Задача о раскрое

Проблема оптимального раскроя возникает во многих производствах. В машиностроении, деревообработке, швейном производстве возникает необходимость раскроя материала. Простейшие задачи раскроя связаны с порезкой линейного материала (прутки), более сложная математическая задача имеет место при раскрое листового и объемного материала.

Из материала определенного размера необходимо выкроить m видов деталей i-го вида в количестве b_i штук. Эти детали могут выкраиваться n способами. При j-м варианте раскроя единицы материала выкраивается $a_{i,j}$ деталей i-го вида, а стоимость отходов при данном способе раскроя равна c_j.

Задача состоит в том, чтобы путем наиболее рационального раскроя имеющихся материалов свести эти отходы до минимума.

Обозначим через x_j количество единиц материала, раскраиваемых j-м способом. Экономико-математическая модель задачи:

$$\min L = \sum_{j=1}^{n} c_j * x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} * x_j \geq b_i; \quad i=1,..,m;$$

$$x_j \geq 0; \quad j=1,..n;$$

ПРИМЕР 1. **Раскрой одномерного материала**

Фирма получает от поставщиков прутки стального проката длиной 600 см. Согласно заявкам потребителей требуются заготовки трех видов в количестве: 150 тыс. шт. длиной 250 см., 140 тыс. шт. длиной 190 см., 48 тыс. шт. длиной 100 см.

Возможные варианты раскроя показаны в таблице 1.

Необходимо так разрезать прутки, чтобы обеспечить минимум отходов.

Таблица 1.

Вариант	Количество заготовок длиной			Отходы, см.
	250 см.	190 см.	100 см.	
1	2	-	1	-
2	1	1	1	60
3	-	3	-	30
4	-	2	2	20
5	-	1	4	10
6	-	-	6	-

Это задача целочисленного программирования. Обозначим через x_j — количество прутков, раскраиваемых по j-му варианту. Экономико-математическая модель задачи:

$$\min L = 60x_2 + 30x_3 + 20x_4 + 10x_5$$

$$2x_1 + x_2 = 150\,000;$$

$$x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 140\,000;$$

$$x_1 + x_2 + 2x_4 + 4x_5 + 6x_6 = 48\,000;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$$

ПРИМЕР 2. Раскрой листового материала.

Фирма получила от поставщиков 100 листов фанеры размером 2,5 x 1,5 м, которую нужно раскроить на прямоугольные заготовки А, Б, В размерами: А — 2 x 1 м, Б — 1 x 0,75 м, В — 0,5 x 0,5 м, в ассортименте 1:4:12.

Возможные варианты раскроя представлены на рис. 1.

Необходимо разработать оптимальный план раскроя фанеры, таблица 2.

Рис. 1.

