{k-1})) &= \\ &= \left\{ (a_{lu}^1, a_{lu}^2, \dots, a_{lu}^{k_{lu}}; \mathbf{z}_{ch}^1, \mathbf{z}_{ch}^2, \dots, \mathbf{z}_{ch}^{k_{ch}}) \mid (a_{lu}^1, a_{lu}^2, \dots, a_{lu}^{k_{lu}} \in \mathbf{R}^+) \& (\mathbf{z}_{ch}^1, \mathbf{z}_{ch}^2, \dots, \mathbf{z}_{ch}^{k_{ch}} \in \mathbf{C}) \right\}. \end{aligned}$$

1) Пусть, в частности,  $\mathcal{M} = (1, \dots, 1; e^{i\varphi_{ch}^1}, \dots, e^{i\varphi_{ch}^{k_{ch}}})$ , тогда преобразование

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{mcol}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{M} \cdot \mathbf{f}_{mcol}(\mathbf{x}) &= \\ &= \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} [1 \cdot \mathbf{e}_{lu}^i] + \sum_{j=1}^{k_{ch}} [e^{i\varphi_{ch}^j} \cdot \mathbf{E}_{ch}^j] \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} [f_{lu}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i] + \sum_{j=1}^{k_{ch}} [\mathbf{f}_{ch}^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j] \right) = \\ &= \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} f_{lu}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} [e^{i\varphi_{ch}^j} \mathbf{f}_{ch}^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j] \right) \quad (4.7) \end{aligned}$$

изменяет только мультицветность исходного изображения. Их множество формирует группу мультицветных преобразований

$$\begin{aligned} \mathbf{MHog}\left(\mathbf{Alg}_k^{\text{Vis}}\left(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{k-1}\right)\right) = \\ = \left\{ \left(1, 1, \dots, 1; e^{i\varphi_{ch}^1}, e^{i\varphi_{ch}^2}, \dots, e^{i\varphi_{ch}^{k_{ch}}}\right) \middle| e^{i\varphi_{ch}^1}, e^{i\varphi_{ch}^2}, \dots, e^{i\varphi_{ch}^{k_{ch}}} \in \mathbf{C} \right\}. \end{aligned}$$

2) Пусть теперь  $\mathcal{M} = \left(1, \dots, 1; b_{ch}^1, \dots, b_{ch}^{k_{ch}}\right)$ ,  $b_{ch}^1, \dots, b_{ch}^{k_{ch}} > 0$ , тогда следующее преобразование исходного изображения

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{mcol}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{M} \cdot \mathbf{f}_{mcol}(\mathbf{x}) = \\ = \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} \left[1 \cdot \mathbf{e}_{lu}^i\right] + \sum_{j=1}^{k_{ch}} \left[b_{ch}^j \cdot \mathbf{E}_{ch}^j\right] \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} \left[f_{lu}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i\right] + \sum_{j=1}^{k_{ch}} \left[\mathbf{f}_{ch}^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j\right] \right) = \quad (4.8) \\ = \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} f_{lu}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} \left[b_{ch}^j \mathbf{f}_{ch}^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j\right] \right) \end{aligned}$$

изменяет только мультинасыщенность исходного изображения. Их множество формирует группу преобразований мультинасыщенности

$$\begin{aligned} \mathbf{MSdg}\left(\mathbf{Alg}_k^{\text{Vis}}\left(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{k-1}\right)\right) = \\ = \left\{ \left(1, 1, \dots, 1; b_{ch}^1, b_{ch}^2, \dots, b_{ch}^{k_{ch}}\right) \middle| b_{ch}^1, b_{ch}^2, \dots, b_{ch}^{k_{ch}} \in \mathbf{R}^+ \right\}. \end{aligned}$$

3) Если же  $\mathcal{M} = \left(a_{lu}^1, \dots, a_{lu}^{k_{lu}}; b_{ch}^1 e^{i\varphi_{ch}^1}, \dots, b_{ch}^{k_{ch}} e^{i\varphi_{ch}^{k_{ch}}}\right)$ , то преобразование

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{mcol}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathcal{M} \cdot \mathbf{f}_{mcol}(\mathbf{x}) = \\ = \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} \left[a_{lu}^i \cdot \mathbf{e}_{lu}^i\right] + \sum_{j=1}^{k_{ch}} \left[b_{ch}^j e^{i\varphi_{ch}^j} \cdot \mathbf{E}_{ch}^j\right] \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} \left[f_{lu}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i\right] + \sum_{j=1}^{k_{ch}} \left[\mathbf{f}_{ch}^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j\right] \right) = \quad (4.9) \\ = \left( \sum_{i=1}^{k_{lu}} a_{lu}^i f_{lu}^i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}_{lu}^i + \sum_{j=1}^{k_{ch}} \left[b_{ch}^j e^{i\varphi_{ch}^j} \mathbf{f}_{ch}^j(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}_{ch}^j\right] \right) \end{aligned}$$

меняет у исходного изображения и мультицветность и мультинасыщенность одновременно. Все множество подобных преобразований формирует мультихроматическую группу:

$$\begin{aligned} \mathbf{MChg}\left(\mathcal{A}_k\left(\mathbf{R}|1, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{k-1}\right)\right) = \\ = \left\{ \left(a_{lu}^1, \dots, a_{lu}^{k_{lu}}; b_{ch}^1 e^{i\varphi_{ch}^1}, \dots, b_{ch}^{k_{ch}} e^{i\varphi_{ch}^{k_{ch}}}\right) \left( \middle| a_{lu}^1, \dots, a_{lu}^{k_{lu}}; b_{ch}^1, \dots, b_{ch}^{k_{ch}} \in \mathbf{R}^+ \right) \& \left( e^{i\varphi_{ch}^1}, \dots, e^{i\varphi_{ch}^{k_{ch}}} \in \mathbf{C} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Итак, если  $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$  – исходное изображение, а  $(a_{lu}^1, \dots, a_{lu}^{k_{lu}}; \mathbf{z}_{ch}^1, \dots, \mathbf{z}_{ch}^{k_{ch}}) \mathbf{f}_{(\lambda, \mathbf{Q}, \bar{\mathbf{p}})}(\bar{\mathbf{x}})$

- его искаженная версия, то можно написать, что

$$\begin{aligned} & (a_{lu}^1, \dots, a_{lu}^{k_{lu}}; \mathbf{z}_{ch}^1, \dots, \mathbf{z}_{ch}^{k_{ch}}) \mathbf{f}_{(\lambda, \mathbf{Q}, \bar{\mathbf{p}})}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathcal{M} \cdot \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}') = \\ & = (a_{lu}^1 f_{lu}^1(\bar{\mathbf{x}}'), \dots, a_{lu}^{k_{lu}} f_{lu}^{k_{lu}}(\bar{\mathbf{x}}'); \mathbf{z}_{ch}^1 \mathbf{f}_{ch}^1(\bar{\mathbf{x}}'), \dots, \mathbf{z}_{ch}^{k_{ch}} \mathbf{f}_{ch}^{k_{ch}}(\bar{\mathbf{x}}')), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где  $\bar{\mathbf{x}}' = e^{\bar{u}\varphi/2} \cdot \bar{\mathbf{x}} \cdot e^{-\bar{u}\varphi/2} + \bar{\mathbf{p}}$ ,  $\mathcal{M} = (a_{lu}^1, \dots, a_{lu}^{k_{lu}}; \mathbf{z}_{ch}^1, \dots, \mathbf{z}_{ch}^{k_{ch}})$ .

Мы предполагаем, что головной мозг может использовать гиперкомплексные алгебры для ментального изменения мульти-яркости и мульти-хроматичности многоканальных изображений, которые возникают в памяти мозга на так называемом «экране сознания», например, во время сна.



## Глава 5

# КЛИФФОРДОВСКИЕ МОДЕЛИ ГИПЕРСПЕКТРАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В главе описывается алгебра Клиффорда  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, B_1, B_2, \dots, B_m)$ . Эта алгебра является расширением полей реальных и комплексных чисел, а также кольца кватернионов до алгебр более высокой размерности. Она имеет  $2^m$  базисных элементов. Символы  $a_-, b_+, c_0$  (такие, что  $a_- + b_+ + c_0 = m$ ) определяют так называемую сигнатуру алгебры Клиффорда. Существует несколько способов понимания  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R})$  с абстрактной и конкретной точек зрения. В [51] можно найти пять различных (и эквивалентных) определений алгебры Клиффорда. Мы воспользуемся одним определением алгебры Клиффорда  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R})$  полезным для различных приложений.

Мы предполагаем, что мозг в визуальном отделе ( $VC = \text{visual cortex}$ ) оперирует гиперкомплексными числами алгебры Клиффорда в процессе вычисления гиперкомплексных инвариантов, когда пытается распознать приходящие с ретины изображения. Эти алгебры обобщают алгебры комплексных чисел, алгебры кватернионов. Для распознавания  $2-D$ ,  $3-D$  и  $m-D$  гиперспектральных изображений мы превращаем перцептуальные пространства в алгебры Клиффорда и называем их перцептуальными алгебрами.

При таком подходе изменения в перцептуальном пространстве, например, такие как гиперспектральные преобразования, могут трактоваться

как действия спинорных групп преобразований. Мы предполагаем, что мозг человека способен использовать гиперспектральные спиноры для преобразований изображений в цветных ментальных клипах (например, во сне) на так называемом экране подсознания [1-4].

В этой главе мы разрабатываем методы обработки гиперспектральных изображений. Термин гиперспектральные изображения используется для изображений с более чем одной компонентой. Они представляют собой пачку изображений объекта снятого в  $K$  различных спектральных диапазонах  $f_{\lambda_1}(\mathbf{x}), f_{\lambda_2}(\mathbf{x}), \dots, f_{\lambda_K}(\mathbf{x})$  на различных оптических длинах волн  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$ , называемых спектральными каналами. Такие изображения могут обсуждаться как  $n-D$   $K$ -компонентные функции:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_K(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{V}^K, \quad (5.1)$$

которые принимают значения в  $K-D$  перцептуальном пространстве  $\mathbf{V}^K$ , где  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ ,  $n = 2, 3, \dots$

Для обработки и распознавания 2-D, 3-D и  $n-D$   $K$ -канальных изображений мы превращаем перцептуальные области изображений в соответствующие гиперкомплексные алгебры. В этой работе наш подход к подобным изображениям основан на некоммутативных алгебрах Клиффорда. В алгебро-геометрическом подходе каждый, мультисканальный пиксель рассматривается не как  $K-D$  вектор, а как  $K-D$  гиперкомплексное число.

Многоканальные  $n-D$  изображения  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_K(\mathbf{x})) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{V}^K$  обладают двумя атрибутами:  $n-D$  физическим  $\mathbf{R}^n$  и  $K-D$  перцептуальным  $\mathbf{V}^K$  пространствами. Мы предполагаем, что мозг оперирует гиперкомплексными числами, когда распознает наблюдаемые изображения, вычисляя гиперкомплексно-значные инварианты распознаваемого изображения.

Для того чтобы оперировать  $n-D$  пространственными векторами  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$  и  $K-D$  перцептуальными пикселями  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_K) \in \mathbf{V}^K$

как числами, мы погружаем пространства  $\mathbf{R}^n$  и  $\mathbf{V}^K$  в пространственную  $Alg_{2^n}^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R}|1, I_1, \dots, I_n)$  и перцептуальную  $Alg_{2^K}^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R}|1, J_1, \dots, J_K)$  алгебры Клиффорда, соответственно:

$$\mathbf{R}^n \rightarrow Alg_{2^n}^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R}|1, I_1, \dots, I_n), \quad \mathbf{V}^K \rightarrow Alg_{2^K}^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R}|1, J_1, \dots, J_K). \quad (5.2)$$

где  $I_1, \dots, I_n$  и  $J_1, \dots, J_K$  - пространственные и перцептуальные мнимые единицы. Они называются пространственной и перцептуальной алгебрами [9-13].

Для обозначения обеих алгебр мы используем следующий символ:

$$Alg_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R}|1, B_1, \dots, B_m) = \begin{cases} Alg_{2^n}^{Sp(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R}|1, I_1, \dots, I_n), & \text{если } m = n, B_0 = I_0 \equiv 1, \dots, B_n = I_n, \\ Alg_{2^K}^{Vis(u_-, v_+, w_0)}(\mathbf{R}|1, J_1, \dots, J_K), & \text{если } m = K, B_0 = J_0 \equiv 1, \dots, B_K = J_K, \end{cases}$$

где  $B_1, \dots, B_m$  пространственные или перцептуальные мнимые единицы в зависимости от того, о какой алгебре идет речь.

## 5.1. Псевдо-Евклидовы пространства

**5.1.1. Определение псевдо-Евклидовых пространств.** Пусть  $\{B_i\}_{i=1}^m$  - суть множество из  $m$  гипермнимых единиц, обладающих следующим свойством:

$$B_i^2 = \begin{cases} \eta_i^- = -1, & \text{для } i = 1, 2, \dots, a_-, \\ \eta_i^+ = +1, & \text{для } i = a_- + 1, a_- + 2, \dots, a_- + b_+, \\ \eta_i^0 = 0, & \text{для } i = a_- + b_+ + 1, \dots, a_- + b_+ + c_0 = m, \end{cases}$$

и  $B_i B_j = -B_j B_i$ . Тройка  $(a_-, b_+, c_0)_{alg}$  называются алгебраической сигнатурой множества гипермнимых единиц. Очевидно, что это множество делится на три подмножества:

$$\{B_i\}_{i=1}^m = \{B_i^-\}_{i=1}^{a_-} \cup \{B_i^+\}_{i=a_-+1}^{a_-+b_+} \cup \{B_i^0\}_{i=a_-+b_++1}^{a_-+b_++c_0},$$

где  $(B_i^-)^2 = -1$ ,  $(B_i^+)^2 = +1$ ,  $(B_i^0)^2 = 0$ . Пусть по определению  $\overline{B_i} = -B_i$ , тогда

- 1)  $\|B_i\|^2 = \overline{B_i}B_i = -B_i^2 = -\eta_i^- = +1$ , для  $1 \leq i \leq a_+$ ,
- 2)  $\|B_i\|^2 = \overline{B_i}B_i = -B_i^2 = -\eta_i^+ = -1$ , для  $a_+ + 1 \leq i \leq a_+ + b_-$ ,
- 3)  $\|B_i\|^2 = \overline{B_i}B_i = -B_i^2 = -\eta_i^0 = 0$ , для  $a_+ + b_- + 1 \leq i \leq a_+ + b_- + c_0 = m$ .

где  $a_+ = -a_-$ ,  $b_- = -b_+$ . В математике и теоретической физике псевдо-Евклидово пространство  $\mathbf{E}_{(a_+, b_-, c_0)}^m(\mathbf{R})$  - суть  $m$ -D space, натянутое на

ортонормированный базис из  $m$  гипермнимых орт  $\{B_i \mathbf{e}_i\}_{i=1}^m : \mathbf{E}_{(a_+, b_-, c_0)}^m(\mathbf{R}) =$   
 $= \left\{ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m x_i (B_i \mathbf{e}_i) \mid x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbf{R} \right\}$ , обладающее квадратичной формой

$$Q_{(a_+, b_-, c_0)}(\mathbf{x}) = \langle \overline{\mathbf{x}} | \mathbf{x} \rangle_{(a_+, b_-, c_0)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{a_+} x_i^2 \|B_i\|^2 + \sum_{i=a_++1}^{a_++b_-} x_i^2 \|B_i\|^2 + \sum_{i=a_++b_-+1}^m x_i^2 \|B_i\|^2 = \sum_{i=1}^{a_+} x_i^2 - \sum_{i=a_++1}^{a_++b_-} x_i^2,$$

которая называется магнитудой вектора  $\mathbf{x}$ . Здесь тройка  $s_{met} = (a_+, b_-, c_0)$  называется метрической сигнатурой пространства  $\mathbf{E}_{(a_+, b_-, c_0)}^m(\mathbf{R})$ . Наряду с метрической сигнатурой  $s_{met} = (a_+, b_-, c_0)$  понадобится также алгебраическая сигнатура  $(a_-, b_+, c_0)_{alg}$ . Очевидно, что

$$(a_+, b_-, c_0)_{met} = (\underbrace{+1, +1, \dots, +1}_{a_+}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{b_-}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{c_0}),$$

$$(a_-, b_+, c_0)_{alg} = (\underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{a_-}, \underbrace{+1, +1, \dots, +1}_{b_+}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{c_0}).$$

Мы называем  $m$ -D пространство  $\mathbf{E}_{(a_+, b_-, c_0)}^m(\mathbf{R})$  «малым» пространством, а мнимые единицы  $\{B_i \mathbf{e}_i\}_{i=1}^m$  - исходными единицами, где метрическая сигнатура  $s_{met} = (a_+, b_-, c_0)$  описывает распределение  $+1$ ,  $-1$  и  $0$  в сумме

$\sum_{i=1}^m x_i^2 \|B_i\|^2$ . Пространство типа  $\mathbf{E}_{m_+, 0, 0}^m(\mathbf{R})$  называется евклидовым, а

$\mathbf{E}_{0, m_-, 0}^m(\mathbf{R})$  - анти-евклидовым, в то время как пространства  $\mathbf{E}_{1_+, (m-1)_-, 0}^m(\mathbf{R})$

называются (анти-) лоренцевым. Если  $w = 0$ , то мы имеем псевдо-Риманову

(или псевдо Евклидову)  $\mathbf{E}_{(a_+, b_-, 0)}^m(\mathbf{R})$  геометрию. Если  $w_0 \neq 0$ , то в результате

получаем псевдо-Галлилеевскую геометрию с вырожденной метрикой.

В частности, когда  $m = n$  и  $B_1 = I_1, B_2 = I_2, \dots, B_n = I_n$ , то мы имеем  $n$ - $D$  физическое псевдометрическое пространство

$$\mathbf{E}_{(a_+, b_-, c_0)}^m(\mathbf{R}) \rightarrow {}^{Sp} \mathbf{E}_{(p_+, q_-, r_0)}^n(\mathbf{R}) = \left\langle \left\langle \mathbf{R}^n, \mathcal{Q}_{(p_+, q_-, r_0)} \right\rangle \right\rangle,$$

где  $p_+ = a_+, q_- = b_-, r_0 = c_0$ . Если же  $m = K$ , а  $B_1 = J_1, B_2 = J_2, \dots, B_K = J_K$ , то мы имеем дело с визуальным (перцептуальным) псевдометрическим пространством  $\mathbf{E}_{(a_+, b_-, c_0)}^m(\mathbf{R}) \rightarrow {}^{Vis} \mathbf{E}_{(u_+, v_-, w_0)}^K(\mathbf{R}) = \left\langle \left\langle \mathbf{R}^K, \mathcal{Q}_{(u_+, v_-, w_0)} \right\rangle \right\rangle$ , где  $p_+ = a_+, q_- = b_-, r_0 = c_0$ . В общем случае пространственное псевдо-метрическое пространство  ${}^{Sp} \mathbf{E}_{(p_+, q_-, r_0)}^n(\mathbf{R})$ , где  $p_+ + q_- + r_0 = n$ , и визуальное псевдо-метрическое пространство  ${}^{Vis} \mathbf{E}_{(u_+, v_-, w_0)}^K(\mathbf{R})$ , где  $u_+ + v_- + w_0 = K$ , имеют различные сигнатуры  $(u_+, v_-, w_0) \neq (p_+, q_-, r_0)$ , i.e.,  $\mathcal{Q}_{(p_+, q_-, r_0)} \neq \mathcal{Q}_{(u_+, v_-, w_0)}$ .

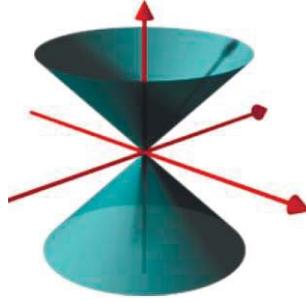
Свойства  $m$ - $D$  пространства  $\mathbf{E}_{(a_+, b_-, c_0)}^m(\mathbf{R})$  существенно отличаются от свойств евклидова пространства  $\mathbf{E}_{(m, 0, 0)}^m(\mathbf{R})$ . В силу чего перед нами стоит задача изучить свойства этого пространства.

**5.1.2. Свойства псевдо-Евклидовых пространств.** Говорят, что вектор  $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_{(a_+, b_-, c_0)}^m(\mathbf{R})$  является пространственно подобным, если  $\mathcal{Q}_{(a_+, b_-, c_0)}(\mathbf{x}) > 0$ , время подобным, если  $\mathcal{Q}_{(a_+, b_-, c_0)}(\mathbf{x}) < 0$ , свето-подобным, если  $\mathcal{Q}_{(a_+, b_-, c_0)}(\mathbf{x}) = 0$ .

Если квадратичная форма  $\mathcal{Q}_{(a_+, b_-, 0)}(\mathbf{x})$  неположительна, то псевдо-Евклидово пространство  $\mathbf{E}_{(a_+, b_-)}^m(\mathbf{R}) := \mathbf{E}_{(a_+, b_-, 0)}^m(\mathbf{R})$  имеет конус, состоящий из нуль-векторов (см. рис. 5.1):  $\mathbf{Cone}\{\mathbf{E}_{(a_+, b_-)}^m(\mathbf{R})\} := \{\mathbf{x} \mid \mathcal{Q}_{(a_+, b_-, 0)}(\mathbf{x}) = 0\}$ .

В псевдо-Евклидовом пространстве изотропный конус разделяет два открытых множества, для которых  $\mathcal{Q}_{(a_+, b_-, 0)}(\mathbf{x}) > 0$  и  $\mathcal{Q}_{(a_+, b_-, 0)}(\mathbf{x}) < 0$ . Для дальнейшего удобно собрать вместе в три множества векторы с положительной, отрицательной и нулевой магнитудами:

$$\begin{aligned}\mathbf{Pos}\left\{\mathbf{E}_{(a_+,b_-,c_0)}^m(\mathbf{R})\right\} &= {}^+\mathbf{E}_{(a_+,b_-,c_0)}^m(\mathbf{R}) := \left\{\mathbf{x} \mid \left(\mathbf{x} \in \mathbf{E}_{(a_+,b_-,c_0)}^m(\mathbf{R})\right) \& \left(Q_{(a_+,b_-,c_0)}(\mathbf{x}) > 0\right)\right\}, \\ \mathbf{Neg}\left\{\mathbf{E}_{(a_+,b_-,c_0)}^m(\mathbf{R})\right\} &= {}^-\mathbf{E}_{(a_+,b_-,c_0)}^m(\mathbf{R}) := \left\{\mathbf{x} \mid \left(\mathbf{x} \in \mathbf{E}_{(a_+,b_-,c_0)}^m(\mathbf{R})\right) \& \left(Q_{(a_+,b_-,c_0)}(\mathbf{x}) > 0\right)\right\}, \\ \mathbf{Null}\left\{\mathbf{E}_{(a_+,b_-,c_0)}^m(\mathbf{R})\right\} &= {}^0\mathbf{E}_{(a_+,b_-,c_0)}^m(\mathbf{R}) := \left\{\mathbf{x} \mid \left(\mathbf{x} \in \mathbf{E}_{(a_+,b_-,c_0)}^m(\mathbf{R})\right) \& \left(Q_{(a_+,b_-,c_0)}(\mathbf{x}) = 0\right)\right\}.\end{aligned}$$



**Рис. 5.1.** Изотропный конус для  $n = 3$ .

**Пример 5.1.** Если  $c_0 = 0$  and  $b_- \geq 2$ , то множество  $\mathbf{E}_{(a_+,b_-,0)}^m(\mathbf{R})$  является связным. Если  $c_0 = 0$  и  $a_+ = 1$ , то оно состоит из двух связных частей:

$$\begin{aligned}\mathbf{Pos}\left\{\mathbf{E}_{(1,m-1,0)}^m(\mathbf{R})\right\} &= \mathbf{Pos}_{x_1 > 0}\left\{\mathbf{E}_{(1,m-1,0)}^m(\mathbf{R})\right\} \cup \mathbf{Pos}_{x_1 < 0}\left\{\mathbf{E}_{(1,m-1,0)}^m(\mathbf{R})\right\} = \\ &= {}^+\mathbf{Pos}_{x_1 > 0}\left\{\mathbf{E}_{(1,m-1,0)}^m(\mathbf{R})\right\} \cup {}^-\mathbf{Pos}_{x_1 < 0}\left\{\mathbf{E}_{(1,m-1,0)}^m(\mathbf{R})\right\},\end{aligned}$$

одна из которых связана с  $x_1 > 0$  а другая с  $x_1 < 0$ . Если же  $c_0 = 0$  и  $b_- = 1$ , то оно состоит из других двух частей:

$$\begin{aligned}\mathbf{Neg}\left\{\mathbf{E}_{(m-1,1,0)}^m(\mathbf{R})\right\} &= \mathbf{Neg}_{x_n > 0}\left\{\mathbf{E}_{(m-1,1,0)}^m(\mathbf{R})\right\} \cup \mathbf{Neg}_{x_n < 0}\left\{\mathbf{E}_{(m-1,1,0)}^m(\mathbf{R})\right\} = \\ &= {}^+\mathbf{Neg}_{x_n > 0}\left\{\mathbf{E}_{(m-1,1,0)}^m(\mathbf{R})\right\} \cup {}^-\mathbf{Neg}_{x_n < 0}\left\{\mathbf{E}_{(m-1,1,0)}^m(\mathbf{R})\right\},\end{aligned}$$

одна из которых связана с  $x_n > 0$  а другая с  $x_n < 0$ . ■

Рассмотрим теперь пространство  $\mathbf{E}_{(a_+,b_-)}^m(\mathbf{R}) := \mathbf{E}_{(a_+,b_-,0)}^m(\mathbf{R})$ . Заметим, что Евклидово пространство  $\mathbf{E}^m(\mathbf{R}) = \mathbf{E}_{(m,0,0)}^m(\mathbf{R})$  имеет единичную сферу, псевдо-Евклидово же пространство  $\mathbf{E}_{(v_+,u_-)}^m(\mathbf{R})$  обладает двумя гиперповерхностями

$$\mathbf{RS}_{(a_+,b_-)}^{m-1}(+1) := \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_{(a_+,b_-)}^m(\mathbf{R}) \mid Q_{(a_+,b_-)}(\mathbf{x}) = +1\right\} \subset \mathbf{Pos}\left\{\mathbf{E}_{(a_+,b_-)}^m(\mathbf{R})\right\}, \quad v_+ = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$\mathbf{HS}_{(a_+,b_-)}^{m-1}(-1) := \left\{\mathbf{x} \in \mathbf{E}_{(a_+,b_-)}^m(\mathbf{R}) \mid Q_{(a_+,b_-)}(\mathbf{x}) = -1\right\} \subset \mathbf{Neg}\left\{\mathbf{E}_{(a_+,b_-)}^m(\mathbf{R})\right\}, \quad v_+ = 1, 2, \dots, m.$$

радиусов  $+1$  и  $-1$ , соответственно, что дает два ряда гиперсфер:

$$\mathbf{RS}_{m,0}^{m-1}(+1), \mathbf{RS}_{(m-1,1)}^{m-1}(+1), \mathbf{RS}_{(m-2,2)}^{m-1}(+1), \dots, \mathbf{RS}_{(2,m-2)}^{m-1}(+1), \mathbf{RS}_{(1,m-1)}^{m-1}(+1), \quad \circ$$

$$\circ \quad \mathbf{HS}_{(m-1,1)}^{m-1}(-1), \mathbf{HS}_{(m-2,2)}^{m-1}(-1), \dots, \mathbf{HS}_{(2,m-2)}^{m-1}(+1), \mathbf{HS}_{(1,m-1)}^{m-1}(-1), \mathbf{HS}_{(0,m)}^{m-1}(-1).$$

Например, для  $m=3$  и  $m=4$  мы имеем

$$\mathbf{RS}_{(3,0)}^2(+1), \mathbf{RS}_{(2,1)}^2(+1), \mathbf{RS}_{(1,2)}^2(+1), \quad \circ$$

$$\circ \quad \mathbf{HS}_{(2,1)}^2(-1), \mathbf{HS}_{(1,2)}^2(-1), \mathbf{HS}_{(0,3)}^2(-1),$$

$$\mathbf{RS}_{(4,0)}^3(+1), \mathbf{RS}_{(4,1)}^3(+1), \mathbf{RS}_{(4,2)}^3(+1), \mathbf{RS}_{(4,3)}^3(+1) \quad \circ$$

$$\circ \quad \mathbf{HS}_{(3,1)}^3(-1), \mathbf{HS}_{(2,2)}^3(-1), \mathbf{HS}_{(1,3)}^3(-1), \mathbf{HS}_{(0,4)}^3(-1).$$

Подобные гиперповерхности называются псевдо-Римановыми сферами

$$\left\{ \mathbf{RS}_{(a_+, b_-)}^{m-1}(+1) \right\}_{b_-=0}^{m-1} \quad \text{и} \quad \text{псевдо-гиперболическими сферами} \quad \left\{ \mathbf{HS}_{(a_+, b_-)}^{m-1}(-1) \right\}_{b_-=1}^m,$$

соответственно. Гиперболические сферы  $\mathbf{HS}_{(m-1,1)}^{m-1}(+1)$  состоят из двух связанных компонент  $\mathbf{HS}_{(m-1,1)}^{m-1}(+1) = {}^+ \mathbf{HS}_{(m-1,1)}^{m-1}(+1) \cup {}^- \mathbf{HS}_{(m-1,1)}^{m-1}(+1)$ , каждая из которых диффеоморфна  $\mathbf{E}^{m-1}(\mathbf{R})$ :

$${}^+ \mathbf{HS}_{(m-1,1)}^{m-1}(-1) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_{(m-1,1)}^m(\mathbf{R}) \mid (\mathcal{Q}_{(m-1,1)}(\mathbf{x}) = -1) \& (x_m > 0) \right\} \approx {}^+ \mathbf{E}^{m-1}(\mathbf{R}),$$

$${}^- \mathbf{HS}_{(m-1,1)}^{m-1}(-1) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{E}_{(m-1,1)}^m(\mathbf{R}) \mid (\mathcal{Q}_{(m-1,1)}(\mathbf{x}) = -1) \& (x_m < 0) \right\} \approx {}^- \mathbf{E}^{m-1}(\mathbf{R}).$$

Гиперболическое пространство  $\mathbf{HS}_{(m-1,1)}^{m-1}(-1)$  является гиперболоидной ветвью, которая может рассматриваться как сфера радиуса  $i = \sqrt{-1}$ . Очевидно,

$$\mathbf{Pos} \left\{ \mathbf{E}_{(a_+, b_-)}^m(\mathbf{R}) \right\} = \bigcup_{r>0} r \cdot \mathbf{RS}_{(a_+, b_-)}^{m-1}(+1), \quad \mathbf{Neg} \left\{ \mathbf{E}_{(v_+, u_-)}^m(\mathbf{R}) \right\} = \bigcup_{r>0} r \cdot \mathbf{HS}_{(a_+, b_-)}^{m-1}(-1).$$

Псевдо-Римановы сферы  $\left\{ \mathbf{RS}_{(a_+, b_-)}^{m-1}(+1) \right\}_{b_-=0}^{m-1}$  диффеоморфны  $\left\{ \mathbf{E}^{b_-}(\mathbf{R}) \times \mathbf{S}^{m-1-b_-} \right\}_{b_-=0}^{m-1}$ :

$$\text{diff} \left\{ \mathbf{RS}_{(a_+, b_-)}^{m-1}(+1) \right\} = \mathbf{E}^{b_-}(\mathbf{R}) \times \mathbf{S}^{m-1-b_-}, \quad b_- = 0, 1, \dots, m-1$$

и псевдогиперболические пространства  $\left\{ \mathbf{HS}_{(a_+, b_-)}^{m-1}(-1) \right\}_{b_-=1}^m$  гомеоморфны

$$\mathbf{S}^{a_-} \times \mathbf{E}^{m-a_-}(\mathbf{R}): \text{diff} \left\{ \mathbf{HS}_{(a_+, b_-)}^{m-1}(-1) \right\} = \mathbf{S}^{b_-} \times \mathbf{E}^{m-b_-}(\mathbf{R}), \quad b_- = 1, 2, \dots, m,$$

где  $\mathbf{S}^m$  - Евклидова сфера единичного радиуса размерности  $m$ . Множество

$\mathbf{RS}_{(m,0)}^{m-1}(+1) \approx \mathbf{S}^{m-1}$  как раз является стандартной сферой в Евклидовом

пространстве  $\mathbf{E}_{(m,0)}^m(\mathbf{R}) \equiv \mathbf{E}^m(\mathbf{R})$ . По определению  $\mathbf{E}^0$  - суть одиночная точка, и по определению будем считать, что  $\mathbf{S}^0$  состоит из двух точек. Итак,

$$\begin{aligned} \mathbf{RS}_{(a_+, b_-)}^{m-1}(+1) &\approx \mathbf{S}^{m-1-b_-} \times \mathbf{E}^{b_-}(\mathbf{R}), & \mathbf{HS}_{(a_+, b_-)}^{m-1}(-1) &\approx \mathbf{S}^{b_- - 1} \times \mathbf{E}^{m-b_-}(\mathbf{R}), \\ \mathbf{HS}_{(a_+, b_-)}^{m-1}(-1) &\approx \mathbf{RS}_{m-a_+, m-b_-}^{m-1}(+1) \approx \mathbf{S}^{b_- - 1} \times \mathbf{E}^{m-b_-}(\mathbf{R}) \approx \mathbf{E}^{m-b_-}(\mathbf{R}) \times \mathbf{S}^{b_- - 1}, & b_- &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

**5.1.3 Пространства Клиффорда.** Будем считать, что «малое»  $m$ -D пространство  $\mathbf{E}_{(a_+, b_-, c_0)}^m(\mathbf{R})$  натянуто на  $m$  антикоммутирующих ( $B_i B_j = -B_j B_i$ ) гипермнимых единиц  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Теперь построим большое гиперкомплексное  $2^m$ -D пространство  $\mathbf{R}^{2^m}$  в виде прямой суммы подпространств следующих размерностей  $C_m^0, C_m^1, C_m^2, \dots, C_m^{m-1}, C_m^m$ :  $\mathbf{R}^{2^m} = \mathbf{R}C_m^0 \oplus \mathbf{R}C_m^1 \oplus \mathbf{R}C_m^2 \oplus \dots \oplus \mathbf{R}C_m^{m-1} \oplus \mathbf{R}C_m^m$ , где подпространства  $\mathbf{R}^{C_m^s}$ ,  $s = 0, 1, \dots, m$  - натянуты на  $s$ -кратные произведения гипермнимых единиц  $B_{k_1} B_{k_2} \dots B_{k_s}$ ,  $k_1 < k_2 < \dots < k_s$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{C_m^0} &= \{x_0 B_0 \mid x_0 \in \mathbf{R}\}, \\ \mathbf{R}^{C_m^1} &= \{x_1 B_1 + x_2 B_2 + \dots + x_m B_m \mid x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbf{R}\}, \\ \mathbf{R}^{C_m^2} &= \{x_{1,2} B_1 B_2 + x_{1,3} B_1 B_3 + \dots + x_{t-1,t} B_{m-1} B_m \mid x_{1,2}, \dots, x_{m-1,m} \in \mathbf{R}\}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \mathbf{R}^{C_m^m} &= \{x_{1,2,\dots,m} B_1 B_2 \dots B_m \mid x_{1,2,3,\dots,m} \in \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

**Пример 5.2.** Возьмем три 1-, 2-, 3-D малых пространства  $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^1, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ . Соответствующие им “большие” подпространство суть

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{2^1} &= \mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^1 = \mathbf{R} \cdot B_0 + \mathbf{R} \cdot B_1, \\ \mathbf{R}^{2^2} &= \mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^2 \oplus \mathbf{R}^1 = \mathbf{R} \cdot B_0 + \underbrace{[\mathbf{R} \cdot B_1 + \mathbf{R} \cdot B_2]}_{\mathbf{R}^2} + \mathbf{R} \cdot B_1 B_2, \\ \mathbf{R}^{2^3} &= \mathbf{R}^8 = \mathbf{R}^1 \oplus \mathbf{R}^3 \oplus \mathbf{R}^3 \oplus \mathbf{R}^1 = \mathbf{R} \cdot B_0 + \underbrace{[\mathbf{R} \cdot B_1 + \mathbf{R} \cdot B_2 + \mathbf{R} \cdot B_3]}_{\mathbf{R}^3} \oplus \\ &\quad \oplus \underbrace{[\mathbf{R} \cdot B_1 B_2 + \mathbf{R} \cdot B_1 B_3 + \mathbf{R} \cdot B_2 B_3]}_{\mathbf{R}^3} \oplus \mathbf{R} \cdot B_1 B_2 B_3. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Каждый элемент из  $\mathbf{R}^{2^m}$  имеет следующее представление. Пусть  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathfrak{B}_2^m$  – произвольный  $m$ -битовый вектор, где  $b_i \in \mathfrak{B}_2 = \{0, 1\}$  и  $\mathbf{B}_2^m$  –  $m$ -D Булеан. Обозначим символом  $\mathbf{Wt}(\mathbf{b}) = b_1 + b_2 + \dots + b_m$  вес элемента  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathfrak{B}_2^m$  и пусть  $\mathbf{Wt}_2(\mathbf{b}) = \mathbf{Wt}(\mathbf{b}) \bmod 2 = (b_1 \oplus b_2 \oplus \dots \oplus b_m)$ , где  $\oplus$  – сложение по модулю 2. Введем в рассмотрение  $2^m$  гипермнимых единиц  $\mathbf{B}^{\mathbf{b}} := B_1^{b_1} B_2^{b_2} \dots B_m^{b_m}$ , где  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathfrak{B}_2^m$ , которые формируют базис  $2^m$ -D пространства  $\mathbf{R}^{2^m}$  и называются его полным множеством мнимостей. Если  $\mathbf{Wt}(\mathbf{b}) = k$ , то говорят, что мнимые единицы  $\mathbf{B}^{\mathbf{b}} := B_1^{b_1} B_2^{b_2} \dots B_m^{b_m}$  имеют вес  $k$ , т.е.  $\mathbf{Wt}(\mathbf{B}^{\mathbf{b}}) = \mathbf{Wt}(\mathbf{b}) = k$ . Мы полагаем, что  $\mathbf{B}^{\mathbf{0}} := B_1^0 B_2^0 \dots B_m^0 = 1$ . Для каждой  $\mathbf{s}_{alg} = (a_-, b_+, c_0)$  и  $\mathbf{s}_{met} = (a_+, b_-, c_0)$  из сигнатур мы конструируем «большое»  $2^m$ -D пространство  $\mathbf{E}_S^{2^m}$ , с двумя сигнатурами  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{alg} = (A_-, B_+, C_0)$  и  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{met} = (A_+, B_-, C_0)$ , натянутое на  $2^m$  мнимых единиц  $\mathbf{B}^{\mathbf{b}}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_S^{2^m}(\mathbf{R}) &:= \left\{ \mathcal{X} \left| \mathcal{X} = \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m} x_{\mathbf{b}} \mathbf{J}^{\mathbf{b}} = \sum_{k=0}^m \sum_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=k} x_{\mathbf{b}} \mathbf{J}^{\mathbf{b}} \right. \right\} = \sum_{k=1}^m \oplus \mathbf{Span}_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=k} \{ \mathbf{J}^{\mathbf{b}} \} = \\ &= \mathbf{Span}_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=0} \{ \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \} \dot{\oplus} \mathbf{Span}_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=1} \{ \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \} \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \mathbf{Span}_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=m} \{ \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \} = \\ &= \left\langle \mathbf{E}_S^{C_0^0}(\mathbf{R}) \right\rangle \dot{\oplus} \left\langle \mathbf{E}_S^{C_1^1}(\mathbf{R}) \right\rangle \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} \left\langle \mathbf{E}_S^{C_m^m}(\mathbf{R}) \right\rangle, \end{aligned} \quad (5.3)$$

с пока еще неизвестными сигнатурами  $\mathbf{S}_{alg}$  и  $\mathbf{S}_{met}$ , где  $\dot{\oplus}$  – суть символ прямой векторной суммы. Заметим, что сигнатуры  $\mathbf{S}_{alg}$  и  $\mathbf{S}_{met}$  пространства  $\mathbf{E}_S^{2^m}(\mathbf{R})$  будут определены ниже. Итак,

$$\left\langle \mathbf{E}_S^{C_n^n}(\mathbf{R}) \right\rangle := \mathbf{Span}_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=n} \{ \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \} = \left\{ \left\langle \mathcal{X} \right\rangle_k \left| \left\langle \mathcal{X} \right\rangle_k = \sum_{\substack{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m \\ \mathbf{Wt}(\mathbf{b})=k}} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \right. \right\}.$$

Например,

$$\left\langle \mathbf{E}_S^{C_0^0}(\mathbf{R}) \right\rangle := \mathbf{Span}_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=0} \{ \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \} = \left\{ \left\langle \mathcal{X} \right\rangle_0 \left| \left\langle \mathcal{X} \right\rangle_0 = x_0 B_0 \right. \right\},$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{E}_S^{C^1}(\mathbf{R}) \rangle &:= \mathbf{Span}_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=1} \{ \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \} = \left\{ \langle \mathbf{x} \rangle_1 \left| \langle \mathbf{x} \rangle_1 = \sum_{\substack{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m \\ \mathbf{Wt}(\mathbf{b})=1}} x_{\mathbf{b}} \mathbf{J}^{\mathbf{b}} \right. \right\} = \\
&= \{ x_1 B_1 + x_2 B_2 + \dots + x_m B_m \mid x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbf{R} \}, \\
\langle \mathbf{E}_S^{C^2}(\mathbf{R}) \rangle &:= \mathbf{Span}_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=2} \{ \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \} = \left\{ \langle \mathbf{x} \rangle_2 \left| \langle \mathbf{x} \rangle_2 = \sum_{\substack{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m \\ \mathbf{Wt}(\mathbf{b})=2}} x_{\mathbf{b}} \mathbf{J}^{\mathbf{b}} \right. \right\} = \\
&= \{ x_{12} B_1 B_2 + x_{13} B_1 B_3 + \dots + x_{m-1,m} B_{m-1} B_m \mid x_{12}, x_{13}, \dots, x_{m-1,m} \in \mathbf{R} \}, \\
\langle \mathbf{E}_S^{C^3}(\mathbf{R}) \rangle &:= \mathbf{Span}_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=3} \{ \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \} = \left\{ \langle \mathbf{x} \rangle_3 \left| \langle \mathbf{x} \rangle_3 = \sum_{\substack{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m \\ \mathbf{Wt}(\mathbf{b})=3}} x_{\mathbf{b}} \mathbf{J}^{\mathbf{b}} \right. \right\} = \\
&= \{ x_{123} B_1 B_2 B_3 + x_{124} B_1 B_2 B_4 + \dots + x_{m-2,m-1,m} B_{m-2} B_{m-1} B_m \mid x_{123}, x_{124}, \dots, x_{m-2,m-1,m} \in \mathbf{R} \}, \\
&\dots\dots\dots \\
\langle \mathbf{E}_S^{C^m}(\mathbf{R}) \rangle &:= \mathbf{Span}_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=m} \{ \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \} = \left\{ \langle \mathbf{x} \rangle_m \left| \langle \mathbf{x} \rangle_m = \sum_{\substack{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m \\ \mathbf{Wt}(\mathbf{b})=m}} x_{\mathbf{b}} \mathbf{J}^{\mathbf{b}} \right. \right\} = \\
&= \{ x_{123\dots m} B_1 B_2 B_3 \dots B_m \mid x_{123\dots m} \in \mathbf{R} \}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что  $\mathbf{E}_S^{2^m}(\mathbf{R})$  содержит  $\mathbf{E}_{(a_+, b_-, c_0)}^m(\mathbf{R})$  как подпространство.

Итак, произвольный элемент  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2^m}$  может быть представлен в виде линейной комбинации полного множества мнимостей:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &:= \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = \sum_{s=0}^m \sum_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=s} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = \\
&= \sum_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=0} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} + \left( \sum_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=1} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} + \sum_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=2} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} + \dots + \sum_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=s} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} + \dots + \sum_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=m} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \right) = \\
&= \mathbf{Sc}(\mathbf{x}) + (\mathbf{Vec}^1(\mathbf{x}) + \mathbf{Vec}^2(\mathbf{x}) + \dots + \mathbf{Vec}^s(\mathbf{x}) + \dots + \mathbf{Vec}^m(\mathbf{x})) = \\
&= \mathbf{Sc}(\mathbf{x}) + \mathbf{Vec}(\mathbf{x}) = \mathbf{Sc}(\mathbf{x}) + \mathbf{Vec}^1(\mathbf{x}) + \mathbf{Vec}^{>1}(\mathbf{x}) = x_0 + \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^{>1},
\end{aligned}$$

где выражение  $\mathbf{Vec}^s(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=s} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \in \mathbf{R}^{C^s}$  ( $s=0,1,\dots,m$ ) называется  $s$ -векторной

частью вектора  $\mathbf{x}$ . В частности,  $a_0 = \mathbf{Sc}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})=0} a_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$ ,

$$\text{Vec}^1(x) = \bar{a} = \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b})=1} a_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}, \quad \text{Vec}(x) = x^{>1} = \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b})>1} a_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$$

-суть скалярная, векторная и супервекторная части Клиффордовского числа и

$$\text{Vec}(x) = (\text{Vec}^1(x) + \text{Vec}^2(x) + \dots + \text{Vec}^s(x) + \dots + \text{Vec}^m(x))$$

- есть его общая векторная часть. Далее  $\text{Vec}^1(x) = \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b})=1} a_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$  - чисто векторная

часть,  $\text{Vec}^2(x) = \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b})=2} a_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$  - бивекторная часть, ...,  $\text{Vec}^s(x) = \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b})=s} a_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$  -

суть  $s$ -векторная часть, ..., и  $\text{Vec}^m(x) = \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b})=m} a_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$  - есть  $m$ -векторная часть.

Если  $m=n$ , то  $\mathbf{S} = (P_+, Q_-, R_0)$  и  $B_1 = I_1, \dots, B_n = I_n$ , и мы получаем “big”  $2^n$ - $D$  физическое псевдо-метрическое пространство  ${}^{Sp} \mathbf{E}_{(P_+, Q_-, R_0)}^{2^n}(\mathbf{R})$ . Если же  $m=K$ , то  $\mathbf{S} = (U_+, V_-, W_0)$  и  $B_1 = J_1, \dots, \dots, B_K = J_K$ , то мы получаем “big” визуальное (перцептуальное) псевдо-метрическое пространство  ${}^{Vis} \mathbf{E}_{(U_+, V_-, W_0)}^{2^K}(\mathbf{R})$ .

## 5.2. Алгебры Клиффорда

**5.2.1. Определение алгебры Клиффорда.** Элементы вида  $x = \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$ ,

где  $x_{\mathbf{b}} \in \mathbf{R}, \forall \mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m$ , называются числами Клиффорда. Здесь  $\mathbf{B}^0 \equiv 1$  - реальная единица, а  $\mathbf{B}^{\mathbf{b}}$  ( $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ) - суть  $2^m - 1$  гипермнимых единиц.

В  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$  мы введем операцию сопряжения гипермнимых единиц:

$$\begin{aligned} \overline{B_1^{b_1}} &:= (-1)^{b_1} B_1^{b_1}, \quad \overline{B_2^{b_2}} := (-1)^{b_2} B_2^{b_2}, \quad \dots, \quad \overline{B_m^{b_m}} := (-1)^{b_m} B_m^{b_m}, \\ \overline{\mathbf{B}^{\mathbf{b}}} &= \overline{B_1^{b_1} B_2^{b_2} \dots B_m^{b_m}} := \overline{B_m^{b_m} \dots B_2^{b_2} B_1^{b_1}} = (-1)^{b_m} B_m^{b_m} \dots (-1)^{b_2} B_2^{b_2} (-1)^{b_1} B_1^{b_1} = \\ &= [(-1)^{\text{Wt}(\mathbf{b})}] B_m^{b_m} \dots B_2^{b_2} B_1^{b_1} = [(-1)^{\langle \mathbf{b} | \mathbf{R} | \mathbf{b} \rangle} (-1)^{\langle \mathbf{b} | \mathbf{R} | \mathbf{b} \rangle}] B_1^{b_1} B_2^{b_2} \dots B_m^{b_m} = \\ &= (-1)^{\text{Wt}(\mathbf{b})} \left[ (-1)^{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{ij} b_i b_j} \right] \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = (-1)^{\text{Wt}(\mathbf{b})} \left[ (-1)^{\sum_{i < j} b_i b_j} \right] \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = \\ &= (-1)^{\text{Wt}(\mathbf{b})} \left[ (-1)^{\frac{\text{Wt}(\mathbf{b})(\text{Wt}(\mathbf{b})-1)}{2}} \right] \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = (-1)^{\frac{\text{Wt}(\mathbf{b})(\text{Wt}(\mathbf{b})+1)}{2}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\text{где } R := \begin{bmatrix} \cdot & & & & \\ 1 & \cdot & & & \\ 1 & 1 & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \end{bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{ij} b_i b_j = \sum_{i < j} b_i b_j = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j - \sum_{j=1}^n b_j \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{Wt}(\mathbf{b})(\mathbf{Wt}(\mathbf{b}) - 1) \text{ и } k = \mathbf{Wt}(\mathbf{b}).$$

Операция сопряжения отображает вектор  $\chi = \sum_{\mathbf{b}} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$  в новый вектор:

$$\bar{\chi} = \sum_{\mathbf{b}=0} x_{\mathbf{b}} \overline{\mathbf{B}^{\mathbf{b}}} = x_0 B_0 + \sum_{\mathbf{b} \neq 0} x_{\mathbf{b}} (-1)^{\frac{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})(\mathbf{Wt}(\mathbf{b})+1)}{2}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}.$$

Теперь перед нами стоит задача определить законы умножения, сложения, вычитания и (если получится) деления подобных чисел [9-13]. Для начала построим операцию умножения для мнимых единиц:

$$\mathbf{B}^{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{c}} = (-1)^{\langle \mathbf{b} | R | \mathbf{c} \rangle} \eta_m^{b_m c_m} \eta_{m-1}^{b_{m-1} c_{m-1}} \dots \eta_2^{b_2 c_2} \eta_1^{b_1 c_1} \mathbf{B}^{\mathbf{b} \oplus \mathbf{c}} = \left[ (-1)^{\langle \mathbf{b} | R | \mathbf{c} \rangle} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{bc}} \right] \mathbf{B}^{\mathbf{b} \oplus \mathbf{c}}, \quad (5.5)$$

где  $\mathbf{bc} = (b_1, b_2, \dots, b_m)(c_1, c_2, \dots, c_m) := (b_1 c_1, b_2 c_2, \dots, b_m c_m)$ .

Очевидно, что  $\mathbf{B}^{\mathbf{c}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = (-1)^{\langle \mathbf{c} | R | \mathbf{b} \rangle} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{cb}} \mathbf{B}^{\mathbf{c} \oplus \mathbf{b}}$  и мы получаем коммутационные соотношения для мнимых единиц:

$$\mathbf{B}^{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{c}} = \left[ (-1)^{\langle \mathbf{b} | R^t + R | \mathbf{c} \rangle} \right] \mathbf{B}^{\mathbf{c}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = \left[ (-1)^{\langle \mathbf{b} | E + I | \mathbf{c} \rangle} (-1)^{\langle \mathbf{b} | \mathbf{c} \rangle} \right] \mathbf{B}^{\mathbf{c}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} =$$

$$= \left[ (-1)^{\mathbf{Wt}_2(\mathbf{c}) \mathbf{Wt}_2(\mathbf{b}) \oplus \langle \mathbf{c} | \mathbf{b} \rangle} \right] \mathbf{B}^{\mathbf{c}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}, \quad (5.6)$$

где  $E + I = (R^t + R) + I = |\mathbf{1}\rangle \langle \mathbf{1}|$  является заполненной единицами матрицей.

Полагая в (5.5)  $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ , мы получаем  $(\mathbf{B}^{\mathbf{b}})^2 = (-1)^{\langle \mathbf{b} | R | \mathbf{b} \rangle} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{b}} = (-1)^{\frac{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})(\mathbf{Wt}(\mathbf{b})-1)}{2}} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{b}}$ .

Теперь преобразуем пространство  $\mathbf{E}_S^{2^m}(\mathbf{R})$  в  $2^m$ -D гиперкомплексную алгебру  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, B_1, \dots, B_m)$ , если определим в  $\mathbf{E}_S^{2^m}(\mathbf{R})$  операции сложения (вычитания) и умножения (деления).

Заметим, что в пространстве  $\mathbf{E}_S^{2^m}(\mathbf{R})$  определена операция сложения и вычитания элементов  $\chi = \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$  и  $\mathcal{Y} = \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m} y_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$ :

$$x \pm y = \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \pm \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m} y_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m} (x_{\mathbf{b}} \pm y_{\mathbf{b}}) \mathbf{B}^{\mathbf{b}}. \quad (5.7)$$

Определим в пространстве  $E_S^{2^m}(\mathbf{R})$  операцию умножения двух векторов

$x = \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$  и  $y = \sum_{\mathbf{c} \in \mathfrak{B}_2^m} y_{\mathbf{c}} \mathbf{B}^{\mathbf{c}}$ , используя для этого соотношение (5.5):

$$\begin{aligned} z = xy &:= \left( \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \right) \left( \sum_{\mathbf{c} \in \mathfrak{B}_2^m} y_{\mathbf{c}} \mathbf{B}^{\mathbf{c}} \right) = \left( \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m} \sum_{\mathbf{c} \in \mathfrak{B}_2^m} x_{\mathbf{b}} y_{\mathbf{c}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \circ \mathbf{B}^{\mathbf{c}} \right) = \\ &= \left( \sum_{\mathbf{d} \in \mathfrak{B}_2^m} \sum_{\mathbf{c} \in \mathfrak{B}_2^m} (-1)^{\langle \mathbf{d} \oplus \mathbf{c} | R | \mathbf{c} \rangle} \boldsymbol{\eta}^{(\mathbf{d} \oplus \mathbf{c}) \mathbf{c}} x_{\mathbf{d} \oplus \mathbf{c}} y_{\mathbf{c}} \mathbf{B}^{\mathbf{d}} \right) = \sum_{\mathbf{d} \in \mathfrak{B}_2^m} z_{\mathbf{d}} \mathbf{B}^{\mathbf{d}}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

где выражение

$$z_{\mathbf{d}} = \sum_{\mathbf{c} \in \mathfrak{B}_2^m} (-1)^{\langle \mathbf{d} \oplus \mathbf{c} | R | \mathbf{c} \rangle} \boldsymbol{\eta}^{(\mathbf{d} \oplus \mathbf{c}) \mathbf{c}} x_{\mathbf{d} \oplus \mathbf{c}} y_{\mathbf{c}},$$

называется сверткой Клиффорда гиперкомплексных чисел  $x$  и  $y$ .

«Большое» векторное пространство  $\mathbf{R}^{2^m}$ , оснащенное векторным произведением (5.8), формирует  $2^m$ -D алгебру  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, B_1, \dots, B_m)$ , которая называется алгеброй Клиффорда с алгебраической сигнатурой  $s_{alg} = (a_-, b_+, c_0)$ .

**Определение 5.1.** Числа формы  $x = \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$ , где  $x_{\mathbf{b}} \in \mathbf{R}, \forall \mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m$ ,

называются клиффордионами, где 1)  $\mathbf{B}^{\mathbf{0}} \equiv 1$  - суть реальная единица; 2) числа  $\mathbf{B}^{\mathbf{b}}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  являются  $2^m - 1$  гипермнимыми единицами. Векторы  $x$  в этом случае называются числами Клиффорда.

**Пример 5.3.** Для примера рассмотрим  $m=1, 2, 3$ . Соответствующие алгебры Клиффорда суть

$$1) \text{Alg}_{2^1}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | B_1) = \left\langle \text{Alg}_{2^1}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_0 + \left\langle \text{Alg}_{2^1}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_1 = \underset{\text{Sc}}{\mathbf{R}} + \underset{\text{Vec}^1}{\mathbf{R}B_1} = \underset{\Re}{\mathbf{R}} + \underset{\Im}{\mathbf{R}B_1},$$

$$\begin{aligned}
2) \text{Alg}_{2^2}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | B_1, B_1) &= \left\langle \text{Alg}_{2^2}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_0 + \left\langle \text{Alg}_{2^2}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_1 + \left\langle \text{Alg}_{2^2}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_2 = \\
&= \mathbf{R} + \underbrace{\{\mathbf{R}B_1 + \mathbf{R}B_2\}}_{\text{Vec}^1} + \underbrace{\mathbf{R}B_1B_2}_{\text{Vec}^2} = \mathbf{R} + \underbrace{\mathbf{R}B_1 + \mathbf{R}B_2 + \mathbf{R}B_1B_2}_{\mathfrak{I}m}, \\
&\quad \text{Sc} \qquad \qquad \qquad \text{Re}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \text{Alg}_{2^3}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | B_1, B_2, B_3) &= \left\langle \text{Alg}_{2^3}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_0 + \left\langle \text{Alg}_{2^3}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_1 + \left\langle \text{Alg}_{2^3}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_2 + \left\langle \text{Alg}_{2^3}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_3 = \\
&= \mathbf{R}B_0 + \underbrace{\{\mathbf{R}B_1 + \mathbf{R}B_2 + \mathbf{R}B_3\}}_{\text{Vec}^1} + \underbrace{\{\mathbf{R}B_1B_2 + \mathbf{R}B_1B_3 + \mathbf{R}B_2B_3\}}_{\text{Vec}^2} + \underbrace{\mathbf{R}B_1B_2B_3}_{\text{Vec}^3} = \\
&\quad \text{Sc} \qquad \qquad \qquad \text{Re} \\
&= \mathbf{R}B_0 + \underbrace{\mathbf{R}B_1 + \mathbf{R}B_2 + \mathbf{R}B_3 + \mathbf{R}B_1B_2 + \mathbf{R}B_1B_3 + \mathbf{R}B_2B_3 + \mathbf{R}B_1B_2B_3}_{\mathfrak{I}m}. \\
&\quad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{Re}
\end{aligned}$$

Как мы видим в  $\text{Alg}_{2^1}^{(a_-, b_+, c_0)}$  “живут” комплексные числа, а в  $\text{Alg}_{2^2}^{(a_-, b_+, c_0)}$  - кватернионы. ■

**Пример 5.4.** В том случае, когда  $c_0 = 0$ , мы получаем невырожденные алгебры Клиффорда  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, 0)}(\mathbf{R} | 1, B_1, \dots, B_m)$ . В случае  $b_+ = 0$ , мы получаем Клиффордову алгебру  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, 0, 0)}(\mathbf{R} | 1, B_1, \dots, B_m)$ . Если же  $(b_+ = 0) \& (a_- = 0)$  и  $c_0 = m$ , то мы получаем алгебру Грассмана  $\mathcal{G}r_m^{2^m} := \text{Alg}_{2^m}^{(0, 0, c_0)}$ . В этом случае операция умножения называется внешним умножением и обозначается символом  $\wedge$ . Генераторы алгебры Грассмана удовлетворяют следующим условиям  $B_i^2 = 0$ ,  $B_i \wedge B_j = -B_j \wedge B_i$ ,  $(\forall i \neq j) \& (i, j \in \{1, 2, \dots, n\})$ . ■

Инверсные элементы могут быть определены только для некоторых элементов в алгебре Клиффорда. Например, только те элементы  $x \in \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$  имеют обратный элемент  $x^{-1}$  (левый или правый) такой, что  $x^{-1}x$  или  $xx^{-1}$ , у которого  $\|x\| \neq 0$ .

Итак, каждая алгебра Клиффорда  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, B_1, \dots, B_m)$  представляет собой некоммутативную ассоциативную алгебру над полем вещественных чисел  $\mathbf{R}$ , которая формирует так называемое градуированное линейное пространство размерности  $2^m$ :

$$\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, B_1, \dots, B_m) = \langle \text{Alg}_{2^m}^{C_n^0} \rangle \oplus \langle \text{Alg}_{2^m}^{C_n^1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle \text{Alg}_{2^m}^{C_n^n} \rangle.$$

Более точно, элементы  $\mathcal{X}$  являются гиперкомплексными числами над полем вещественных чисел  $\mathbf{R}$  с  $2^m - 1$  мнимыми единицами следующей формы

$$\mathcal{X} = \sum_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}_2^m} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = \sum_{k=0}^m \left( \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b})=k} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \right) = \sum_{k=0}^m \langle \mathcal{X} \rangle_k = x_0 + \langle \mathcal{X} \rangle_{1 \rightarrow n}, \quad (5.9)$$

с  $\langle \mathcal{X} \rangle_k = \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b})=k} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$  -  $k$ -степенным проектором,  $\langle \mathcal{X} \rangle_{1 \rightarrow n} = \sum_{k=1}^m \langle \mathcal{X} \rangle_k$ . Итак, число

Клиффорда (“клиффордион”)  $\mathcal{X}$  есть гиперкомплексное число формы (5.9)

над полем вещественных чисел  $\mathbf{R}$ , с  $2^m - 1$  мнимыми единицами. Числовой

компонент  $x_0$ , направленный компонент  $\langle \mathcal{X} \rangle_1 = \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b})=1} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$  и  $\langle \mathcal{X} \rangle_{1 \rightarrow n} = \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b}) \geq 1} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} =$

$= \langle \mathcal{X} \rangle_1 + \langle \mathcal{X} \rangle_2 + \dots + \langle \mathcal{X} \rangle_n$  были названы реальной (или скалярной),  $n$ - $D$

векторной и гипермнимой частями клиффордиона, соответственно. Теперь

эти компоненты обозначаются следующим образом:

$$\Re(\mathcal{X}) = \text{Sc}(\mathcal{X}) = x_0, \quad \mathbf{Vec}(\mathcal{X}) = \langle \mathcal{X} \rangle_1, \quad \Im(\mathcal{X}) = \mathbf{MVec}(\mathcal{X}) = \langle \mathcal{X} \rangle_2 + \langle \mathcal{X} \rangle_3 + \dots + \langle \mathcal{X} \rangle_n.$$

Иногда скалярная часть числа Клиффорда  $\mathcal{X} \in \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$  называется трассой

числа  $\mathcal{X}$  и обозначается так:  $\mathbf{Tr}(\mathcal{X}) := \mathbf{Tr}(\langle \mathcal{X} \rangle_0) = \mathbf{T}(x_0 \mathbf{I}^0) = x_0$ .

Следовательно, каждое  $\mathcal{X}$  является суммой реальной части (скалярное число)  $x_0$  и гипермнимой части (чистый мультивектор) клиффордиона:

$$\mathcal{X} = x_0 + \langle \mathcal{X} \rangle_{1 \rightarrow n} = \mathbf{Sc}(\mathcal{X}) + \mathbf{MVec}(\mathcal{X}) = \Re(\mathcal{X}) + \Im(\mathcal{X}),$$

где  $\Re(\mathcal{X}) = \mathbf{Sc}(\mathcal{X}) = x_0$ ,  $\mathbf{MVec}(\mathcal{X}) = \Im(\mathcal{X}) = \langle \mathcal{X} \rangle_{1 \rightarrow n}$ , что является основой для представления гиперкомплексного числа в виде комплексного числа.

Существует  $3^m$  возможностей для мнимостей  $B_1^{b_1} B_2^{b_2} \dots B_m^{b_m}$  в зависимости от частных мнимостей  $B_s^2 = +1, 0, -1, \quad \forall s = 1, 2, \dots, m$ . Каждая возможность

генерирует определенную алгебру Клиффорда. Следовательно, на базе «большого пространства»  $\mathbf{R}^{2^m}$  с  $3^m$  возможными правилами умножения можно сформировать  $3^m$  различных  $2^m$ -D алгебр Клиффорда  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, B_1, \dots, B_m)$ , которые для краткости будем обозначать символом  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$ , если родительские мнимости  $B_1, \dots, B_m$  фиксированы.

Среди  $3^m$  различных  $2^m$ -D алгебр Клиффорда  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, B_1, \dots, B_m)$  существуют изоморфные и неизоморфные алгебры Клиффорда. Наибольший интерес представляют неизоморфные алгебры. Рассмотрим сначала алгебры типа  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, 0)}$ , где  $a_- + b_+ = m$ . Неизоморфными здесь являются  $m+1$  алгебр:

$$\text{Alg}_{2^m}^{(m, 0, 0)}, \text{Alg}_{2^m}^{(m-1, 1, 0)}, \text{Alg}_{2^m}^{(m-2, 2, 0)}, \dots, \text{Alg}_{2^m}^{(2, m-2, 0)}, \text{Alg}_{2^m}^{(1, m-1, 0)}, \text{Alg}_{2^m}^{(0, m, 0)}$$

Неизоморфными алгебрами  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$  являются:

- 1)  $m+1$  алгебр Клиффорда типа  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, 0)}$ , где  $a_- + b_+ = m$ ,
- 2)  $m$  алгебр Клиффорда типа  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, 1)}$ , где  $a_- + b_+ = m-1$ ,
- 3)  $m-1$  алгебр Клиффорда типа  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, 2)}$ , где  $a_- + b_+ = m-2$ ,
- .....
- $m$ ) 2 алгебры Клиффорда типа  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, m-1)}$ , где  $a_- + b_+ = 1$ ,
- $m+1$ ) 1 алгебру Клиффорда типа  $\text{Alg}_{2^m}^{(0, 0, m)}$ , где  $a_- + b_+ = 0$ .

Суммируя, получаем количество различных неизоморфных алгебр типа

$$\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}: (m+1) + m + (m-1) + \dots + 2 + 1 = \frac{m(m+1)}{2}.$$

**Пример 5.5.** Вычислим общее количество неизоморфных алгебр типов

$\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, 0)}$  и  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$ , где  $m = 2, 3, 4$ . Для алгебр  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, 0)}$  мы имеем

$$m = 2: \underbrace{\text{Alg}_{2^2}^{(0, 2, 0)}}_{b_+=2}, \quad \underbrace{\text{Alg}_{2^2}^{(1, 1, 0)}}_{b_+=1}, \quad \underbrace{\text{Alg}_{2^2}^{(2, 0, 0)}}_{b_+=0},$$

$$m = 3: \underbrace{\text{Alg}_{2^3}^{(0,3,0)}}_{u_+=3}, \underbrace{\text{Alg}_{2^3}^{(1,2,0)}}_{b_+=2}, \underbrace{\text{Alg}_{2^3}^{(2,1,0)}}_{b_+=1}, \underbrace{\text{Alg}_{2^3}^{(0,3,0)}}_{b_+=3},$$

$$m = 4: \underbrace{\text{Alg}_{2^4}^{(0,4,0)}}_{b_+=4}, \underbrace{\text{Alg}_{2^4}^{(1,3,0)}}_{b_+=3}, \underbrace{\text{Alg}_{2^3}^{(2,2,0)}}_{b_+=2}, \underbrace{\text{Alg}_{2^3}^{(3,1,0)}}_{b_+=1}, \underbrace{\text{Alg}_{2^4}^{(4,0,0)}}_{b_+=0}.$$

Для алгебр  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$  мы получаем

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\text{Alg}_{2^2}^{(0,0,2)}}_{w_0=2}, \\
 m = 2: & \underbrace{\text{Alg}_{2^2}^{(0,1,1)}, \text{Alg}_{2^2}^{(1,0,1)}}_{c_0=1}, \\
 & \underbrace{\text{Alg}_{2^2}^{(0,2,0)}, \text{Alg}_{2^2}^{(1,1,0)}, \text{Alg}_{2^2}^{(2,0,0)}}_{c_0=0}, \\
 & \underbrace{\text{Alg}_{2^3}^{(0,0,3)}}_{w_0=3}, \\
 & \underbrace{\text{Alg}_{2^3}^{(0,1,2)}, \text{Alg}_{2^3}^{(1,0,2)}}_{c_0=2}, \\
 m = 3: & \underbrace{\text{Alg}_{2^3}^{(0,2,1)}, \text{Alg}_{2^m}^{(1,1,1)}, \text{Alg}_{2^m}^{(2,0,1)}}_{c_0=1}, \\
 & \underbrace{\text{Alg}_{2^3}^{(0,3,0)}, \text{Alg}_{2^3}^{(1,2,0)}, \text{Alg}_{2^3}^{(2,1,0)}, \text{Alg}_{2^3}^{(3,0,0)}}_{c_0=0}, \\
 & \underbrace{\text{Alg}_{2^4}^{(0,0,4)}}_{c_0=4}, \\
 & \underbrace{\text{Alg}_{2^4}^{(0,1,3)}, \text{Alg}_{2^4}^{(1,0,3)}}_{c_0=3}, \\
 m = 4: & \underbrace{\text{Alg}_{2^3}^{(0,2,2)}, \text{Alg}_{2^m}^{(1,1,2)}, \text{Alg}_{2^m}^{(2,0,2)}}_{c_0=2}, \\
 & \underbrace{\text{Alg}_{2^3}^{(0,3,1)}, \text{Alg}_{2^3}^{(1,2,1)}, \text{Alg}_{2^3}^{(2,1,1)}, \text{Alg}_{2^3}^{(3,0,1)}}_{c_0=1}, \\
 & \underbrace{\text{Alg}_{2^3}^{(0,4,0)}, \text{Alg}_{2^3}^{(1,3,0)}, \text{Alg}_{2^3}^{(2,2,0)}, \text{Alg}_{2^3}^{(3,1,0)}, \text{Alg}_{2^4}^{(4,0,0)}}_{c_0=0}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что если  $(1, B_1, \dots, B_m) = (1, I_1, \dots, I_n)$  и  $m = n$ , то алгебра Клиффорда  $\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, B_1, \dots, B_m)$  называется пространственной и обозначается как  $\mathcal{Alg}_{2^n}^{Sp(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, \dots, I_n) := \mathcal{Alg}_{2^n}^{(p_-, q_+, r_0)}(\mathbf{R} | 1, I_1, \dots, I_n)$ . В этом случае  $Sp(a_-, b_+, c_0) = (p_-, q_+, r_0)$ . Если же  $m = K$ , то  $(1, B_1, \dots, B_m) = (1, J_1, \dots, J_K)$  и алгебра называется перцептуальной и обозначается:  $\mathcal{Alg}_{2^m}^{Vis(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, B_1, \dots, B_m) = \mathcal{Alg}_{2^m}^{(v_-, u_+, w_0)}(\mathbf{R} | 1, J_1, \dots, J_K)$ . В этом случае  $Vis(a_-, b_+, c_0) = (u_-, v_+, w_0)$ .

**Примечание 5.1.** Пространственная и перцептуальная алгебры могут иметь как одинаковые  $(a_-, b_+, c_0) = (u_-, v_+, w_0)$ , так и различные алгебраические сигнатуры  $(a_-, b_+, c_0) \neq (u_-, v_+, w_0)$ .

**Определение 5.2.** Следующие подпространства  $\left\langle \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_k = \text{Span}_{\text{Wt}(\mathbf{b})=k} \{\mathbf{B}^{\mathbf{b}}\} = \sum_{\substack{\text{Wt}(\mathbf{b})=k \\ \mathbf{b} \in \mathcal{B}_2^m}} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$  называются подпространствами степени  $k$ .

Очевидно, что

$$\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} = \sum_{k=0}^m \left\langle \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_k, \quad \dim \left\langle \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_k = C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!k!}.$$

Алгебра Клиффорда  $\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$  может быть представлена в форме прямой суммы четных и нечетных подпространств:

$$\begin{aligned} \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} &= [0]_2 \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} + [1]_2 \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} = \\ &= \sum_{k=0(\text{mod } 2)} \left\langle \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_k + \sum_{k=1(\text{mod } 2)} \left\langle \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_k, \end{aligned}$$

где  $[i]_2 \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \cdot [k]_2 \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} = [i \oplus k]_2 \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$ . Заметим, что  $[0]_2 \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$  является подалгеброй алгебры  $\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$ .

**5.2.2. Свойства носителя алгебры Клиффорда.** Носителем  $2^m$ -D алгебры  $\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$  является пространство  $E_s^{2^m}(\mathbf{R})$ , натянутое на базис

$$\mathbf{B}^{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{\mathbf{b}_-} \mathbf{B}^{\mathbf{b}_+} \mathbf{B}^{\mathbf{b}_0} = \left( B_1^{\mathbf{b}_{1-}} B_2^{\mathbf{b}_{2-}} \cdots B_{a_-}^{\mathbf{b}_{a_-}} \right) \left( B_{a_-+1}^{\mathbf{b}_{a_-+1}} B_{a_-+2}^{\mathbf{b}_{a_-+2}} \cdots B_{a_-+b_+}^{\mathbf{b}_{a_-+b_+}} \right) \left( B_{a_-+b_++1}^{\mathbf{b}_{a_-+b_++1}} B_{a_-+b_++2}^{\mathbf{b}_{a_-+b_++2}} \cdots B_{a_-+b_++c_0}^{\mathbf{b}_{a_-+b_++c_0}} \right).$$

где  $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m) = \underbrace{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{a_-})}_{a_-}, \underbrace{(\mathbf{b}_{a_-+1}, \mathbf{b}_{a_-+2}, \dots, \mathbf{b}_{a_-+b_+})}_{b_+}, \underbrace{(\mathbf{b}_{a_-+b_++1}, \mathbf{b}_{a_-+b_++2}, \dots, \mathbf{b}_{a_-+b_++c_0})}_{c_0}$ .

Для этого базиса мы имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}^{\mathbf{b}}\|^2 &= \overline{\mathbf{B}^{\mathbf{b}}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = (-1)^{\langle \mathbf{b} | \Delta \mathbf{b} \rangle} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = (-1)^{\langle \mathbf{b} | \Delta \mathbf{b} \rangle} (\mathbf{B}^{\mathbf{b}})^2 = (-1)^{\langle \mathbf{b} | \Delta \mathbf{b} \rangle} (-1)^{\langle \mathbf{b} | R \mathbf{b} \rangle} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{b}} = \\ &= (-1)^{\langle \mathbf{b} | \mathbf{b} \rangle} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{b}} = (-1)^{\mathbf{Wt}(\mathbf{b})} \cdot \left( (-1)^{\mathbf{b}_-} (+1)^{\mathbf{b}_+} (0)^{\mathbf{b}_0} \right) = (-1)^{\mathbf{b}_+} (0)^{\mathbf{b}_0}, \end{aligned}$$

где мы учли то факт, что  $(\mathbf{B}^{\mathbf{b}})^2 = (-1)^{\langle \mathbf{b} | R \mathbf{b} \rangle} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{b}}$ .

Пусть  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{0} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{c_0})$ , то  $\|\mathbf{B}^{(\mathbf{b}_-, \mathbf{b}_+, \mathbf{0})}\|^2 = (-1)^{\mathbf{Wt}_2(\mathbf{b}_+)}$  и в этом случае мы имеем

- 1) по  $2^{m-c_0-1}$  чисел  $\|\mathbf{B}^{\mathbf{b}_+}\|^2 = +1$  и  $\|\mathbf{B}^{\mathbf{b}_-}\|^2 = -1$ , если  $\mathbf{Wt}_2(\mathbf{b}_-) \neq 0$  и
- 2)  $2^{m-c_0}$  чисел  $\|\mathbf{B}^{\mathbf{b}_+}\|^2 = +1$ , если  $\mathbf{Wt}_2(\mathbf{b}_-) = 0$ .

В противном случае, когда  $\mathbf{b}_0 \neq \mathbf{0}$   $\|\mathbf{B}^{(\mathbf{b}_-, \mathbf{b}_+, \mathbf{b}_0)}\|^2 = 0$  мы имеем  $C_0 = 2^m - 2^{m-c_0} = 2^{a_-+b_+} (2^{c_0} - 1)$  нулей  $(\mathbf{B}^{(\mathbf{b}_-, \mathbf{b}_+, \mathbf{b}_0)})^2 = 0$ . Следовательно,  $A_- = 2^m, B_+ = 0$ , если  $\mathbf{Wt}(\mathbf{b}_+) = m$ .

Итак, пространство  $\mathbf{E}_{(A_+, B_-, C_0)}^{2^m}(\mathbf{R})$  имеет следующую метрическую сигнатуру (для примера см. Табл. 5.1 для  $c_0 = 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} A_+ &= 2^{m-c_0-1}, & B_- &= 2^{m-c_0-1}, & C_0 &= 2^m - 2^{m-c_0}, & \mathbf{Wt}_2(\mathbf{b}_0) &\neq 0 \\ A_+ &= 2^{m-c_0}, & B_- &= 0, & C_0 &= 2^m - 2^{m-c_0}, & \mathbf{Wt}_2(\mathbf{b}_0) &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ если } c_0 \neq 0,$$

$$\left. \begin{aligned} A_+ &= 2^{m-1}, & B_- &= 2^{m-1}, & C_0 &= 0, & \mathbf{Wt}_2(\mathbf{b}_0) &\neq 0 \\ A_+ &= 2^m, & B_- &= 0, & C_0 &= 0, & \mathbf{Wt}_2(\mathbf{b}_0) &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ если } c_0 = 0,$$

т.е.,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_{(A_+, B_-, C_0)}^{2^m}(\mathbf{R}) &= \mathbf{E}_{2^{m-c_0-1}, 2^{m-c_0-1}, 2^m - 2^{m-c_0}}^{2^m}(\mathbf{R}), & \mathbf{Wt}_2(\mathbf{b}_0) &\neq 0 \\ \mathbf{E}_{(A_+, B_-, C_0)}^{2^m}(\mathbf{R}) &= \mathbf{E}_{2^{m-c_0}, 0, 2^m - 2^{m-c_0}}^{2^m}(\mathbf{R}), & \mathbf{Wt}_2(\mathbf{b}_0) &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ если } c_0 \neq 0, \quad (5.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_{(A_+, B_-, 0)}^{2^m}(\mathbf{R}) &= \mathbf{E}_{2^{m-1}, 2^{m-1}}^{2^m}(\mathbf{R}), & \mathbf{Wt}_2(\mathbf{b}_0) &\neq 0 \\ \mathbf{E}_{(A_+, B_-, 0)}^{2^m}(\mathbf{R}) &= \mathbf{E}_{2^m, 0}^{2^m}(\mathbf{R}), & \mathbf{Wt}_2(\mathbf{b}_0) &= 0 \end{aligned} \right\}, \text{ если } c_0 = 0.$$

Неизоморфные пространства  $\mathbf{E}_{(A_+, B_-, C_0)}^{2^m}(\mathbf{R})$  при  $(c_0 \neq 0)$  суть:

$$\mathbf{E}_{(A_+, B_-, C_0)}^{2^m}(\mathbf{R}) \approx \begin{cases} \mathbf{E}_{(2^{m-c_0-1}, 2^{m-c_0-1}, 2^m - 2^{m-c_0})}^{2^m}(\mathbf{R}), & c_0 \neq m, \\ \mathbf{E}_{(2^{m-c_0}, 0, 2^m - 2^{m-c_0})}^{2^m}(\mathbf{R}), & c_0 = m, \end{cases}$$

т.е. для  $\begin{cases} A_+ = 2^{m-c_0-1}, B_- = 2^{m-c_0-1}, C_0 = 2^m - 2^{m-c_0}, & c_0 \neq m, \\ A_+ = 2^{m-c_0}, B_- = 0, C_0 = 2^m - 2^{m-c_0}, & c_0 = m. \end{cases}$

**Таблица 5.1.** Распределение +1 и -1 в зависимости от  $(\mathbf{b}_-, \mathbf{b}_+)$   
 $a_- \quad b_+$

$(a_-, b_+)$	30	21	12	03
$(\mathbf{b}_-, \mathbf{b}_+)$ $a_- \quad b_+$	000 $a_-=3 \quad b_+=0$	00 1 $a_-=2 \quad b_+=1$	0 11 $a_-=1 \quad b_+=2$	. 111 $a_-=0 \quad b_+=3$
$\mathbf{B}^{\mathbf{b}} =$ $= B^{b_1} B^{b_2} B^{b_3}$	$\ \mathbf{B}^{\mathbf{b}}\ ^2 = (-1)^{b_+} =$ $= 1$	$\ \mathbf{B}\ ^2 = (-1)^{b_+} =$ $= (-1)^{b_3}$	$\ \mathbf{B}^{\mathbf{b}}\ ^2 = (-1)^{b_+} =$ $= (-1)^{b_1+b_2}$	$\ \mathbf{B}^{\mathbf{b}}\ ^2 = (-1)^{b_+} =$ $= (-1)^{b_1+b_2+b_3}$
$B^0 B^0 B^0$	+	+	+	+
$B^0 B^0 B^1$	+	-	-	-
$B^0 B^1 B^0$	+	+	-	-
$B^0 B^1 B^1$	+	-	+	+
$B^1 B^0 B^0$	+	+	+	-
$B^1 B^0 B^1$	+	-	-	+
$B^1 B^1 B^0$	+	+	-	+
$B^1 B^1 B^1$	+	-	+	-
$(A_+, B_-)$	8,0	4,4	4,4	4,4

Для неизоморфных пространств типа  $\mathbf{E}_{(A_+, B_-, 0)}^{2^m}(\mathbf{R})$  мы имеем

$$\mathbf{RS}_{(A_+, B_-, 0)}^{2^m-1}(+1) \approx \mathbf{S}^{2^m-1-B_-} \times \mathbf{E}^{B_-}(\mathbf{R}), \quad \mathbf{HS}_{(A_++1, B_-, 1, 0)}^{2^m-1}(-1) \approx \mathbf{S}^{B_- - 1} \times \mathbf{E}^{2^m - B_-}(\mathbf{R}).$$

**Пример 5.6.** Если  $c_0 = m$  то  $\mathbf{E}_{(A_+, B_-, 0)}^{2^m}(\mathbf{R}) \approx \begin{cases} \mathbf{E}_{(2^{m-1}, 2^{m-1}, 0)}^{2^m}(\mathbf{R}), & c_0 \neq m, \\ \mathbf{E}_{(2^m, 0, 0)}^{2^m}(\mathbf{R}), & c_0 = m. \end{cases}$  Псевдо-

Евклидово пространство  $\mathbf{E}_{(A_+, B_-, 0)}^{2^m}(\mathbf{R})$  содержит в себе псевдо-Риманову сферу

и гиперболическое пространство:  $\mathbf{RS}_{(2^{m-1}, 2^{m-1})}^{2^m-1}(+1) \approx \mathbf{HS}_{(2^{m-1}+1, 2^{m-1}-1)}^{2^m-1}(-1) \approx \mathbf{E}^{2^m-1}(\mathbf{R}) \times \mathbf{S}^{2^m-1-1}$ . ■

**5.2.3. Псевдоскаляр и центр.** Один из элементов в алгебре  $\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$

требует специального внимания, а именно так называемый псевдоскаляр, формируемый произведением всех гипермнимых единиц  $\mathbf{B}^1 := B_1 B_2 \cdots B_m$ .

Квадрат псевдоскаляра определяется сигнатурой и размерностью  $m$ :

$$(\mathbf{B}^1)^2 = (-1)^{\langle 1|R|1 \rangle} \boldsymbol{\eta}^1 = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} (-1)^{v_-} (+1)^{u_+} (0)^{w_0} = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)+v_-} \delta_{w_0,0}.$$

Центр алгебры  $\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$  суть

$$\mathcal{Z} \left\{ \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\} := \left\{ z \mid zx = xz, \forall x \in \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\}.$$

Он состоит из элементов, коммутирующих со всеми элементами из  $\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$ .

**Теорема 5.1.** Центр алгебры Клиффорда  $\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$  суть

$$\begin{aligned} & \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\} = \\ = & \begin{cases} \left\{ x_0 1 \mid x_0 \in \mathbf{R} \right\} = \left\langle \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_0, & m \text{ четное,} \\ \left\{ x_0 1 + x_1 \mathbf{B} \mid x_0, x_1 \in \mathbf{R} \right\} = \left\langle \mathcal{Alg}_{2^m}^{(v_-, u_+, w_0)} \right\rangle_0 + \left\langle \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_1, & m \text{ нечетное.} \end{cases} \end{aligned}$$

Для нечетных  $m$ ,  $\mathbf{B}^1$  коммутирует со всеми элементами в  $\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$ , в то время как для четных  $m$ ,  $\mathbf{B}^1$  антикоммутирует со всеми векторами  $\mathbf{x} \in \left\langle \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_1$ .

**Пример 5.7.** Пусть  $m=2$ . Существует 6 неизоморфных алгебр Клиффорда  $\mathcal{Alg}_{2^2}^{(2,0,0)}$ ,  $\mathcal{Alg}_{2^2}^{(1,1,0)}$ ,  $\mathcal{Alg}_{2^2}^{(0,2,0)}$ ,  $c_0 = 0$ , где 1)  $B_1^2 = -1, B_2^2 = -1$  для  $\mathcal{Alg}_{2^2}^{(2,0,0)}$ , 2)  $B_1^2 = -1, B_2^2 = +1$  для  $\mathcal{Alg}_{2^2}^{(1,1,0)}$ , 3)  $B_1^2 = +1, B_2^2 = +1$  для  $\mathcal{Alg}_{2^2}^{(0,2,0)}$  и  $\mathcal{Alg}_{2^2}^{(1,0,1)}$ ,  $\mathcal{Alg}_{2^2}^{(0,1,1)}$ ,  $\mathcal{Alg}_{2^2}^{(0,0,2)}$ ,  $c_0 \neq 0$ , где 1)  $B_1^2 = -1, B_2^2 = 0$  для  $\mathcal{Alg}_{2^2}^{(1,0,1)}$ , 2)  $B_1^2 = +1, B_2^2 = 0$  для  $\mathcal{Alg}_{2^2}^{(0,1,1)}$ , 3)  $B_1^2 = 0, B_2^2 = 0$  для  $\mathcal{Alg}_{2^2}^{(0,0,2)}$ .

Псевдоскаляр в этих алгебрах суть  $\mathbf{B} = B_1 B_2$ . Следовательно,

$$1) (B_1 B_2)^2 = (-1)^{1+u} = \begin{cases} -1, & u = 0, 2, \\ +1, & u = 1, \end{cases} \quad 2) (B_1 B_2)^2 = 0$$

для первой и третьей тройки алгебр, соответственно. Поэтому подалгебры, натянутые на  $\{1, \mathbf{B}\} = \{1, B_1 B_2\}$ , изоморфны алгебрам комплексных, гиперболических и дуальных чисел  $\mathbf{C}(i), \mathbf{H}(e), \mathbf{D}(\varepsilon)$ , где  $i^2 = -1, e^2 = +1, \varepsilon^2 = 0$ .

Произвольный вектор  $\mathbf{x} \in \langle \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \rangle_1$  может быть записан как

$$\mathbf{x} = aI_1 + bI_2 = I_1(a + bI_1 I_2) = I_1(a + b\mathbf{I}) = |\mathbf{x}| I_1 e^{\varphi \mathbf{I}} = |\mathbf{x}| I_1 (\cos \varphi + \mathbf{I} \sin \varphi),$$

$$\mathbf{x} = aI_1 + bI_2 = I_1(a + bI_1 I_2) = I_1(a + b\mathbf{I}) = |\mathbf{x}| I_1 e^{\varphi \mathbf{I}} = |\mathbf{x}| I_1 (\cosh \varphi + \mathbf{I} \sinh \varphi),$$

$$\mathbf{x} = aI_1 + bI_2 = I_1(a + bI_1 I_2) = I_1(a + b\mathbf{I}) = |\mathbf{x}| I_1 e^{\varphi \mathbf{I}} = |\mathbf{x}| I_1 (\text{cosg } \varphi + \mathbf{I} \text{sing } \varphi)$$

для некоторых  $a, b, \varphi \in \mathbf{R}$ . Эти выражения аналогичны полярным формам комплексных, гиперболических и дуальным числам, соответственно. ■

**Пример 5.8.** В  $\text{Alg}_{2^3}^{(0,3,0)}$  псевдоскаляр дается  $\mathbf{B} = B_1 B_2 B_3$ , где  $B_1^2 = -1, B_2^2 = -1, B_3^2 = -1$ . Но,  $(\mathbf{B}^1)^2 = (-1)^{3+0} \delta_{0,0} = -1$  и  $\{1, \mathbf{I}\}$  - базис субалгебры изоморфной алгебре комплексных чисел. Однако, существует бесконечно много других субалгебр, погруженных в алгебру  $\text{Alg}_{2^3}^{(0,3,0)}$ , так как для каждого выбора элемента  $\mathbf{i}(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha I_1 + \beta I_2 + \gamma I_3 \in \mathbf{Sph} \langle \text{Alg}_{2^3}^{(0,3,0)} \rangle_1$  на единичной сфере  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ , элемент  $\mathbf{i}(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha I_2 I_3 + \beta I_3 I_1 + \gamma I_1 I_2$  также удовлетворяет равенству  $\mathbf{i}^2(\alpha, \beta, \gamma) = -1$ . Поэтому элементы вида  $Z = a + b \cdot \mathbf{i}(\alpha, \beta, \gamma)$  формируют элементы поля комплексных чисел, а число вида  $Z = e^{\mathbf{i}(\alpha, \beta, \gamma)xy}$  может рассматриваться в качестве ядра для многопараметрического преобразования Фурье:

$$F(\omega | \alpha, \beta, \gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{\mathbf{i}(\alpha, \beta, \gamma)\omega x} dx. \quad \blacksquare$$

**5.2.4. Сопряжение и норма.** Три инволюции в алгебре Клиффорда для нас интересны.

**Определение 5.3.** Следующие элементы в алгебре Клиффорда  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$

$$1) (B_1^{b_1})^* := (-1)^{b_1} B_1^{b_1}, (B_2^{b_2})^* := (-1)^{b_2} B_2^{b_2}, \dots, (B_n^{b_n})^* = (-1)^{b_n} B_n^{b_n},$$

$$(\mathbf{B}^b)^* = (B_1^{b_1} B_2^{b_2} \dots B_n^{b_n})^* := (B_1^{b_1})^* (B_2^{b_2})^* \dots (B_n^{b_n})^* = (-1)^{\text{Wt}(\mathbf{b})} \mathbf{B}^b.$$

$$2) \overline{\mathbf{B}^b} = \overline{B_1^{b_1} B_2^{b_2} \dots B_m^{b_m}} := B_n^{b_n} \dots B_2^{b_2} B_1^{b_1} = \left[ (-1)^{\langle \mathbf{b} | R | \mathbf{b} \rangle} \right] B_1^{b_1} B_2^{b_2} \dots B_m^{b_m} = \left[ (-1)^{\langle \mathbf{b} | R | \mathbf{b} \rangle} \right] \mathbf{B}^b =$$

$$= \left[ (-1)^{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{ij} b_i b_j} \right] \mathbf{B}^b = \left[ (-1)^{\sum_{i < j} \sum b_i b_j} \right] \mathbf{B}^b = \left[ (-1)^{\frac{\text{Wt}(\mathbf{b})(\text{Wt}(\mathbf{b})-1)}{2}} \right] \mathbf{B}^b = \left[ (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \right] \mathbf{B}^b,$$

где  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{ij} b_i b_j = \sum_{i < j} \sum b_i b_j = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i b_j - \sum_{j=1}^n b_j \right) = \frac{1}{2} \text{Wt}(\mathbf{b})(\text{Wt}(\mathbf{b})-1),$

$$3) \overline{\mathbf{B}^b} := ((\mathbf{B}^b)^*)^\dagger := (-1)^{\text{Wt}(\mathbf{b})} (\mathbf{B}^b)^\dagger = (-1)^{\text{Wt}(\mathbf{b})} (-1)^{\frac{\text{Wt}(\mathbf{b})(\text{Wt}(\mathbf{b})-1)}{2}} \mathbf{B}^b =$$

$$= (-1)^{\frac{\text{Wt}(\mathbf{b})(\text{Wt}(\mathbf{b})+1)}{2}} \mathbf{B}^b = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \mathbf{B}^b$$

называются 1) главной инволюцией, 2) реверсом и 3) эрмитовым сопряжением, где  $k = \text{Wt}(\mathbf{b})$ .

На члены гиперкомплексного числа эти операции действуют следующим

образом:  $\langle \mathbf{x} \rangle_k^* = (-1)^k \langle \mathbf{x} \rangle_k$ ,  $\overline{\langle \mathbf{x} \rangle_k} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \langle \mathbf{x} \rangle_k$ ,  $\langle \mathbf{x} \rangle_k^\dagger = \left[ (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \right] \langle \mathbf{x} \rangle_k$ , а на

гиперкомплексное число  $\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^n} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^b$  они действуют так:

$$\mathbf{x}^* = \left( \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^n} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^b \right)^* = \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^n} x_{\mathbf{b}} (\mathbf{B}^b)^* = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{w(\mathbf{b})=k} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^b,$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \overline{\sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^n} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^b} = \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^n} x_{\mathbf{b}} \overline{\mathbf{B}^b} = \sum_{k=0}^n (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \sum_{w(\mathbf{b})=k} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^b,$$

$$\mathbf{x}^\dagger = \left( \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^n} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^b \right)^\dagger = \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^n} x_{\mathbf{b}} (\mathbf{B}^b)^\dagger = \sum_{k=0}^n (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \sum_{w(\mathbf{b})=k} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^b.$$

Заметим, что

$$\langle \mathbf{x} \rangle_k^* = (-1)^k \langle \mathbf{x} \rangle_k = \begin{cases} +\langle \mathbf{x} \rangle_k, & k = 0, 2 \pmod{4}, \\ -\langle \mathbf{x} \rangle_k, & k = 1, 3 \pmod{4}, \end{cases}$$

$$\overline{\langle \mathbf{x} \rangle}_k = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \langle \mathbf{x} \rangle_k = \begin{cases} +\langle \mathbf{x} \rangle_k, & k = 0, 3 \pmod{4}, \\ -\langle \mathbf{x} \rangle_k, & k = 1, 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

$$\langle \mathbf{x} \rangle_k^\dagger = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \langle \mathbf{x} \rangle_k = \begin{cases} +\langle \mathbf{x} \rangle_k, & k = 0, 1 \pmod{4}, \\ -\langle \mathbf{x} \rangle_k, & k = 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

**Таблица 5.2.** Действие инволюций на градуированные подпространства  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$

	$\langle \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \rangle_0$	$\langle \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \rangle_1$	$\langle \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \rangle_2$	$\langle \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \rangle_3$
$\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$	+	+	+	+
$^* \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$	+	-	+	-
$^\dagger \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$	+	+	-	-
$^- \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$	+	-	-	+

	$\langle \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \rangle_4$	$\langle \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \rangle_5$	$\langle \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \rangle_6$	$\langle \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \rangle_7$
$\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$	+	+	+	+
$^* \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$	+	-	+	-
$^\dagger \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$	+	+	-	-
$^- \text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$	+	-	-	+

Операция эрмитово-клиффордового сопряжения соответствует операции комплексного сопряжения комплексных чисел в случае  $\text{Alg}_2^{(0,1,0)} \approx \mathbb{C}$  и кватернионному сопряжению в случае  $\text{Alg}_2^{(0,2,0)} \approx \mathbb{H}$ . Итак,

$$\mathbf{x}^* = [\langle \mathbf{x} \rangle_0 - \langle \mathbf{x} \rangle_1 + \langle \mathbf{x} \rangle_2 - \langle \mathbf{x} \rangle_3] + [\langle \mathbf{x} \rangle_4 - \langle \mathbf{x} \rangle_5 + \langle \mathbf{x} \rangle_6 - \langle \mathbf{x} \rangle_7] + \dots$$

$$\mathbf{x}^\dagger = [\langle \mathbf{x} \rangle_0 + \langle \mathbf{x} \rangle_1 - \langle \mathbf{x} \rangle_2 - \langle \mathbf{x} \rangle_3] + [\langle \mathbf{x} \rangle_4 + \langle \mathbf{x} \rangle_5 - \langle \mathbf{x} \rangle_6 - \langle \mathbf{x} \rangle_7] + \dots$$

$$\bar{\mathbf{x}} = [\langle \mathbf{x} \rangle_0 - \langle \mathbf{x} \rangle_1 - \langle \mathbf{x} \rangle_2 + \langle \mathbf{x} \rangle_3] + [\langle \mathbf{x} \rangle_4 - \langle \mathbf{x} \rangle_5 - \langle \mathbf{x} \rangle_6 + \langle \mathbf{x} \rangle_7] + \dots$$

Пусть

$$\begin{aligned}
{}^{[0]_4}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} &:= \sum_{k=0 \bmod 4} \left\langle \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_k, & {}^{[1]_4}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} &:= \sum_{k=1 \bmod 4} \left\langle \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_k, \\
{}^{[2]_4}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} &:= \sum_{k=2 \bmod 4} \left\langle \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_k, & {}^{[3]_4}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} &:= \sum_{k=3 \bmod 4} \left\langle \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\rangle_k.
\end{aligned}$$

Действие этих инволюций представлено в Табл. 5.2. Заметьте периодичность.

Мы видим, что

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ * \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ \dagger \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ \overline{\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{[0]_4}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ {}^{[1]_4}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ {}^{[2]_4}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ {}^{[3]_4}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} {}^{[0]_4}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ {}^{[1]_4}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ {}^{[2]_4}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ {}^{[3]_4}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ * \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ \dagger \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ \overline{\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

**Определение 5.4.** Элемент  $\mathcal{X} \in \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$  называется эрмитовым (анти-эрмитовым), если  $\mathcal{X}^\dagger = \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{X}^\dagger = -\mathcal{X}$  и обозначается как  ${}^h\mathcal{X}$ ,  ${}^{\bar{h}}\mathcal{X}$ , соответственно.

Множества эрмитовых и антиэрмитовых элементов обозначим  ${}^h\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R})$  и  ${}^{\bar{h}}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R})$ . Следовательно, для антиэрмитового элемента мы имеем  $\left\langle {}^{\bar{h}}\mathcal{X}^\dagger \right\rangle_{1 \rightarrow n} = -\left\langle {}^{\bar{h}}\mathcal{X} \right\rangle_{1 \rightarrow n}$  и  $x_0 = 0$ , т.е.  $\sum_{\mathbf{b} \neq 0} x_{\mathbf{b}} (-1)^{\langle \mathbf{b} | \Delta | \mathbf{b} \rangle} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = -\sum_{\mathbf{b} \neq 0} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$  для всех  $x_{\mathbf{b}} = 0$ , для которых  $(-1)^{\langle \mathbf{b} | \Delta | \mathbf{b} \rangle} = 1$ , т.е. для  $\langle \mathbf{b} | \Delta | \mathbf{b} \rangle = 0$ . Следовательно,

$${}^{\bar{h}}\mathcal{X} \equiv \left\langle {}^{\bar{h}}\mathcal{X} \right\rangle_{1 \rightarrow m} = \sum_{\substack{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m (\mathbf{b} \neq 0) \\ \& (\langle \mathbf{b} | \Delta | \mathbf{b} \rangle = 1)}} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \in {}^{\bar{h}}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R}).$$

Для эрмитового элемента его скалярная часть  $x_0$  является ненулевой. Из

$$\sum_{\mathbf{b} \neq 0} x_{\mathbf{b}} (-1)^{\langle \mathbf{b} | \Delta | \mathbf{b} \rangle} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = \sum_{\mathbf{b} \neq 0} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}$$

мы видим, что  $x_{\mathbf{b}} = 0$ , для которых  $(-1)^{\langle \mathbf{b} | \Delta | \mathbf{b} \rangle} = -1$ ,

т.е. для  $\langle \mathbf{b} | \Delta | \mathbf{b} \rangle = 1$ . Поэтому  ${}^h\mathcal{X} \equiv x_0 + \left\langle {}^h\mathcal{X} \right\rangle_{1 \rightarrow n} = x_0 + \sum_{\substack{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m (\mathbf{b} \neq 0) \\ \& (\langle \mathbf{b} | \Delta | \mathbf{b} \rangle = 0)}} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \in {}^h\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R})$ .

Итак,  ${}^h\mathcal{X} = \sum_{k=0,3(\bmod 4)} \langle \mathcal{X} \rangle_k$ ,  ${}^{\bar{h}}\mathcal{X} = \sum_{k=1,2(\bmod 4)} \langle \mathcal{X} \rangle_k$  и  $\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} = {}^h\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} + {}^{\bar{h}}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$ .

Но  $\overline{\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}} := {}^h\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} - {}^{\bar{h}}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$ . Отсюда получаем

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ \overline{\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^h\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ {}^{\bar{h}}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} {}^h\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ {}^{\bar{h}}\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ \overline{\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}} \end{bmatrix}.$$

Мы также имеем  $\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} = [0]_2 \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} + [1]_2 \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$ , и следовательно,  ${}^*\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} = [0]_2 \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} - [1]_2 \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$ ,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ {}^*\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0]_2 \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ [1]_2 \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} [0]_2 \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ [1]_2 \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \\ {}^*\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \end{bmatrix}.$$

**5.2.5. Нормы и скалярные произведения.** Произвольная алгебра Клиффорда  $\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$  превращается в псевдо-метрическое пространство  $\mathbf{Geo}_{2^m}(\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)})$ , если ввести норму и псевдо-расстояние между любой парой чисел Клиффорда  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Y}$ . Предварительно вычислим  $Z = \mathcal{X}\bar{\mathcal{X}}$ :

$$\begin{aligned} Z = \mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} &:= \left( \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{B}_2^m} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \right) \left( \sum_{\mathbf{c} \in \mathbb{B}_2^m} x_{\mathbf{c}} \bar{\mathbf{B}}^{\mathbf{c}} \right) = \left( \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{B}_2^m} \sum_{\mathbf{c} \in \mathbb{B}_2^m} [(-1)^{\langle \mathbf{c} | \Delta | \mathbf{c} \rangle}] x_{\mathbf{b}} x_{\mathbf{c}} \mathbf{B}^{\mathbf{b} \oplus \mathbf{c}} \right) = \\ &= \left( \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{B}_2^m} \sum_{\mathbf{c} \in \mathbb{B}_2^m} [(-1)^{\langle \mathbf{c} | \Delta | \mathbf{c} \rangle} (-1)^{\langle \mathbf{d} \oplus \mathbf{c} | R | \mathbf{c} \rangle}] \eta^{(\mathbf{d} \oplus \mathbf{c}) \mathbf{c}} x_{\mathbf{d} \oplus \mathbf{c}} x_{\mathbf{c}} \mathbf{B}^{\mathbf{d}} \right) = \\ &= \sum_{\mathbf{c} \in \mathbb{B}_2^m} [(-1)^{\langle \mathbf{c} | \Delta | \mathbf{c} \rangle} (-1)^{\langle \mathbf{c} | R | \mathbf{c} \rangle}] \eta^{\mathbf{c}} x_{\mathbf{c}} x_{\mathbf{c}} + \left( \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{B}_2^m / 0} \sum_{\mathbf{c} \in \mathbb{B}_2^m} [(-1)^{\langle \mathbf{c} | \Delta | \mathbf{c} \rangle} (-1)^{\langle \mathbf{d} \oplus \mathbf{c} | R | \mathbf{c} \rangle}] \eta^{(\mathbf{d} \oplus \mathbf{c}) \mathbf{c}} x_{\mathbf{d} \oplus \mathbf{c}} x_{\mathbf{c}} \mathbf{B}^{\mathbf{d}} \right) = \\ &= \sum_{\mathbf{c} \in \mathbb{B}_2^m} [(-1)^{\langle \mathbf{c} | \mathbf{c} \rangle}] \eta^{\mathbf{c}} x_{\mathbf{c}}^2 + \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{B}_2^m / 0} z_{\mathbf{d}} \mathbf{B}^{\mathbf{d}} = z_0 + \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{B}_2^m / 0} z_{\mathbf{d}} \mathbf{B}^{\mathbf{d}}, \end{aligned}$$

где  $\Delta = R + I$ . Это произведение позволяет определить три типа норм:

$$\begin{aligned} &1) {}^r N_{\mathcal{Alg}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathcal{X}) := \mathcal{X}\bar{\mathcal{X}}, \quad 2) {}^l N_{\mathcal{Alg}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathcal{X}) = \bar{\mathcal{X}}\mathcal{X}, \\ &3) N_{\mathbf{R}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathcal{X}) = \left\langle {}^r N_{\mathcal{Alg}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathcal{X}) \right\rangle_0 = \left\langle {}^l N_{\mathcal{Alg}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathcal{X}) \right\rangle_0 = \langle \mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} \rangle_0 = \langle \bar{\mathcal{X}}\mathcal{X} \rangle_0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

которые называются 1) правой, 2) левой  $\mathcal{Alg}$ -значными и 3)  $\mathbf{R}$ -значной нормами. Очевидно, что

$${}^r N_{\mathcal{Alg}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathcal{X}), {}^l N_{\mathcal{Alg}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathcal{X}) : \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \rightarrow \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}, N_{\mathbf{R}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathcal{X}) : \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \rightarrow \mathbf{R}.$$

Используя скалярно-значную норму Клиффордова числа  $\mathcal{X}$

$$N_{\mathbf{R}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathcal{X}) = \|\mathcal{X}\|^2 = \text{Tr}(\mathcal{X}\bar{\mathcal{X}}) = \langle \mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} \rangle_0 = \sum_{\mathbf{c} \in \mathfrak{B}_2^m} [(-1)^{\text{Wt}_2(\mathbf{c})}] \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{c}} x_{\mathbf{c}}^2,$$

получаем выражение для расстояния между двумя числами  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Y}$ :

$$\rho_{\mathbf{R}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \|\mathcal{X} - \mathcal{Y}\| = \sqrt{\text{Tr}((\mathcal{X} - \mathcal{Y})(\mathcal{X} - \mathcal{Y}))} = \sqrt{\sum_{\mathbf{c} \in \mathfrak{B}_2^m} [(-1)^{\text{Wt}_2(\mathbf{c})}] \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{c}} z_{\mathbf{c}}^2}, \quad (5.12)$$

где  $Z = \mathcal{X} - \mathcal{Y} = \sum_{\mathbf{c} \in \mathfrak{B}_2^m} z_{\mathbf{c}} \mathbf{B}^{\mathbf{c}}$ . Таким образом, алгебра  $\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, B_1, \dots, B_m)$

трансформируется в  $2^m$ -D пространство  $\mathbf{E}_{2^m}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathbf{R})$ , с квадратичной нормой

$$N_{\mathbf{R}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathcal{X}) = \|\mathcal{X}\|^2 = \sum_{\mathbf{c} \in \mathfrak{B}_2^m} [(-1)^{\text{Wt}_2(\mathbf{c})}] \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{c}} x_{\mathbf{c}}^2.$$

и расстоянием  $\rho_{\mathbf{R}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \sqrt{N_{\mathbf{R}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathcal{X} - \mathcal{Y})}$ . Эти пространства обозначаются так:  $\mathbf{Geo}\left(\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}, \rho^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\right)$ , а их метрическая сигнатура определяется выражениями (5.12).

В малом пространстве  $\mathbf{R}^m = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b})=1} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = \langle \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R}) \rangle_1$  для векторов

$$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m = \langle \mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R}) \rangle_1 \text{ мы имеем } \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b})=1} [(-1)^{\text{Wt}_2(\mathbf{b})}] \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{b}} x_{\mathbf{b}}^2 = - \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b})=1} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{b}} x_{\mathbf{b}}^2 = -\mathbf{x}^2,$$

где  ${}^r N_{\mathcal{Alg}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathbf{x}) = {}^l N_{\mathcal{Alg}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathbf{x}) = N_{\mathbf{R}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ , т.е. порождающее алгебру

Клиффорда пространство превращается в псевдо-метрическое пространство

$$\mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{Geo}\left(\mathbf{R}^m, \rho_{\mathbf{R}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right) = \left\langle \left\langle \mathbf{R}^m, \rho_{\mathbf{R}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\rangle \right\rangle,$$

которое называется геометрией Кэли-Клейна [26-27]. Существует  $m(m+1)/2$  неизоморфных метрических пространств  $\mathbf{Geo}(\mathbf{R}^m, \rho_{\mathbf{R}}^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ .

Для векторов  $\mathbf{x} \in \mathbf{E}_m^{(a_+, b_-, c_0)}(\mathbf{R})$  нормы  $N_{\mathcal{A}lg}^r(\mathbf{x}), N_{\mathcal{A}lg}^l(\mathbf{x})$  являются скалярами:  $N_{\mathcal{A}lg}^r(\mathbf{x}) = N_{\mathcal{A}lg}^l(\mathbf{x}) \equiv N_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})$ . Легко проверить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k \Rightarrow N_{\mathcal{A}lg}^r(\mathbf{x}) &= (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k)(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k)^\dagger = (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k)(\mathbf{v}_k^\dagger \dots \mathbf{v}_2^\dagger \mathbf{v}_1^\dagger) = \\ &= (-1)^k N_{\mathbf{R}}(\mathbf{v}_k) \dots N_{\mathbf{R}}(\mathbf{v}_2) N_{\mathbf{R}}(\mathbf{v}_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k \Rightarrow N_{\mathcal{A}lg}^l(\mathbf{x}) &= (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k)^\dagger (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k) = (\mathbf{v}_k^\dagger \dots \mathbf{v}_2^\dagger \mathbf{v}_1^\dagger)(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k) = \\ &= (-1)^k N_{\mathbf{R}}(\mathbf{v}_1) N_{\mathbf{R}}(\mathbf{v}_2) \dots N_{\mathbf{R}}(\mathbf{v}_k). \end{aligned}$$

Эти равенства важны для определения групп  $\mathbf{Pin}^{(a_-, b_+, c_0)}(m)$  и  $\mathbf{Spin}^{(a_-, b_+, c_0)}(m)$  как произведения единиц Клиффорда.

**Теорема 5.2.** Квадратичная форма  $N_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})$  в  $\mathcal{A}lg_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R})$  обладает следующим свойством  $N_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}\mathbf{y}\dots\mathbf{z}) = N_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})N_{\mathbf{R}}(\mathbf{y})\dots N_{\mathbf{R}}(\mathbf{z})$ .

**Определение 5.5.** Следующие билинейные формы

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{A}lg}^r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \langle \mathbf{y} | \mathbf{x}^\dagger \rangle := \mathbf{y}\mathbf{x}^\dagger, \quad S_{\mathcal{A}lg}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}^\dagger | \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^\dagger \mathbf{y}, \\ \mathbf{S}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &:= \langle S_{\mathcal{A}lg}^r(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_0 = \langle S_{\mathcal{A}lg}^l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle_0 = \langle \mathbf{x}^\dagger \mathbf{y} \rangle_0 = \langle \mathbf{y}\mathbf{x}^\dagger \rangle_0. \end{aligned}$$

называются правой, левой  $\mathcal{A}lg_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$ -значными и  $\mathbf{R}$ -значным скалярными произведениями на  $\mathcal{A}lg_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$ , соответственно. Очевидно, что

$$N_{\mathcal{A}lg}^r(\mathbf{x}) = S_{\mathcal{A}lg}^r(\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad N_{\mathcal{A}lg}^l(\mathbf{x}) = S_{\mathcal{A}lg}^l(\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad N_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

**5.2.6. Множество мнимых единиц.** В этой подсекции мы интересуемся квадратом произвольного элемента из алгебры Клиффорда:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^2 &= \left( \sum_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}_2^m} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \right) \left( \sum_{\mathbf{c} \in \mathcal{B}_2^m} x_{\mathbf{c}} \mathbf{B}^{\mathbf{c}} \right) = \left( \sum_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}_2^m} \sum_{\mathbf{c} \in \mathcal{B}_2^m} x_{\mathbf{b}} x_{\mathbf{c}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{c}} \right) = \\ &= \sum_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}_2^m} (-1)^{\langle \mathbf{b} | \mathbf{R} | \mathbf{b} \rangle} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{b}} x_{\mathbf{b}}^2 + \sum_{\mathbf{b} < \mathbf{c}} \sum_{\mathbf{c}} x_{\mathbf{b}} x_{\mathbf{c}} (\mathbf{B}^{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{c}} + \mathbf{B}^{\mathbf{c}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}) = \\ &= \sum_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}_2^m} (-1)^{\langle \mathbf{b} | \mathbf{R} | \mathbf{b} \rangle} \boldsymbol{\eta}^{\mathbf{b}} x_{\mathbf{b}}^2 + \sum_{\mathbf{b} < \mathbf{c}} \sum_{\mathbf{c}} \left[ 1 + (-1)^{\langle \mathbf{b} | \mathbf{R} | \mathbf{c} \rangle} \right] x_{\mathbf{b}} x_{\mathbf{c}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{c}}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Из (5.13) мы видим, что если для некоторых значений  $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathfrak{B}_2^m$  гипермнимые единицы  $\mathbf{V}^{\mathbf{b}}, \mathbf{V}^{\mathbf{c}}$  антикоммутируют  $\mathbf{V}^{\mathbf{b}}\mathbf{V}^{\mathbf{c}} = -\mathbf{V}^{\mathbf{c}}\mathbf{V}^{\mathbf{b}}$ , то соответствующий им член в последней двойной сумме равен нулю. Это возможно, если  $(-1)^{\langle \mathbf{b}|R'+R|\mathbf{c} \rangle} = -1$ . Для обнуления двойной суммы в (5.13), все множество гипермнимых единиц необходимо разделить на два подмножества: те, для которых равенство  $(-1)^{\langle \tilde{\mathbf{b}}|R'+R|\tilde{\mathbf{c}} \rangle} = -1$  выполняется, и на те, для которых оно не выполняется. Пусть  $\tilde{\mathfrak{B}}_2^m \subset \mathfrak{B}_2^m$  - суть множество из  $M$  антикоммутирующих гипермнимых единиц, для которых равенство  $(-1)^{\langle \tilde{\mathbf{b}}|R'+R|\tilde{\mathbf{c}} \rangle} = -1$  выполняется, т.е.  $\tilde{\mathfrak{B}}_2^m := \left\{ \tilde{\mathbf{b}}^1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}^M \mid \mathbf{V}^{\tilde{\mathbf{b}}^i} \mathbf{V}^{\tilde{\mathbf{b}}^k} = -\mathbf{V}^{\tilde{\mathbf{b}}^k} \mathbf{V}^{\tilde{\mathbf{b}}^i}, \forall i, k = 1, 2, \dots, M \right\}$ .

Пусть многообразие, обозначаемое символом  $\tilde{\mathcal{A}}\text{lg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} := \left\{ \tilde{\chi} \mid \tilde{\chi} = \sum_{\tilde{\mathbf{b}} \in \tilde{\mathfrak{B}}_2^m} x_{\tilde{\mathbf{b}}} \mathbf{V}^{\tilde{\mathbf{b}}} \right\}$

будет натянуто на множество антикоммутирующих гипермнимых единиц  $\{\mathbf{V}^{\tilde{\mathbf{b}}} \mid \tilde{\mathbf{b}} \in \tilde{\mathfrak{B}}_2^m\}$ . Будем полагать, что его размерность  $\dim\{\tilde{\mathcal{A}}\text{lg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}\} = M = |\tilde{\mathfrak{B}}_2^m|$ .

Мы видим, что если  $\tilde{\chi}$  натянут на множество  $\{\mathbf{V}^{\tilde{\mathbf{b}}} \mid \tilde{\mathbf{b}} \in \tilde{\mathfrak{B}}_2^m\}$ , т.е.,  $\tilde{\chi} = \sum_{\tilde{\mathbf{b}} \in \tilde{\mathfrak{B}}_2^m} x_{\tilde{\mathbf{b}}} \mathbf{V}^{\tilde{\mathbf{b}}}$ ,

то  $\tilde{\chi}^2$  является реальным числом:

$$\tilde{\chi}^2 = \sum_{\tilde{\mathbf{b}} \in \tilde{\mathfrak{B}}_2^m} (-1)^{\langle \tilde{\mathbf{b}}|R|\tilde{\mathbf{b}} \rangle} \eta^{\tilde{\mathbf{b}}} x_{\tilde{\mathbf{b}}}^2 = \sum_{\tilde{\mathbf{b}} \in \tilde{\mathfrak{B}}_2^m} (-1)^{\frac{\text{Wt}(\tilde{\mathbf{b}})(\text{Wt}(\tilde{\mathbf{b}})-1)}{2}} \eta^{\tilde{\mathbf{b}}} x_{\tilde{\mathbf{b}}}^2 \in \mathbf{R}.$$

Очевидно, что,  $\tilde{\chi}^{-1} = \tilde{\chi} / \tilde{\chi}^2$ , если  $\tilde{\chi}^2 \neq 0$ . Числа  $(\tilde{\chi} \in \tilde{\mathcal{A}}\text{lg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}) \& (\tilde{\chi}^2 \neq 0)$

можно нормализовать. Действительно, для  $\tilde{\chi}_* = \frac{\tilde{\chi}}{\sqrt{|\tilde{\chi}^2|}} = \sum_{\tilde{\mathbf{b}} \in \tilde{\mathfrak{B}}_2^m} \frac{x_{\tilde{\mathbf{b}}}}{\sqrt{|\tilde{\chi}^2|}} \mathbf{V}^{\tilde{\mathbf{b}}}$ , где

$|\tilde{\chi}^2|$  - абсолютное значение  $\tilde{\chi}^2 \in \mathbf{R}$ , мы имеем  $(\tilde{\chi}_*)^2 = \tilde{\chi}^2 / |\tilde{\chi}^2| = \text{sign} \tilde{\chi}^2 \in \{-1, 0, 1\}$  и  $\tilde{\chi}_*^{-1} = \tilde{\chi}_* \cdot \text{sign}(\tilde{\chi}_*)$ .

**Пример 5.9.** По определению множество исходных гипермнимых единиц

$$\{B_1, B_2, \dots, B_m\} = \{B_1^-, B_2^-, \dots, B_{a_-}^-, B_1^+, B_2^+, \dots, B_{b_+}^+, B_1^0, B_2^0, \dots, B_{c_0}^0\}$$

алгебры  $\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}(\mathbf{R} | 1, B_1, B_2, \dots, B_m)$  есть одно из таких подмножеств. ■

**Определение 5.6.** Клиффордионы, для которых  $(\tilde{x}_*)^2 = -1$ ,  $(\tilde{x}_*)^2 = 0$  и  $(\tilde{x}_*)^2 = 1$ , называются эллиптическими, параболическими и гиперболическими гипермнимыми единицами и обозначаются как  $\dot{i}_-, \dot{i}_0, \dot{i}_+$ , соответственно

Теперь дадим геометрическую интерпретацию мнимым единицам  $\dot{i}_-, \dot{i}_0, \dot{i}_+ \in \tilde{\mathcal{Alg}}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} := \left\{ \tilde{x} \mid \tilde{x} = \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \right\}$ . Многообразие  $\tilde{\mathcal{Alg}}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} := \left\{ \tilde{x} \mid \tilde{x} = \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^m} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} \right\}$  очевидно

имеет линейный конус “нулевых” клиффордионов:

$$\mathbf{Cone} \left\{ \tilde{\mathcal{Alg}}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\} := \left\{ \tilde{x} \mid N_{\mathbf{R}}(\tilde{x}) = \tilde{x} \bar{\tilde{x}} = 0 \right\}.$$

Этот линейный конус разделяет два открытых множества, для которых  $N_{\mathbf{R}}(\tilde{x}) > 0$  и  $N_{\mathbf{R}}(\tilde{x}) < 0$ . Мы определяем множество “положительных” и “отрицательных” клиффордионов:

$$\begin{aligned} \mathbf{Pos} \left\{ \tilde{\mathcal{Alg}}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\} &:= \left\{ \tilde{x} \in \tilde{\mathcal{Alg}}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \mid N_{\mathbf{R}}(\tilde{x}) > 0 \right\}, \\ \mathbf{Neg} \left\{ \tilde{\mathcal{Alg}}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\} &:= \left\{ \tilde{x} \in \tilde{\mathcal{Alg}}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \mid N_{\mathbf{R}}(\tilde{x}) < 0 \right\}. \end{aligned}$$

При этом  $\mathbf{Pos} \left\{ \tilde{\mathcal{Alg}}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\}$  и  $\mathbf{Neg} \left\{ \tilde{\mathcal{Alg}}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\}$  являются псевдоевклидовыми пространствами, а мнимые единицы могут иметь как положительные, так и отрицательные нормы.

Поэтому введем в рассмотрение мнимые единицы двух сортов  $\bar{h}\dot{i}$  и  $h\dot{i}$ :

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{R}}(\bar{h}\dot{i}) &= \bar{h}\dot{i} \cdot \bar{h}\dot{i} = -(\bar{h}\dot{i})^2 \in \{+1, 0, -1\}, \\ N_{\mathbf{R}}(h\dot{i}) &= h\dot{i} \cdot h\dot{i} = +(h\dot{i})^2 \in \{-1, 0, +1\}. \end{aligned}$$

Мы знаем, что Евклидово пространство обладает единичной сферой, псевдоевклидово же пространство обладает двумя гиперповерхностями:

$$\begin{aligned} \mathbf{PRS}_{(a_-, b_+, c_0)}^{M-1}(+1) &:= \left\{ \dot{i} \in \mathbf{Pos} \left\{ \tilde{\mathcal{Alg}}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\} \mid N_{\mathbf{R}}(\dot{i}) = +1 \right\}, \\ \mathbf{PHS}_{(a_-, b_+, c_0)}^{M-1}(-1) &:= \left\{ \dot{i} \in \mathbf{Neg} \left\{ \tilde{\mathcal{Alg}}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\} \mid N_{\mathbf{R}}(\dot{i}) = -1 \right\}, \end{aligned}$$

где  $M = |\mathfrak{B}_2^m| = \dim \left\{ \tilde{\mathcal{Alg}}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)} \right\}$ . Такие гиперповерхности называются псевдо-

римановыми  $\mathbf{PRS}_{(a_-, b_+, c_0)}^{M-1}(+1) \subset \mathbf{Pos}\left\{\tilde{\mathcal{A}}\mathbf{lg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}\right\}$  и псевдо-гиперболическими сферами  $\mathbf{PHS}_{(a_-, b_+, c_0)}^{M-1}(-1) \subset \mathbf{Neg}\left\{\tilde{\mathcal{A}}\mathbf{lg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}\right\}$ , соответственно.

Мы нуждаемся в  $\mathbf{i}^2 = -1$ . Это возможно в двух случаях:

$$\begin{aligned} \left((\bar{h}\mathbf{i})^2 = -1\right) \& \left(N_{\mathbf{R}}(\bar{h}\mathbf{i}) = \bar{h}\mathbf{i}\bar{h}\bar{\mathbf{i}} = +1\right) \Leftrightarrow \left(\bar{h}\mathbf{i} \in \mathbf{PRS}_{(a_-, b_+, c_0)}^{M-1}(+1)\right), \\ \left((h\mathbf{i})^2 = -1\right) \& \left(N_{\mathbf{R}}(h\mathbf{i}) = h\mathbf{i}h\mathbf{i} = -1\right) \Leftrightarrow \left(h\mathbf{i} \in \mathbf{PHS}_{(a_-, b_+, c_0)}^{M-1}(-1)\right). \end{aligned}$$

т.е., когда  $\bar{h}\bar{\mathbf{i}} = -\bar{h}\mathbf{i}$  или  $h\bar{\mathbf{i}} = +h\mathbf{i}$ . Следовательно, это возможно в случаях, описанных следующей теоремой.

**Теорема 5.3.** Пусть

$$\begin{aligned} {}^h\tilde{\mathfrak{B}}_2^m &:= \left\{\tilde{\mathbf{b}}^1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}^M \mid \left(\mathbf{B}^{\tilde{\mathbf{b}}^i} \mathbf{B}^{\tilde{\mathbf{b}}^k} = -\mathbf{B}^{\tilde{\mathbf{b}}^k} \mathbf{B}^{\tilde{\mathbf{b}}^i}\right) \& \left(\left(\mathbf{B}^{\tilde{\mathbf{b}}}\right)^\dagger = +\mathbf{B}^{\tilde{\mathbf{b}}}\right)\right\}, \\ {}^{\bar{h}}\tilde{\mathfrak{B}}_2^m &:= \left\{\tilde{\mathbf{b}}^1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}^M \mid \left(\mathbf{B}^{\tilde{\mathbf{b}}^i} \mathbf{B}^{\tilde{\mathbf{b}}^k} = -\mathbf{B}^{\tilde{\mathbf{b}}^k} \mathbf{B}^{\tilde{\mathbf{b}}^i}\right) \& \left(\left(\mathbf{B}^{\tilde{\mathbf{b}}}\right)^\dagger = -\mathbf{B}^{\tilde{\mathbf{b}}}\right)\right\}, \end{aligned}$$

Тогда в первом случае  $\bar{h}\mathbf{i} \in \mathbf{PRS}_{(a_-, b_+, c_0)}^{M-1}(+1)$  и  $\left(\langle \tilde{\mathbf{b}} \mid R' + R \mid \tilde{\mathbf{c}} \rangle = 1\right) \& \left(\langle \tilde{\mathbf{b}} \mid \Delta \mid \tilde{\mathbf{b}} \rangle = 1\right)$

т.е., когда  $\left(\left(\mathbf{Wt}_2(\tilde{\mathbf{b}})\mathbf{Wt}_2(\tilde{\mathbf{c}}) \oplus \langle \tilde{\mathbf{c}} \mid \tilde{\mathbf{b}} \rangle\right) = 1\right) \& \left(\mathbf{Wt}(\tilde{\mathbf{b}})(\mathbf{Wt}(\tilde{\mathbf{b}}) + 1)/2 = \text{четное}\right)$ . И во втором

случае  $h\mathbf{i} \in \mathbf{PHS}_{(a_-, b_+, c_0)}^{M-1}(-1)$  и  $\left(\langle \tilde{\mathbf{b}} \mid R' + R \mid \tilde{\mathbf{c}} \rangle = 1\right) \& \left(\langle \tilde{\mathbf{b}} \mid \Delta \mid \tilde{\mathbf{b}} \rangle = 0\right)$ , т.е., когда

$$\left(\left(\mathbf{Wt}_2(\tilde{\mathbf{b}})\mathbf{Wt}_2(\tilde{\mathbf{c}}) \oplus \langle \tilde{\mathbf{c}} \mid \tilde{\mathbf{b}} \rangle\right) = 1\right) \& \left(\mathbf{Wt}(\tilde{\mathbf{b}})(\mathbf{Wt}(\tilde{\mathbf{b}}) + 1)/2 = \text{нечетное}\right).$$

**Пример 5.10.** По определению множество всех родительских гипермнимых единиц  ${}^1\tilde{\mathfrak{B}}_2^m$  является одним из  ${}^{\bar{h}}\tilde{\mathfrak{B}}_2^m$  ( ${}^1\tilde{\mathfrak{B}}_2^m = {}^{\bar{h}}\tilde{\mathfrak{B}}_2^m$ ):

$${}^1\tilde{\mathfrak{B}}_2^m := \left\{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^M \mid \mathbf{Wt}_2(\mathbf{b}^k) = 1, k = 1, 2, \dots, M\right\}.$$

так как  $B_i B_k = -B_k B_i$ ,  $(\forall k, i = 1, 2, \dots, M) \& (k \neq i)$ . Пусть, для примера

$${}^1\tilde{\mathcal{A}}\mathbf{lg}_{2^m}^{(a_-, b_+, 0)} = \left\{\tilde{\mathbf{x}} \mid \left(\tilde{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{b} \in {}^1\tilde{\mathfrak{B}}_2^m} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}}\right) \& \left(\mathbf{b} \in {}^1\tilde{\mathfrak{B}}_2^m\right)\right\} \equiv \left\langle \mathcal{A}\mathbf{lg}_{2^m}^{(a_-, b_+, 0)} \right\rangle_1.$$

Следовательно, для всех  $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^m x_k B^k \in \left\langle \mathcal{A}\mathbf{lg}_{2^m}^{(a_-, b_+, 0)} \right\rangle_1$  мы имеем  $\mathbf{x}_* = \sum_{k=1}^m \frac{x_k}{\sqrt{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{R}}}} B^k$

и  $\|\mathbf{x}_*\|^2 = \mathbf{x}_*^2 \in \{-1, 0, 1\}$ , т.е.,

$$\mathbf{x}_* \in \mathbf{Cone}\left\{\tilde{\mathcal{A}}\mathbf{lg}_{2^m}^{(a_-, b_+, 0)}\right\}, \text{ или } \mathbf{x}_* \in \mathbf{PRS}_{(a_-, b_+, 0)}^{m-1}(+1) \text{ или } \mathbf{x}_* \in \mathbf{PHS}_{(a_-, b_+, 0)}^{m-1}(-1).$$

Когда  $M = m$  все псевдо-римановы сферы  $\{\mathbf{PRS}_{(a_-, b_+, 0)}^{m-1}(+1)\}_{b_+=0}^{m-1}$  изоморфны

$$\{\mathbf{E}^{b_+}(\mathbf{R}) \times \mathbb{S}^{m-1-b_+}\}_{b_+=0}^{m-1} : \text{diff} \{\mathbf{PRS}_{(a_-, b_+, 0)}^{m-1}(+1)\} = \mathbf{E}^{b_+}(\mathbf{R}) \times \mathbb{S}^{m-1-b_+}, \quad u_+ = 0, 1, \dots, m-1,$$

а псевдо-гиперболические пространства  $\{\mathbf{PHS}_{(a_-, b_+, 0)}^{m-1}(-1)\}_{b_+=1}^m$  гомеоморфны

$$\mathbb{S}^{b_+-1} \times \mathbf{E}^{m-b_+}(\mathbf{R}) : \text{diff} \{\mathbf{PHS}_{(a_-, b_+, 0)}^{m-1}(-1)\} = \mathbb{S}^{b_+-1} \times \mathbf{E}^{m-b_+}(\mathbf{R}), \quad b_+ = 1, 2, \dots, m, \text{ где } \mathbb{S}^k \text{ есть}$$

единичная Евклидова сфера размерности  $k$ , а  $\mathbf{PRS}_{(m, 0, 0)}^{m-1}(+1) \approx \mathbb{S}^{m-1}$  суть

стандартная сфера в Евклидовом пространстве  $\mathbf{E}_{m, 0, 0}^m(\mathbf{R}) \equiv \mathbf{E}^m(\mathbf{R})$ . (Напомним, что

по определению  $\mathbf{E}^0$  - суть точка, а по определению  $\mathbb{S}^0$  состоит из двух точек).

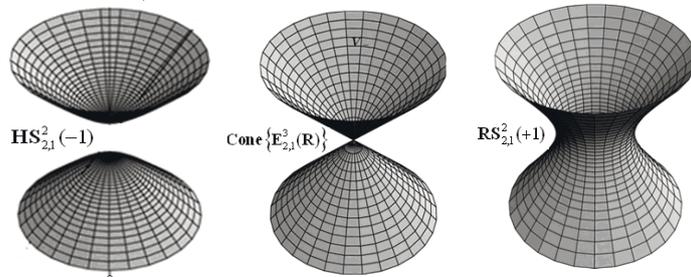


Рис. 5.2. Множество  $\mathbf{HS}_{2,1}^2(-1)$  внутри  $\text{Cone}\{\mathbf{E}_{2,1}^3(\mathbf{R})\}$  и вне его  $\mathbf{RS}_{2,1}^2(+1)$

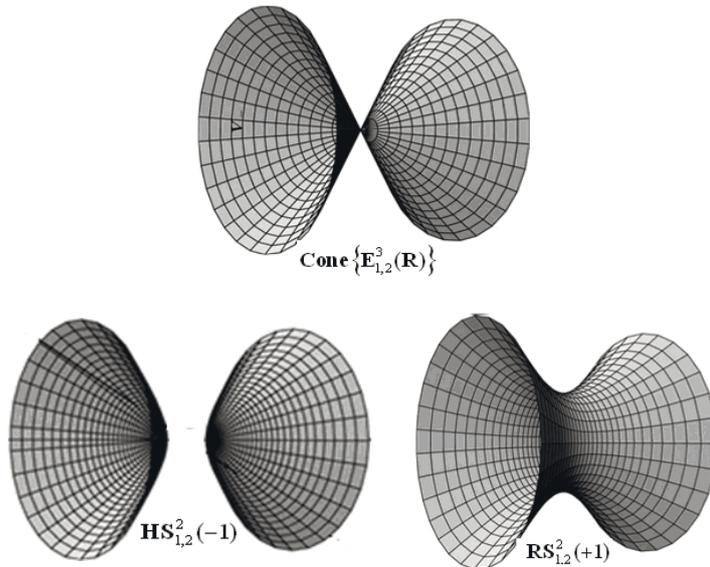


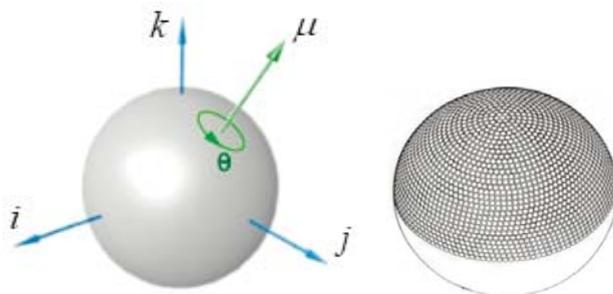
Рис. 5.3.  $\mathbf{HS}_{1,2}^2(-1)$  внутри  $\text{Cone}\{\mathbf{E}_{1,2}^3(\mathbf{R})\}$  и  $\mathbf{RS}_{1,2}^2(+1)$  вне его.

Итак,

$$\mathbf{PRS}_{(a_-, b_+, c_0)}^{m-1} (+1) = \mathbb{S}^{m-1-b_+} \times \mathbf{E}^{b_+}(\mathbf{R}), \quad \mathbf{PHS}_{(a_-, b_+, 0)}^{m-1} (-1) = \mathbb{S}^{b_+-1} \times \mathbf{E}^{m-b_+}(\mathbf{R})$$

и  $\mathbf{PHS}_{(a_-, b_+, 0)}^{m-1} (-1) \approx \mathbf{PRS}_{m-a_-, m-b_+}^{m-1} (+1)$  для  $a_- = 1, 2, \dots, m$ . В частности, если

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \in \mathbf{E}_{0, m, 0}^m(\mathbf{R}), \text{ то мы получаем } \mathbf{x}_* = \sum_{k=1}^m \frac{x_k}{\sqrt{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{R}}}} B^k \in \mathbb{S}^{m-1} \text{ (см. рис. 5.4).} \quad \blacksquare$$



**Рис 5.4.** Каждый 3-D вектор (в общем случае каждый  $n$ -D  $\mathbf{x}_* \in \mathbb{S}^{m-1} \subset \mathbf{E}_{0, m, 0}^m(\mathbf{R}) = \mathbf{E}^m(\mathbf{R})$ ) единичной длины может играть роль мнимой единицы. Например, каждый 3-D вектор  $\mathbf{x}_* \in \mathbb{S}^2$  единичной длины - суть мнимая единица, к числу которых принадлежат мнимые кватернионные единицы  $i, j, k$

### 5.3. Алгебраические модели сигналов и изображений

Главной целью этого раздела является изучение многоканальных  $2^K$ -компонентных изображений

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_0(\mathbf{x}) \\ f_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ f_{2^K-1}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

как Клиффордово-значных сигналов типа

$$f(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{b} \in \mathfrak{B}_2^K} f_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) J_{\mathbf{b}} = \sum_{s=0}^K \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b})=s} f_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) J_{\mathbf{b}} = f_0(\mathbf{x}) J_0 + \left( \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b})=1} f_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) J_{\mathbf{b}} + \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b})=2} f_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) J_{\mathbf{b}} + \dots + \sum_{\text{Wt}(\mathbf{b})=m} f_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) J_{\mathbf{b}} \right), \quad (5.14)$$

принимающих значения в алгебре Клиффорда  $\text{Alg}_{2^K}^{\text{Vis}(u_-, v_+, w_0)}$ , где  $\{f_{\mathbf{b}}(\mathbf{x})\}_{\mathbf{b}=0}^{2^K-1}$  -

скалярно-значные сигналы  $f_0(\mathbf{x}), f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{2^k-1}(\mathbf{x})$  и  $J_{\mathbf{b}} := J_1^{b_1} J_2^{b_2} \dots J_K^{b_K}$  - совокупность из  $2^K$  гипермнимых единиц.

Для дальнейшего введем операцию  $\dagger$  сопряжения сигнала  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \mapsto \mathbf{f}^\dagger(\mathbf{x})$ :  $f^\dagger(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{B}_2^K} f_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) (\mathbf{J}^{\mathbf{b}})^\dagger$ , где  $\dagger$  - суть автоморфизм в  $\text{Alg}_{2^K}^{\text{Vis}(u_-, v_+, w_0)}$ , удовлетворяющий для каждой пары сигналов  $f(\mathbf{x})$  и  $g(\mathbf{x})$  следующему свойству:  $(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}))^\dagger = g^\dagger(\mathbf{x})f^\dagger(\mathbf{x})$ , что является обобщением стандартной операции комплексного сопряжения. В частности, когда  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \langle \text{Alg}_{2^K}^{\text{Vis}(v_-, u_+, w_0)} \rangle_1$  является векторно-значной функцией, мы имеем  $\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{f}^\dagger(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^\dagger(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{w(\mathbf{b})=1} \eta_{\mathbf{b}} f_{\mathbf{b}}^2(\mathbf{x})$ , что является квадратом псевдоевклидовой нормы на  $\text{Vis}_{(v_-, u_+, w_0)}^K(\mathbf{R})$ .

**5.3.1. Геометрия m-D пространства.** Как мы знаем, произвольную алгебру Клиффорда  $\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$  можно превратить в псевдо-метрическое пространство  $\text{Geo}_{2^m}(\text{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)})$ , если ввести в ней псевдо-расстояние между любой парой чисел Клиффорда  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  стандартным образом. В этом случае в «малом» пространстве  $\mathbf{R}^m = \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = \sum_{w(\mathbf{b})=1} x_{\mathbf{b}} \mathbf{B}^{\mathbf{b}} = x_1 B_1 + \dots + x_m B_m\}$  индуцируется та же самая метрика и оно превращается в псевдо-метрическое пространство  $\mathbf{R}^m \rightarrow \text{Geo}(\mathbf{R}^m) = \langle \langle \mathbf{R}^m, \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \rangle$ , которое называется геометрией Кэли-Клейна. Оказывается, что существует  $m$  неизоморфных метрических пространств  $\text{Geo}(\mathbf{R}^m)$ . Очевидно, что

$$\mathbf{R}^n \rightarrow \text{Geo}^{Sp(p_+, q_-, r_0)}(\mathbf{R}^n) = \langle \langle \mathbf{R}^n, \rho^{Sp(p_+, q_-, r_0)} \rangle \rangle, \quad \mathbf{V}^K \rightarrow \text{Geo}^{\text{Vis}(u_+, v_-, w_0)}(\mathbf{V}^K) = \langle \langle \mathbf{V}^K, \rho^{\text{Vis}(u_+, v_-, w_0)} \rangle \rangle,$$

где  $\text{Geo}^{Sp(p_+, q_-, r_0)}(\mathbf{R}^n)$  – пространственная геометрия Кэли-Клейна для физического пространства  $\mathbf{R}^n$  с метрикой  $\rho^{Sp(p_+, q_-, r_0)}$  и перцептуальная

геометрия Кэли-Клейна  $\mathbf{Geo}^{Vis(u_+, v_-, w_0)}(\mathbf{V}^K)$  – для перцептуального пространства с метрикой  $\rho^{Vis(u_+, v_-, w_0)}$ . Каждая алгебра  $\mathbf{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)}$  может быть декомпозирована на две части:  $\mathbf{Alg}_{2^m} = {}^0\mathbf{Alg}_{2^m} + {}^1\mathbf{Alg}_{2^m} = \sum_{s=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \mathbf{Vec}^{2s} + \sum_{s=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \mathbf{Vec}^{2s+1}$ , где  ${}^0\mathbf{Alg}_{2^m} = \sum_{s=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \mathbf{Vec}^{2s}$  и  ${}^1\mathbf{Alg}_{2^m} = \sum_{s=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \mathbf{Vec}^{2s+1}$  четная и нечетная части, соответственно. Оказывается, что все линейные изометрические преобразования пространства  $\mathbf{Geo}(\mathbf{R}^m) = \langle \langle \mathbf{R}^m, \rho(x, y) \rangle \rangle$  находятся в  ${}^0\mathbf{Alg}_{2^m}$ .

Числа Клиффорда  $\mathcal{E} \in {}^0\mathbf{Alg}_{2^m}$  единичного модуля представляют группу вращений пространства  $\mathbf{Geo}(\mathbf{R}^m) = \langle \langle \mathbf{R}^m, \rho(x, y) \rangle \rangle$ , которая называется спинорной группой и обозначается как  $\mathbf{Spin}(\mathbf{Geo}(\mathbf{R}^m))$ .

Пусть  $\mathcal{E} \in \mathbf{Spin}(\mathbf{Geo}(\mathbf{R}^m))$  - подобное число Клиффорда, тогда оно может быть записано в обобщенной форме Эйлера

$$\mathcal{E} = e^{i\varphi} = \cos \varphi + \dot{t} \cdot \sin \varphi \in \mathbf{Spin}(\mathbf{Alg}_{2^m}).$$

**Теорема 5.4.** Все преобразования вида  $\mathbf{x}' = e^{i\varphi/2} \cdot \mathbf{x} \cdot e^{-i\varphi/2}$  формируют группу  $\mathbf{SO}(\mathbf{Geo}(\mathbf{R}^m))$  изометрических вращений «малого» метрического пространства  $\mathbf{Geo}(\mathbf{R}^m)$ .

**Теорема 5.5.** Все множество движений пространства  $\mathbf{Geo}(\mathbf{R}^m)$

$$\mathbf{z}' = e^{i\varphi/2} \cdot \mathbf{z} \cdot e^{-i\varphi/2} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{z}, \mathbf{z}', \mathbf{w} \in \mathbf{Geo}(\mathbf{R}^m).$$

формирует группу  $\mathbf{Mov}(\mathbf{Geo}(\mathbf{R}^m))$  движений этого пространства.

**5.3.2. Алгебраические модели n-D изображений.** В настоящей работе  $nD$  и  $2^n$ -D изображения интерпретируются как сигналы, зависящие от Клиффордовских переменных:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{f}} : \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathbf{Alg}_{2^n}^{Sp(p_-, q_+, r_0)} (\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, \dots, I_n) \right\} &\rightarrow \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathbf{Alg}_{2^m}^{VC(u_-, v_+, w_0)} (\mathbf{R} | 1, J_1, \dots, J_m) \right\}, \\ \mathbf{f} : \mathbf{Vec}^1 \left\{ \mathbf{Alg}_{2^n}^{Sp(p_-, q_+, r_0)} (\mathbf{R} | 1, I_1, I_2, \dots, I_n) \right\} &\rightarrow \mathbf{Alg}_{2^m}^{VC(u_-, v_+, w_0)} (\mathbf{R} | 1, J_1, \dots, J_m). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Первый тип - суть  $m$  -канальные изображения:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}) &= \vec{\mathbf{f}}(x_1 I_1 + x_2 I_2 + \dots + x_n I_n) = \\ &= f_1(x_1 I_1 + x_2 I_2 + \dots + x_n I_n) \cdot J_1 + f_2(x_1 I_1 + x_2 I_2 + \dots + x_n I_n) \cdot J_2 + \dots \\ &\quad \dots + f_{m-1}(x_1 I_1 + x_2 I_2 + \dots + x_n I_n) \cdot J_{m-1} = (f_1, f_2, \dots, f_{m-1}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Второй тип -  $2^m$  -канальные изображения:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f \left( \sum_{\mathbf{b} \in \mathbf{vec}^1 \{ \mathbb{B}_2^n \}} x_{\mathbf{b}} \mathbf{I}^{\mathbf{b}} \right) = f(\vec{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(x_1 I_1 + x_2 I_2 + \dots + x_n I_n) = \\ &= f_0(x_1 I_1 + x_2 I_2 + \dots + x_n I_n) + \dots + f_{m-1}(x_1 I_1 + x_2 I_2 + \dots + x_n I_n) \cdot J_{m-1} + \\ &\quad + f_m(x_1 I_1 + x_2 I_2 + \dots + x_n I_n) \cdot J_1 J_2 + \dots + f_{\frac{m(m+1)-1}{2}}(x_1 I_1 + x_2 I_2 + \dots + x_n I_n) \cdot J_{m-1} J_m + \dots \\ &\quad + f_{\frac{n(n+1)}{2}}(x_1 I_1 + x_2 I_2 + \dots + x_n I_n) \cdot J_1 J_2 J_3 + \dots + f_{\frac{2n^2+1}{3}}(x_1 I_1 + x_2 I_2 + \dots + x_n I_n) \cdot J_{n-2} J_{n-1} J_n + \dots \\ &\quad \dots + f_{2^{m-1}}(x_1 I_1 + x_2 I_2 + \dots + x_n I_n) J_1 J_2 \cdots J_m = (f_0, f_1, f_2, \dots, f_{2^{m-1}}), \end{aligned}$$

где  $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 I_1 + x_2 I_2 + \dots + x_n I_n) \in \mathbf{R}^n$ .

**Теорема 5.6.** Преобразования

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{p}, \quad \mathbf{x}'' = \lambda \mathbf{x} \quad (5.17)$$

называются трансляциями и масштабными преобразованиями пространства  $\mathbf{Geo}_{2^m}^{(a_+, b_-, c_0)}$ .

Они формируют трансляционные  $\mathbf{Tr}(\mathbf{Geo}_{2^m}^{(a_+, b_-, c_0)})$ , а также масштабные группы преобразований  $\mathbf{Sc}(\mathbf{Geo}_m^{(a_+, b_-, c_0)})$ . В частности, преобразования

$$\mathbf{Geo}_m^{(p_-, q_+, r_0)} \rightarrow \mathbf{Geo}_m^{(p_-, q_+, r_0)} : \begin{cases} \vec{\mathbf{x}}' \rightarrow \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{p}}, \\ \vec{\mathbf{x}}' \rightarrow \lambda \vec{\mathbf{x}}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Geo}_m^{(u_+, v_-, w_0)} &\rightarrow \mathbf{Geo}_m^{(u_+, v_-, w_0)} : \begin{cases} \bar{\mathbf{f}}' = \bar{\mathbf{f}} + \bar{\mathbf{g}}, \\ \bar{\mathbf{f}}' = \lambda \bar{\mathbf{f}}, \end{cases} \\ \mathbf{Geo}_m^{(p_-, q_+, r_0)} &\rightarrow \mathbf{Geo}_m^{(p_-, q_+, r_0)} : \begin{cases} \mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{p}, \\ \mathbf{x}' \rightarrow \lambda \mathbf{x}, \end{cases} \\ \mathbf{Geo}_m^{(u_+, v_-, w_0)} &\rightarrow \mathbf{Geo}_m^{(u_+, v_-, w_0)} : \begin{cases} f' = f + g, \\ f' = \lambda f \end{cases} \end{aligned}$$

называются трансляциями и масштабными преобразованиями  $m$ -D и  $2^m$ -D пространств  $\mathbf{Geo}_m^{(p_-, q_+, r_0)}$ ,  $\mathbf{Geo}_m^{(u_+, v_-, w_0)}$  и  $\mathbf{Geo}_{2^m}^{(p_-, q_+, r_0)}$ ,  $\mathbf{Geo}_{2^m}^{(u_+, v_-, w_0)}$ , соответственно.

Они формируют трансляционные  $\mathbf{Tr}(\mathbf{Geo}_m^{(p_-, q_+, r_0)})$ ,  $\mathbf{Tr}(\mathbf{Geo}_{2^m}^{(u_+, v_-, w_0)})$ ,  $\mathbf{Tr}(\mathbf{Geo}_m^{(u_+, v_-, w_0)})$ ,  $\mathbf{Tr}(\mathbf{Geo}_{2^m}^{(u_+, v_-, w_0)})$ , а также масштабные группы преобразований  $\mathbf{Sc}(\mathbf{Geo}_m^{(p_-, q_+, r_0)})$ ,  $\mathbf{Sc}(\mathbf{Geo}_{2^m}^{(u_+, v_-, w_0)})$ ,  $\mathbf{Sc}(\mathbf{Geo}_m^{(p_-, q_+, r_0)})$ ,  $\mathbf{Sc}(\mathbf{Geo}_{2^m}^{(u_+, v_-, w_0)})$ .

Как известно, обобщенные комплексные числа и классические кватернионы единичного модуля представимы в форме Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi. \quad (5.18)$$

Спиноры Клиффорда  $\mathcal{E} \in \mathbf{Spin}(\mathcal{Alg}_{2^m}^{(a_-, b_+, c_0)})$  с единичным модулем могут быть записаны также в Эйлеровской форме

$$\mathcal{E} = e^{i\varphi} = \cos \varphi + \dot{i} \cdot \sin \varphi \quad (5.19)$$

где  $\varphi$  - угол вращения вокруг  $\dot{i}$ .

**Теорема 5.6.** Преобразования

$$\mathbf{x}' = e^{i\varphi_1} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}'' = \mathbf{x} \cdot e^{-i\varphi_2}, \quad \mathbf{x}''' = e^{i\varphi_1/2} \cdot \mathbf{x} \cdot e^{-i\varphi_2/2} \quad (5.20)$$

являются вращениями пространства  $\mathbf{Geo}_{2^m}^{(a_+, b_-, c_0)}$  и формируют группы  $\mathbf{Rot}_L(\mathbf{Geo}_{2^m}^{(a_+, b_-, c_0)})$ ,  $\mathbf{Rot}_R(\mathbf{Geo}_{2^m}^{(a_+, b_-, c_0)})$ ,  $\mathbf{Rot}_{LR}(\mathbf{Geo}_{2^m}^{(a_+, b_-, c_0)})$  левых, правых и двусторонних вращений, соответственно.

**Доказательство.** Действительно,

$$\begin{aligned}\|x'\| &= \|e^{i\varphi_1} \cdot x\| = \|e^{i\varphi_1}\| \cdot \|x\| = \|x\|, \\ \|x''\| &= \|x \cdot e^{-i_2\varphi_2}\| = \|x\| \cdot \|e^{-i_2\varphi_2}\| = \|x\|, \\ \|Q'''\| &= \|e^{i\varphi_1/2} \cdot x \cdot e^{-i\varphi_2/2}\| = \|e^{i\varphi_1/2}\| \cdot \|x\| \cdot \|e^{-i\varphi_2/2}\| = \|x\|.\end{aligned}$$

**Теорема 5.7.** Преобразования

$$x' = e^{i\varphi_1} \cdot x + y, \quad x'' = x \cdot e^{-i_2\varphi_2} + y, \quad x''' = e^{i\varphi_1/2} \cdot x \cdot e^{-i_2\varphi_2/2} + y \quad (5.21)$$

формируют группы левых, правых и двусторонних движений  $\mathbf{Mov}_L(\mathbf{Geo}_{2^m}^{(a_+, b_-, c_0)})$ ,  $\mathbf{Mov}_R(\mathbf{Geo}_{2^m}^{(a_+, b_-, c_0)})$ ,  $\mathbf{Mov}_{LR}(\mathbf{Geo}_{2^m}^{(a_+, b_-, c_0)})$ .

В частности, для  $LR$ -преобразования (5.21), мы имеем

$$\begin{aligned}(x_0''' + \vec{x}''' + {}''x^{>1}) &= e^{i\varphi/2} \cdot (x_0 + \vec{x} + x^{>1}) \cdot e^{-i\varphi/2} = \\ &= e^{i\varphi/2} \cdot x_0 \cdot e^{-i\varphi/2} + e^{i\varphi/2} \vec{x} e^{-i\varphi/2} + e^{i\varphi/2} \cdot x^{>1} \cdot e^{-i\varphi/2} = \\ &= x_0 + e^{i\varphi/2} \cdot \vec{x} \cdot e^{-i\varphi/2} + e^{i\varphi/2} \cdot x^{>1} \cdot e^{-i\varphi/2},\end{aligned}$$

где  $x_0''' = x_0$  и  $\vec{x}''' = e^{i\varphi/2} \cdot \vec{x} \cdot e^{-i\varphi/2}$ ,  ${}''x^{>1} = e^{i\varphi/2} \cdot x^{>1} \cdot e^{-i\varphi/2}$ .

Следовательно, преобразования

$$\vec{x}''' = e^{i\varphi/2} \cdot \vec{x} \cdot e^{-i\varphi/2}, \quad (5.22)$$

являются вращениями  $\mathbf{Geo}_m^{(a_+, b_-, c_0)}$ -пространства вокруг вектора  $\vec{i}$  и формируют группу вращений  $\mathbf{Rot}(\mathbf{Geo}_m^{(a_+, b_-, c_0)})$ . Формула (5.22) определяет так называемое спинорное представление группы вращения  $\mathbf{Rot}(\mathbf{Geo}_m^{(a_+, b_-, c_0)})$ .

**Теорема 5.8.** Каждое движение  $\mathbf{Geo}_m^{(a_+, b_-, c_0)}$ -пространства представляется в следующей форме

$$\vec{x}' = e^{i\varphi/2} \cdot \vec{x} \cdot e^{-i\varphi/2} + \vec{p}. \quad (5.23)$$

Обсудим теперь геометрические искажения изображений. Эти искажения будут вызваны пространственными и перцептуальными преобразованиями.

Пространственные преобразования:

- трансляции:  $\vec{x}' \rightarrow \vec{x} + \vec{p}$ ,
- вращения:  $\vec{r}' = e^{i\varphi/2} \cdot \vec{r} \cdot e^{-i\varphi/2}$ ,
- дилатации:  $\vec{r}' \rightarrow \lambda \vec{r}$ .
- трансляции:  $x' \rightarrow x + p$ ,
- вращения:  $x' = e^{i\varphi/2} \cdot x \cdot e^{-i\varphi/2}$ ,
- дилатации:  $x' \rightarrow \lambda x$ .

Перцептуальные преобразования:

- трансляции:  $\vec{f}' \rightarrow \vec{f} + \vec{p}$ ,
- вращения:  $\vec{f}' = e^{i\varphi/2} \cdot \vec{f} \cdot e^{-i\varphi/2}$ ,
- дилатации:  $\vec{f}' \rightarrow \lambda \vec{f}$ .
- трансляции:  $f' \rightarrow f + p$ ,
- вращения:  $f' = e^{i\varphi/2} \cdot f \cdot e^{-i\varphi/2}$ ,
- дилатации:  $f' \rightarrow \lambda f$ .

Введем в рассмотрение четыре типа изображений:

$$\vec{f}(\vec{x}) : \text{Geo}_m^{(p_+, q_+, r_0)} \rightarrow \text{Vec}^1(\text{Alg}_{2^m}^{(u_-, v_+, w_0)}), \quad f(\vec{x}) : \text{Geo}_m^{(p_+, q_+, r_0)} \rightarrow \text{Alg}_{2^m}^{(u_-, v_+, w_0)},$$

$$\vec{f}(x) : \text{Alg}_{2^m}^{(p_-, q_+, r_0)} \rightarrow \text{Vec}^1(\text{Alg}_{2^m}^{(v_-, u_+, w_0)}), \quad f(x) : \text{Alg}_{2^m}^{(p_-, q_+, r_0)} \rightarrow \text{Alg}_{2^m}^{(u_-, v_+, w_0)}.$$

Если  $\vec{f}(\vec{x})$ ,  $f(\vec{x})$ ,  $\vec{f}(x)$ ,  $f(x)$  - исходные изображения, а  ${}^{\mu, \dot{t}_2, \psi, \bar{q}} \vec{f}_{\lambda, \dot{t}_1, \varphi, \bar{p}}(\vec{x})$ ,  ${}^{\mu, \dot{t}_2, \psi, \bar{q}} f_{\lambda, \dot{t}_1, \varphi, \bar{p}}(\vec{x})$ ,  ${}^{\mu, \dot{t}_2, \psi, \bar{q}} \vec{f}_{\lambda, \dot{t}_1, \varphi, p}(x)$ ,  ${}^{\mu, \dot{t}_2, \psi, \bar{q}} f_{\lambda, \dot{t}_1, \varphi, p}(x)$  - их геометрически искаженные версии, то они связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} {}^{\mu, \dot{t}_2, \psi, \bar{q}} \vec{f}_{\lambda, \dot{t}_1, \varphi, \bar{p}}(\vec{x}) &= \mu e^{i_2 \psi / 2} \vec{f}(\lambda e^{i_1 \varphi / 2} \cdot \vec{x} \cdot e^{-i_1 \varphi / 2} + \vec{p}) e^{i_2 \psi / 2} + \bar{q}, \\ {}^{\mu, \dot{t}_2, \psi, q} f_{\lambda, \dot{t}_1, \varphi, \bar{p}}(\vec{x}) &= \mu e^{i_2 \psi / 2} f(\lambda e^{i_1 \varphi / 2} \cdot \vec{x} \cdot e^{-i_1 \varphi / 2} + \vec{p}) e^{i_2 \psi / 2} + q, \\ {}^{\mu, \dot{t}_2, \psi, \bar{q}} \vec{f}_{\lambda, \dot{t}_1, \varphi, p}(x) &= \mu e^{i_2 \psi / 2} \vec{f}(\lambda e^{i_1 \varphi / 2} \cdot x \cdot e^{-i_1 \varphi / 2} + p) e^{i_2 \psi / 2} + \bar{q}, \\ {}^{\mu, \dot{t}_2, \psi, q} f_{\lambda, \dot{t}_1, \varphi, p}(x) &= \mu e^{i_2 \psi / 2} f(\lambda e^{i_1 \varphi / 2} \cdot x \cdot e^{-i_1 \varphi / 2} + p) e^{i_2 \psi / 2} + q. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Главная наша задача состоит в том, чтобы найти выражения для инвариантных признаков каждой пары изображений,

$$\begin{aligned} & \left( \vec{f}(\vec{x}), {}^{\mu, \dot{t}_2, \psi, \bar{q}} \vec{f}_{\lambda, \dot{t}_1, \varphi, \bar{p}}(\vec{x}) \right), \quad \left( f(\vec{x}), {}^{\mu, \dot{t}_2, \psi, q} f_{\lambda, \dot{t}_1, \varphi, \bar{p}}(\vec{x}) \right), \\ & \left( \vec{f}(x), {}^{\mu, \dot{t}_2, \psi, \bar{q}} \vec{f}_{\lambda, \dot{t}_1, \varphi, p}(x) \right), \quad \left( f(x), {}^{\mu, \dot{t}_2, \psi, q} f_{\lambda, \dot{t}_1, \varphi, p}(x) \right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

неизменных при всех возможных значениях параметров  $\mu, \lambda, \dot{t}_1, \dot{t}_2, \varphi, \psi, \bar{p}, \bar{q}, p, q$ .

## 5.4. Преобразования Фурье Клиффорда

В 1981 году кватернионы и гиперкомплексные числа Клиффорда были одновременно и независимо предложены Лабунцом [52] и Соммом [53-54] для синтеза кватернионно-значных и Клиффордово-значных преобразований Фурье. Кватернионные преобразования Фурье, предложенные Лабунцом, были над телом вещественных кватернионов  $\mathbb{H}[\mathbf{R}]$  и над телом модулярных кватернионов (т.е. над  $\mathbb{H}[\mathbf{GF}(p)]$ ). Они обобщали классические дискретные преобразования Фурье и Фурье-Галуа. Эрнст [55] и Делсук [56] несколько позднее в 1981, предложили бикомплексное преобразование Фурье над 4D коммутативной бикомплексной алгеброй  $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ . Заметим, что бикомплексная алгебра существенным образом отличается от кватернионной алгебры. Если первая является коммутативной, то вторая является первой простейшей некоммутирующей алгеброй. По этой причине, преобразования Эрнста и Делсука являются обычными преобразованиями Фурье над прямой суммой комплексных чисел (дуплексным преобразованием Фурье) и существенным образом отличаются от кватернионных преобразований Фурье.

При построении преобразований Фурье-Клиффорда обычно в качестве  $\sqrt{-1}$  используют те базисные гипермнимые единицы  $\dot{i} = J_s$  для которых  $J_s^2 = -1$  ( $s = 1, 2, \dots, v_-$ ). В результате получают дискретное преобразование Фурье [57-60]:

$$\mathcal{E}_N^{Jkn} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + J(\alpha_k, \varphi_k, \theta_k) \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right),$$

Новая идея были предложены в 1998-1999 в статьях Лабунца [61] и Сангвайна [62]. Ими был предложен выбор не классических мнимостей  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  кватернионной алгебры, для которых имеет место равенства  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ , а всех возможных корней  $\dot{i}_0 = \dot{i}_0(\alpha_0, \varphi_0, \theta_0)$ ,  $\dot{i}_1 = \dot{i}_1(\alpha_1, \varphi_1, \theta_1), \dots, \dot{i}_{N-1} = \dot{i}_{N-1}(\alpha_{N-1}, \varphi_{N-1}, \theta_{N-1})$  из  $-1$  в алгебре кватернионов для создания многопараметрических и дробных преобразований Фурье-Гамильтона (см. сферу из мнимых единиц на

рис. 10). Дело в том, что в алгебре кватернионов  $\text{Alg}_4^{(2,0,0)}(\mathbf{R} | J_1, J_2)$  кроме базисных гипермнимых единиц  $J_1 = \mathbf{i}, J_2 = \mathbf{j}, J_3 = J_1 J_2 = \mathbf{k}$  все чисто векторные кватернионы  $\dot{i} = xJ_1 + yJ_2 + zJ_3$  с единичной нормой ( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ) являются мнимыми единицами. Действительно, для них имеет место равенство  $\dot{i}^2 = (xJ_1 + yJ_2 + zJ_3)^2 = -1$ . Все они лежат на классической единичной сфере в трехмерном пространстве и параметризуются углами Эйлера  $\dot{i} = \dot{i}(\alpha, \varphi, \theta)$ . Новый класс преобразований Фурье-Гамильтона был предложен, где у каждой дискретной гармоники имелась своя классическая мнимая единица  $\dot{i}(\alpha, \varphi, \theta)$ :

$$\varepsilon_N^{\dot{i}_k kn} = \varepsilon_N^{\dot{i}_k(\alpha_k, \varphi_k, \theta_k)kn} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \dot{i}_k(\alpha_k, \varphi_k, \theta_k) \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right),$$

где  $\dot{i}_k = \dot{i}_k(\alpha_k, \varphi_k, \theta_k)$ . Как результат мы получаем широкое семейство многопараметрических преобразований Фурье-Гамильтона.

В этом разделе мы представляем унифицированный взгляд на многопараметрические преобразования Фурье-Клиффорда. Он основывается на параметризации мнимой единицы  $\dot{i} = \dot{i}(\boldsymbol{\theta}) = \dot{i}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M) \triangleq \sqrt{-1}$  в алгебре Клиффорда, где  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M) \in \text{Tor}_M[0, 2\pi] = [0, 2\pi]^M$  - суть вектор параметров (углов) псевдо-Римановой сферы  $\text{PRS}_{(u_+, v_-, w_0)}^{M-1}(+1)$ , либо псевдо-гиперболической сферы  $\text{PHS}_{(u_+, v_-, w_0)}^{M-1}(-1)$ .

С этой целью, мы заменяем классическую мнимую единицу  $i = \sqrt{-1} \in \mathbf{C}$  в обычном преобразовании Фурье [63]

$$\varepsilon_N^{ikn} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

на обобщенную многопараметрическую мнимую единицу  $\dot{i}(\boldsymbol{\theta}) \in \text{Alg}_{2^m}^{(u_-, v_+, w_0)}$ :

$$\varepsilon_N^{\dot{i}(\boldsymbol{\theta})kn} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) + \dot{i}(\boldsymbol{\theta}) \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right). \quad (5.26)$$

Когда набор параметров  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$  полностью пробегает псевдо-Риманову сферу, создается ансамбль Фурье-Клиффорда преобразований.

**5.4.1. Дискретные преобразования Фурье-Клиффорда.** Рассмотрим экспоненциальное отображение

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^m}{m!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}.$$

Ясно, что для  $x \equiv a \in \mathbf{R}$ ,  $\exp(x) = e^a$  является обычным вещественным отображением на  $\mathbf{R}$ . В частности, если  $0 \in \mathbf{R}$  есть нулевой элемент, то  $\exp(0) = 1$ .

**Теорема 5.9.** Если  $x = i$ , где  $i = i_-, i_+, i_0 \in \tilde{\text{Alg}}_{2^k}^{(u, v_+, w_0)}$ , то

$$\exp(\alpha i) = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha),$$

**Доказательство.** Так как  $i^2 = s = -1, 0, +1$ , то  $i^{2k} = s^k$  и  $i^{2k+1} = s^k i$ . Следовательно

$$\begin{aligned} \exp(\alpha i) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha i)^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha i)^{2k}}{2k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha i)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{2k!} \alpha^{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{(2k+1)!} \alpha^{2k+1} = \\ &= \text{COS}(\alpha) + i \cdot \text{SIN}(\alpha) = \begin{cases} \cos(\alpha) + i_- \sin(\alpha), & i = i_-, \\ \text{cosg}(\alpha) + i_0 \text{sing}(\alpha), & i = i_0, \\ \cosh(\alpha) + i_+ \sinh(\alpha), & i = i_+, \end{cases} \end{aligned}$$

**Теорема 5.10.** Для  $x = a + i$  мы имеем

$$\exp(\alpha x) = \exp(\alpha(a + i)) = e^{a\alpha} \exp(\alpha i) = e^{a\alpha} (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha).$$

В общем случае

$$\begin{aligned} \exp(\alpha x_1) \exp(\beta x_2) &\neq \exp(\beta x_2) \exp(\alpha x_1), \\ \exp(\alpha x_1) \exp(\alpha x_2) &\neq \exp(\alpha x_2) \exp(\alpha x_1). \end{aligned}$$

Однако,  $\exp(\alpha i) \exp(\beta i) = \exp((\alpha + \beta)i)$ ,

**Теорема 5.11.** Для  $x = a + i$ ,

$$\exp(-\alpha(a + i)) = \left[ \exp(\alpha(a + i)) \right]^{-1}.$$

**Доказательство.** Действительно,

$$\exp(-\alpha(a + i))\exp(\alpha(a + i)) = \exp((\alpha - \alpha)(a + i)) = 1.$$

**Следствие 1.** (формула Муавра). Пусть  $x = i$ , тогда

$$[\exp(\alpha i)]^k = \exp(\alpha k i), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Согласно теореме 5.11, для  $\alpha \in \mathbf{R}$  и для  $i_-(\theta)$  мы имеем

$$\exp(i_-(\theta)\alpha) = \cos \alpha + i_-(\theta) \sin \alpha.$$

Для дискретных значений  $\alpha = \alpha_k = 2\pi k / N$  ( $k = 0, 1, \dots, N-1$ ) мы получаем Клиффордо-значные дискретные гармоники:

$$e^{i_k(\theta_k) \frac{2\pi}{N} kn} = \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) + i_k(\theta_k) \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right),$$

где каждая гармоника  $e^{i_k(\theta_k) \frac{2\pi}{N} kn}$  имеет собственную мнимую единицу  $i_k(\theta_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Благодаря некоммутативному свойству Клиффордова умножения существует два различных типа Фурье-Клиффорда преобразований: лево- и право-сторонние преобразования Фурье-Клиффорда (ЛС ФКТ и ПС-ФКТ).

**Определение 5.8.** Прямое левое и правое дискретные преобразования Фурье-Клиффорда функции  $f(n): [0, N-1] \rightarrow \text{Alg}_{2^k}^{(u, v, w)}$  определяется следующим образом

$$f_{left}(k|\theta_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i_k(\theta_k) \frac{2\pi}{N} kn} f(n) = \mathfrak{F}_{left}^{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})} \{f(n)\},$$

$$f_{right}(k|\theta_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i_k(\theta_k) \frac{2\pi}{N} kn} = \mathfrak{F}_{right}^{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})} \{f(n)\},$$

где  $\mathfrak{F}_{left}^{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})}$ ,  $\mathfrak{F}_{right}^{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})}$  суть лево- и право сторонние преобразования Фурье-Клиффорда.

**Определение 5.9 .** Инверсные преобразования Фурье-Клиффорда суть

$$f(n) = \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{i_k(\theta_k)}{[i_k(\theta_{-k}) + i_k(\theta_k)]_L} e^{i_k(\theta_k) \frac{2\pi}{N} kn} f_{left}(k|\theta_k) = \left(\mathfrak{F}_{left}^{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})}\right)^{-1} \{f_{left}(k|\theta_k)\},$$

$$f(n) = 2 \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} f_{right}(k|\theta_k) e^{i_k(\theta_k) \frac{2\pi}{N} kn} \frac{i_k(\theta_k)}{[i_k(\theta_{-k}) + i_k(\theta_k)]_R} = \left( \mathfrak{F}_{right}^{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})} \right)^{-1} \left\{ f_{right}(k|\theta_k) \right\},$$

Мы видим, что  $\mathfrak{F}_{left}^{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})}$  and  $\mathfrak{F}_{right}^{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})}$  зависят от  $N$  множеств параметров  $(\theta_k)$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ .

#### 5.4.2. Дробные дискретные преобразования Фурье-Клиффорда.

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) является унитарным оператором следующей формы  $\mathcal{F}_N = \left[ e^{j2\pi kn/N} \right]_{k,n=1}^{N-1}$ . Оно обладает следующими важными

свойствами: его квадрат  $(\mathcal{F}^2 f)(n) = f(\frac{\ominus n}{N})$  является инверсным оператором

по модуль  $N$ , и его четвертая степень  $(\mathcal{F}^4 f)(n) = f(n)$ , является

тождественным преобразованием, следовательно,  $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}^{-1}$ . Поэтому

оператор  $\mathcal{F}$  генерирует циклическую группу порядка 4:

$$\left\{ \mathcal{F}^a \right\}_{a \in \{0, 1, 2, 3\}} = \{ I, \mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2, \mathcal{F}^3 \}.$$

Идея дробной степени оператора Фурье  $\mathcal{F}$  возникла в математической литературе [64-72]. Эта идея основывается на собственной декомпозиции Фурье  $(N \times N)$ -матрицы

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N &= \left[ e^{j2\pi kn/N} \right] = \left[ \sum_{s=0}^{N-1} \lambda_s |h_s(k)\rangle \langle h_s(n)| \right] = \left[ \sum_{s=0}^{N-1} e^{2\pi js/4} |h_s(k)\rangle \langle h_s(n)| \right] = \\ &= \mathbf{U} \left\{ \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}) \right\} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U} \Lambda \mathbf{U}^{-1}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{U} = \left[ |h_0(k)\rangle, |h_1(k)\rangle, \dots, |h_{N-1}(k)\rangle \right]$  - матрица собственных векторов, а

$|h_s(k)\rangle$  и  $\langle h_s(n)|$  собственные вектор-столбцы и вектор-строки, а

$\lambda_s = e^{j2\pi s/4} = j^s$  и  $h_l(n)$  - суть собственные значения и собственные функции

(в форме дискретных функций Эрмита).

Непрерывное семейство дробных преобразований Фурье (ДрПФ)

$\left\{ \mathcal{F}^a \right\}_{a \in [0, 4)}$  строится путем замены каждого  $s$ -го собственного значения

$\lambda_s = e^{j2\pi s/4}$  его  $a$ -той степенью  $\lambda_s^a = e^{jsa2\pi/4}$ , для  $a$  между 0 и 4, или  $\alpha$ -ой

степенью  $\lambda_s^\alpha = e^{js\alpha}$  для  $\alpha$  между 0 и  $2\pi$ , где  $\alpha = a\pi/2$ . Собственные значения стандартного ДПФ  $\mathcal{F}_N$  являются конями четвертой степени из единицы  $\lambda_s \in \left\{ e^{j2\pi s/4} \right\}_{s=0}^3 \in \{\pm 1, \pm j\}$ . В результате  $N$ -мерное пространство сигналов делится на четыре инвариантных относительно действия ДПФ подпространства, чьи размерности  $N_s$  ( $s=0,1,2,3$ ) имеют следующие значения  $N_0 = M+1$ ,  $N_1 = M-1$ ,  $N_2 = M$ ,  $N_3 = M$  для размерности  $N = 2^N = 4M$ .

Пусть функция  $s(n): \{0,1,2,\dots,N-1\} \rightarrow \{0,1,2,3\}$  описывает распределение собственных значений вдоль главной диагонали  $\mathbf{Diag}(e^{js(n)\alpha})$ . Она принимает  $M+1$  раз значение 0,  $M-1$  раз значение 1, и по  $M$  раз значения 2 и 3.

**Определение 5.10.** Дискретное классическое дробное преобразование Фурье определяется как

$$\mathcal{F}^\alpha = \left[ e_k^{(\alpha)}(n) \right] := \mathbf{U} \left\{ \mathbf{Diag} \left( e^{js(m)\alpha} \right) \right\} \mathbf{U}^{-1} = \sum_{m=0}^{N-1} e^{js(m)\alpha} |h_m(k)\rangle \langle h_m(n)|,$$

если  $s(m) = m$ , то мы получаем дробное преобразование Фурье-Баргмана [66]:

$$\mathcal{BF}^\alpha = \left[ be_k^{(\alpha)}(n) \right] := \mathbf{U} \left\{ \mathbf{Diag} \left( e^{jm\alpha} \right) \right\} \mathbf{U}^{-1} = \sum_{m=0}^{N-1} e^{jm\alpha} |h_m(k)\rangle \langle h_m(n)|.$$

Идентичное и классическое преобразование Фурье являются частными случаями этого преобразования. Они получаются для  $\alpha = 0$  ( $\mathcal{F}^0 = I$ ) и  $\alpha = \pi/2$  ( $\mathcal{F}^{\pi/2} = \mathcal{F}$ ), соответственно.

**Определение 5.11.** Дискретное преобразование типа

$$\mathcal{F}^{(\mathbf{a})} = \mathcal{F}^{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})} = \mathbf{U} \left\{ \mathbf{diag} \left( e^{js(m)\alpha_m} \right) \right\} \mathbf{U}^{-1} = \sum_{m=0}^{N-1} e^{js(m)\alpha_m} |h_m(k)\rangle \langle h_m(n)|,$$

где  $\mathbf{a} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})$  называется многопараметрическим ДПФ.

### 5.4.3. Многопараметрические преобразования Фурье-Клиффорда.

Пусть гармоники Фурье-Клиффорда  $e^{i_k(\theta_k) \frac{2\pi}{N} kn}$  имеют одинаковые мнимые единицы  $i_k(\theta_k) \equiv i(\theta)$ ,  $\forall k = 0, 1, \dots, N-1$ . Тогда матрицы Фурье-Клиффорда  $\mathfrak{F}_{left}^{(\theta_1, \dots, \theta_{N-1})}$

и  $\mathfrak{F}_{right}^{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})}$  содержат коммутативные друг с другом матричные элементы  $e^{-i(\theta) \frac{2\pi}{N} kn}$ . Следовательно матрицы  $\mathfrak{F}_{left}^{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})}$  и  $\mathfrak{F}_{right}^{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})}$  имеют одинаковые с обычным ДПФ реально-значные собственные функции и Клиффордо-значные собственные значения  $\left\{ e^{2\pi i(\theta)s/4} \right\}_{s=0}^3 = \left\{ \dot{t}^s(\theta) \right\}_{s=0}^3$ . Поэтому

$$\left[ e^{-i(\theta) \frac{2\pi}{N} kn} \right] = \left[ \sum_{s=0}^{N-1} e^{2\pi i(\theta)s/4} |h_s(k)\rangle \langle h_s(n)| \right] = \left[ \sum_{s=0}^{N-1} \dot{t}^s(\theta) |h_s(k)\rangle \langle h_s(n)| \right]$$

и мы можем легко определить дробное преобразование Фурье-Клиффорда.

**Определение 5.12.** Для одиночного параметра  $\alpha \in \mathbf{Tor}_{2\pi}^1$  дробное преобразование Фурье-Клиффорда с классической и Баргмановской структурами ( $s(m) = m$ ) определяются как

$${}^{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})} \mathcal{F}_C^\alpha = \left[ \sum_{m=0}^{N-1} e^{i(\theta_m)s(m)\alpha} |h_m(k)\rangle \langle h_m(n)| \right] = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Diag} \left( e^{i(\theta_m)s(m)\alpha} \right) \cdot \mathbf{U}^{-1}.$$

**Определение 5.13.** Для  $N$  параметров  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}) \in \mathbf{Tor}_{2\pi}^N$  следующее преобразование

$${}^{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})} \mathcal{F}_C^{(\alpha)} = \left[ \sum_{m=0}^{N-1} e^{i(\theta_m)s(m)\alpha_m} |h_m(k)\rangle \langle h_m(n)| \right] = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Diag} \left( e^{i(\theta_m)s(m)\alpha_m} \right) \cdot \mathbf{U}^{-1},$$

называется многопараметрическим преобразованием Фурье-Клиффорда.

Благодаря некоммутативному свойству умножения в алгебре Клиффорда существуют дробные лево- и право-сторонние одно- и многопараметрические преобразования функции  $\mathbf{f}(n): [0, N-1] \rightarrow \mathbf{Alg}_{2^k}^{(u_-, v_+, w_0)}$ .

**Определение 5.14.** Многопараметрические прямые дискретные лево- и право-сторонние многопараметрические преобразования Фурье функции

$\mathbf{f}(n): [0, N-1] \rightarrow \mathbf{Alg}_{2^k}^{(u_-, v_+, w_0)}$  определяются как

$$\begin{aligned} \left| {}^{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})} \mathbf{f}_{left}^{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})} (k) \right\rangle &= {}^{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})} \mathfrak{F}_{left}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1})} \left| \mathbf{f}(n) \right\rangle = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} |h_m(k)\rangle \left( e^{i(\theta_m)s(m)\alpha_m} \langle h_m(n) | \mathbf{f}(n) \rangle \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1}) \mathfrak{F}_{right}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1})}(k)\rangle &= |(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1}) \mathfrak{F}_{right}^{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})} | f(n)\rangle = \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} |h_m(k)\rangle \langle h_m(n) | f(n)\rangle e^{i(\theta_m) s(m) \cdot \alpha_m}. \end{aligned}$$

**5.4.4. Быстрые многопараметрические преобразования Фурье Клиффорда.** Классическое дискретное преобразование Фурье имеет следующую быструю процедуру

$$\mathcal{F} = \prod_{r=1}^n \left( \left[ I_{2^{r-1}} \otimes \left( I_{2^{n-r}} \oplus \Delta_{2^{n-r}} \left( \varepsilon^{2^{r-1}} \right) \right) \right] \cdot \left[ I_{2^{r-1}} \otimes \mathbf{F}_2 \otimes I_{2^{n-r}} \right] \right), \quad (5.27)$$

где  $\varepsilon = e^{i2\pi/N}$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_{2^{n-r}} \left( \varepsilon^{2^{r-1}} \right) &= \mathbf{Diag}_{2^{n-r}} \left( 1, \varepsilon^{2^{r-1} \cdot 1}, \varepsilon^{2^{r-1} \cdot 2}, \dots, \varepsilon^{2^{r-1} \cdot (2^{n-r} - 1)} \right) = \\ &= \mathbf{Diag}_{2^{n-r}} \left( 1, e^{i2\pi 2^{r-1} \cdot 1/N}, e^{i2\pi 2^{r-1} \cdot 2/N}, \dots, e^{i2\pi 2^{r-1} \cdot (2^{n-r} - 1)/N} \right), \end{aligned}$$

и  $\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ . Быстрое многопараметрическое преобразование Фурье-

Клиффорда основывается на выражении (5.27), где

$$\begin{aligned} &\mathbf{Diag}_{2^{n-r}} \left( 1, e^{i2\pi 2^{r-1} \cdot 1/N}, e^{i2\pi 2^{r-1} \cdot 2/N}, \dots, e^{i2\pi 2^{r-1} \cdot (2^{n-r} - 1)/N} \right) \\ &\quad \Downarrow \\ &\mathbf{Diag}_{2^{n-r}} \left( 1, e^{i_1(\theta_1) 2\pi 2^{r-1} \cdot 1/N}, e^{i_2(\theta_2) 2\pi 2^{r-1} \cdot 2/N}, \dots, e^{i_{2^{n-r}-1}(\theta_{2^{n-r}-1}) 2\pi 2^{r-1} \cdot (2^{n-r} - 1)/N} \right) = \\ &\quad = \Delta_{2^{n-r}} \left( \varepsilon_{\theta}^{2^{r-1}} \right), \end{aligned}$$

и  $\varepsilon_{\theta}^{2^{r-1}} := e^{i(\theta) 2\pi 2^{r-1} / N}$ . Как результат мы получаем быстрое многопараметрическое преобразование Фурье-Клиффорда

$$\mathcal{F}_C = \prod_{r=1}^n \left( \left[ I_{2^{r-1}} \otimes \left( I_{2^{n-r}} \oplus \Delta_{2^{n-r}} \left( \varepsilon_{\theta}^{2^{r-1}} \right) \right) \right] \cdot \left[ I_{2^{r-1}} \otimes \mathbf{F}_2 \otimes I_{2^{n-r}} \right] \right),$$

Оно является  $3n \cdot 2^{n-1}$ - параметрическим комплексно-значным Фурье-подобным преобразованием с  $n \cdot 2^{n-1}$   $\varphi$ -параметрами.



## ЭПИЛОГ

Мы знаем, что животные способны почти мгновенно и эффективно распознавать окружающие объекты. Для инженера важно описать это явление на таком математическом языке, который позволил бы ему построить техническую систему способную работать не менее эффективно, чем исходная биологическая система.

Главной целью настоящей работы является демонстрация того факта, что Природа (возможно посредством эволюции) научалась использовать свойства гиперкомплексных алгебр Клиффорда для конструирования различных визуальных систем животных. В связи с этим в первой части нашей работы были изложены математические основы гиперкомплексных чисел.

Мы не согласны с Л. Кронекером, утверждавшим, что *“Бог создал целые числа, а все остальное – дело рук человеческих”*. Мы предполагаем, что Бог был первым инженером, который знал высшую алгебру и использовал теорию гиперкомплексных чисел для проектирования визуальных систем живых существ.



## Литература

1. Labunets V.G. Clifford Algebras as Unified language for multicolor image processing and pattern recognition // Computational Noncommutative Algebra and Applications. NATO/Advanced Study Institute. – 2003. – P. 197–225.
2. Labunets V.G., Rundblad E.V. and Astola J. Chapter 25. Is the brain a Clifford algebra quantum computer? // Applied Geometrical Algebras in Computer Science and Engineering. (L. Dorst, C. Doran, J. Lasenby, Editors), Birkhauser. – 2002. – P. 486-495.
3. Labunets-Rundblad E.V., Labunets V.G. and Astola J. Is the visual cortex a fast Clifford algebra quantum computer? // Clifford Analysis and Its Applications, II. Mathematics, Physics and Chemistry, NATO Science Series. – 2001. – Vol.25. – P. 173-183.
4. Labunets V.G., Rundblad E.V., and Astola J. Is the brain «Clifford algebra quantum computer? // Proc. of SPIE Materials and Devices for Photonic Circuits. – 2001. – Vol. 4453. – P. 134-145.
5. Alparone L, Baronti S., Garzelli F. and Nencini F. A global quality measurement of pan-sharpened multispectral imagery // IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. – 2004. – Vol.1. – No. 4. – P. 313–317.
6. Pohl C., Genderen J.L. Multisensor image fusion in remote sensing: concepts, methods, and applications // Int. J. Remote Sens. – 1998. – Vol.19. – No.5. – P. 823–854.
7. Chavez P. S., Sides S. C., Anderson J. A. Comparison of three different methods to merge multiresolution and multispectral data: Landsat TM and SPOT panchromatic // Photogramm. Eng. Remote Sens. – 1991. – Vol. 57. – No. 3. – P. 295–303.
8. Wald L., Ranchin T., Mangolini M. Fusion of satellite images of different spatial resolutions: Assessing the quality of resulting images // Photogramm. Eng. Remote Sens. – 1997. – Vol. 63. – No. 6. – P. 691–699.

9. Kantor I.L., Solodnikov A.S. Hypercomplex Numbers, an Elementary Introduction to Algebras // New York, Springer-Verlag. – 1989. – 179 p.
10. Wedderburn J. H. On hypercomplex numbers // Proc. London math. soc. – 1908. – 6. – P. 77.
11. Clifford N.K. Mathematical papers // N.Y. – 1968. – 320 p.
12. Van der Varden B. L. Algebra // Springer, Verlag, New York. – 1968. – 457 p.
13. Hestenes D., Sobczyk G. Clifford Algebra to geometric calculus. A unified language for mathematics and Physics // American Journal of Physics. – 1985. – Vol. 53. – 5. – P.7-32.
14. Sobczyk G. Hyperbolic number plane // The college Mathematical Journal – 1995. – Vol. 26. – 4. – P. 268.
15. Fjelstad P. Extending relativity via the perplex numbers // Am. J. Phys. – 1986. – 54. – 5. – P. 4-16.
16. Catoni F., Cannata R., Catoni V. and Zampetti P. Hyperbolic trigonometry in two dimensional space-time geometry // N. Cim. B. – 2003. – Vol. 118. – P. 475-492.
17. Catoni F., Cannata R., Catoni V. and Zampetti P. Two-dimensional hyper complex numbers and related trigonometries and geometries // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2004. – 14. –1. – P. 47.
18. Catoni F., Zampetti P. Two dimensional space-time symmetry in hyperbolic functions // N. Cim. B. – 2000. – Vol. 115. – P. 14-33.
19. Keller J. Complex, duplex and real Clifford algebras // Advances in Applied Clifford Algebras. – 1994. – Vol. 4. – P. 132-156.
20. Hamilton R.W. On quaternions // Proceedings of the Royal Irish Academy. – 1844. – Nov.11. – Vol.3. – 1847. – P. 1-16.
21. Hamilton W.R. Lectures on quaternions // Dublin, 1853. – 886 p.
22. Hamilton W. R. Elements of Quaternions // Chelsea Pub. Com. – 1969. – New York. –626 p.
23. Baez J. Octonions // Bull. Amer. Math. Soc. – 2002. – P.145 205.

24. Toppan F. Division algebras and physics // preprint-CBPF-MO-002/01.
25. Ward J.P. Quaternions and Cayley numbers: Algebra and Applications // Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers. – 1997. – 237 p.
26. Ablamowicz R., Sobczyk G. Lectures on Clifford (geometric) algebras and applications // Birkhauser, Basel. – 2004. – 188 p.
27. Angulo J. Quaternion colour representations and derived total orderings for morphological operators // Proc. of the CGIV. – 2008. – P. 417–422.
28. Агостон А. Теория цвета и ее применение в искусстве и дизайне. – М.: Мир. –1982. – 181 с.
29. Соколов Е.Н., Измайлов Ч.А. Цветовое зрение. – М.: Изд. Московского университета. – 1982. – 175 с.
30. Malakara D. Color vision and colorimetry. Theory and applications // Bellingham, Washington, SPIE. – 2002. – 164 p.
31. Newton S.I. Opticks // New York: N.Y. Dover Publications, Inc.–1952.– 458 p.
32. Goethe J.W. Theory of colours // London: John Murray. – 1840. – 423 p.
33. Maxwell J.C. On the theory of compound colours, and the relations of the colours of the spectrum \ \ Philosophical Transactions of the Royal Society. – 1860. – 244 p.
34. Young T. On the theory of light and colours // Philosophical Transactions of the Royal Society. – 1802. – P. 12– 48.
35. Helmholtz. H. L. Fon the theory of compound colours // Philosophical Magazine Series. – 1852. – 4 (28). – P. 519–534.
36. Morgan A. On the foundation of algebra // Trans. Cambridge Philos. Soc. – 1343. – No 3. – P. 948-1254.
37. Greaves Ch. On algebraic triplets // Proc. Irisn Acad. –1847. – **3**. – P. 51 – 108.
38. Olariu S. Complex numbers in three Dimensions // arXiv: math. CV/0008120. - Vol. 1. – 16 Aug. – 2000. – 42 p.
39. Dubrovski A., Volkov G. Ternary numbers and algebras // arXiv: hep-th/0608073. – V.2. –14. – Aug. 2006.

40. Kerner R. Ternary algebraic structures and their applications in physics // Proceedings of the Conference ICGTMP.–Dubna.–2000. – math-ph/0011023.
41. Lipatov L.N., Trautenberg M.R., Volkov G.G. On the ternary complex analysis and its applications // arXiv:0711.0809v1.– 6. – Nov. – 2007.
42. Mac Adams D.L. Uniform color scales // J. Opt. Soc. Am. – 1974. – 64. – P.1691–1702.
43. Rundblad E., Nikitin I, Labunets V. Unified approach to Fourier-Clifford-Prometheus sequences, transforms and filter banks // Computational Noncommutative Algebra and Applications, NATO Advanced Study Institute– 2003. – P. 389 – 400.
44. L.-Rundblad E., Maidan A., Novak P. Fast color Wavelet-Haar-Prometheus transforms for image processing // Computational Noncommutative Algebra and Applications. – NATO/Advanced Study Institute. – 2003. – P. 401– 410.
45. Labunets V.G., Rundblad E.V., Astola J. Fast invariant recognition of color 3D images based on spinor-valued moments and invariants // Proc. SPIE Vision Geometry X. – 2001. – Vol. 4476. – P. 22–33.
46. Labunets V.G., Maidan A., Rundblad-Labunets E.V. and Astola J. Colour triplet-valued wavelets and splines // Image and Signal Processing Analysis. – ISPA'01. – 2001. – June 19-21. – Pula. – P. 535-541.
47. Labunets V.G., Maidan A., Rundblad-Labunets E.V. and Astola J. Colour triplet-valued wavelets, splines and median filters // Spectral Methods and Multirate Signal Processing // SMMSP'2001. – Pula. – P. 61-70.
48. Labunets-Rundblad E.V. Fast Fourier-Clifford transforms design and application in invariant recognition // PhD thesis, Tampere University Technology, Tampere, Finland. – P. 262.
49. Rundblad E.V., Labunet V.G., Astola J., Egiazaria K. and Polovnev S.V. Fast invariant recognition of color images based on Triplet-Fourier-Gauss transform // Proc. of Int. Conf. Computer Science and Information Technologies. – Yerevan, Armenia. – 2000. – P. 265–268.

50. Rundblad E.V., Labunets V.G. Fast invariant recognition of multicolor images based on Triplet-Fourier-Gauss transform // Second Int. Workshop on Transforms and Filter Banks. – Tampere, Finland, TICSP Series. – 1999. – 4. – P. 405–438.
51. Snygg J. Clifford algebra. A computation tool for physicistst // Oxford University Press. – 1977. – 335 p.
52. Labunets V.G. Quaternion number–theoretical transform // Devices and Methods of Experimental Investigations in Automation // Dnepropetrovsk: Dnepropetrovsk State University Press. – 1981. – P. 28–33.
53. Sommen F. A product and an exponential function in hypercomplex function theory // Applicable Analysis. –1981. – Vol. 12. – P. 13-26.
54. Sommen F. Hypercomplex Fourier and Laplace transforms I // Illinois Journal of Mathematics. – 1982. – Vol. 26(2). – P. 332-352.
55. Ernst R.R., Wokaun A., Bodenhausen G. Principles of nuclear magnetic resonance in one and two dimensions // International Series of Monographs on Chemistry. – Oxford University Press. – 1987. – 238 p.
56. Delsuc, M. A. Spectral representation of 2D NMR spectra by hypercomplex numbers // Journal of Magnetic Resonance.–1969.–Vol. 77(1).– P. 119–124.
57. Brackx F., De Schepper N., Sommen F. The 2-D Clifford–Fourier transform // Journal of Mathematical Imaging and Vision. – 2006.–Vol.26.–N.1.– P.5–18.
58. Brackx F, Schepper N., Sommen F. The Fourier transform in Clifford analysis // Advances in Imaging and Electron Physics.– 2009.– Vol.156. – P. 55–201.
59. De Bie H., De Schepper N. The fractional Clifford–Fourier transform // Complex Analysis and Operator Theory.–2012.–Vol.6.–No.5.–P. 1047–1067.
60. De Bie H., De Schepper N., Sommen F. The class of Clifford–Fourier transforms // Journal of Fourier Analysis and Applications.– 2011. – Vol. 17.– P.1198–1231.
61. Rundblad–Labunets E.V., Labunets V.G., Astola J. and Egiazarian K. Fast fractional Fourier–Clifford transforms // Second International Workshop on

Transforms and Filter Banks. – Tampere, Finland: TICSP Series. – 1999. – No.5. – P. 376–405.

62. Sangwine S.J., Ell T. A., Blackledge J.M. and Turner M.J. The discrete Fourier transform of a colour image // *Image Processing II Mathematical methods, algorithms and Applications*. – 1998. – P. 430–441.
63. Labunets V., Chasovskikh V. and Ostheimer N. All Fourier-Clifford Transforms // *2021 International Conference on Information Technology and Nanotechnology*. - 2021. - P. 1-8, doi: 10.1109/ITNT52450.2021.9649061.
64. Condon E.U. Immersion of the Fourier transform in a continuous group of functional transforms // *Proc. Nat. Acad. Sci.* – 1937. – Vol. 23. – P. 158-164.
65. Kober H., Wurzeln aus der Hankel- und Fourier und anderen stetigen transformationen // *Quart. J. Math.Oxford Ser.* – 1939. – Vol.10. – P. 45-49.
66. Bargmann V. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. Part 1 // *Commun. Pure Appl. Math.* – 1961. – Vol.14. – P. 187-214.
67. Namias V., The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics // *J.Inst. Math. Appl.* – 1980. – Vol.25. – P.241-265.
68. McBride A.C., Kerr F.H. On Namias' fractional Fourier transforms // *IMA J. Appl. Math.* – 1987. – Vol. 39. – P. 159-265.
69. Ozaktas H.M., Mendlovic D. Fourier transform of fractional order and their optical interpretation // *Opt. Commun.* – 1993. – Vol. 110. – P. 163-169.
70. Ozaktas H.M., Zalevsky Z., Kutay M.A. *The fractional Fourier transform* // Chichester: Wiley. – 2001. – 532 p.
71. Carracedo C. M., Alix M.S. *The theory of fractional powers of operators* // London, New York: Elsevier. – 2001. – 366 p.
72. Kumar K. Singh R. Khanna R. *Satellite Image Compression using Fractional Fourier Transform* // *International Journal of Computer Applications*. – 2012. – Vol.50. – No.3. – P. 20-25.



*Научное издание*

Лабунец Валерий Григорьевич

Часовских Виктор Петрович

**ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ МОЗГ КЛАССИЧЕСКИМ КОМПЬЮТЕРОМ,  
РАБОТАЮЩИМ В АЛГЕБРЕ КЛИФФОРДА? МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
ОСНОВЫ ТЕОРИИ**

Монография

ISBN 978-5-6045940-2-5



Технический редактор *Г.А. Акчурина*  
Компьютерная верстка *Г.А. Акчурина*

Подписано в печать 18.01.2022.  
Формат 60 x 84 1/16. Бумага офсетная. Печать плоская.  
Уч.-изд. л. 9,0. Усл. печ. л. 12,8. Печ. л. 13,8. Заказ 412. Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии ООО «Акдениз»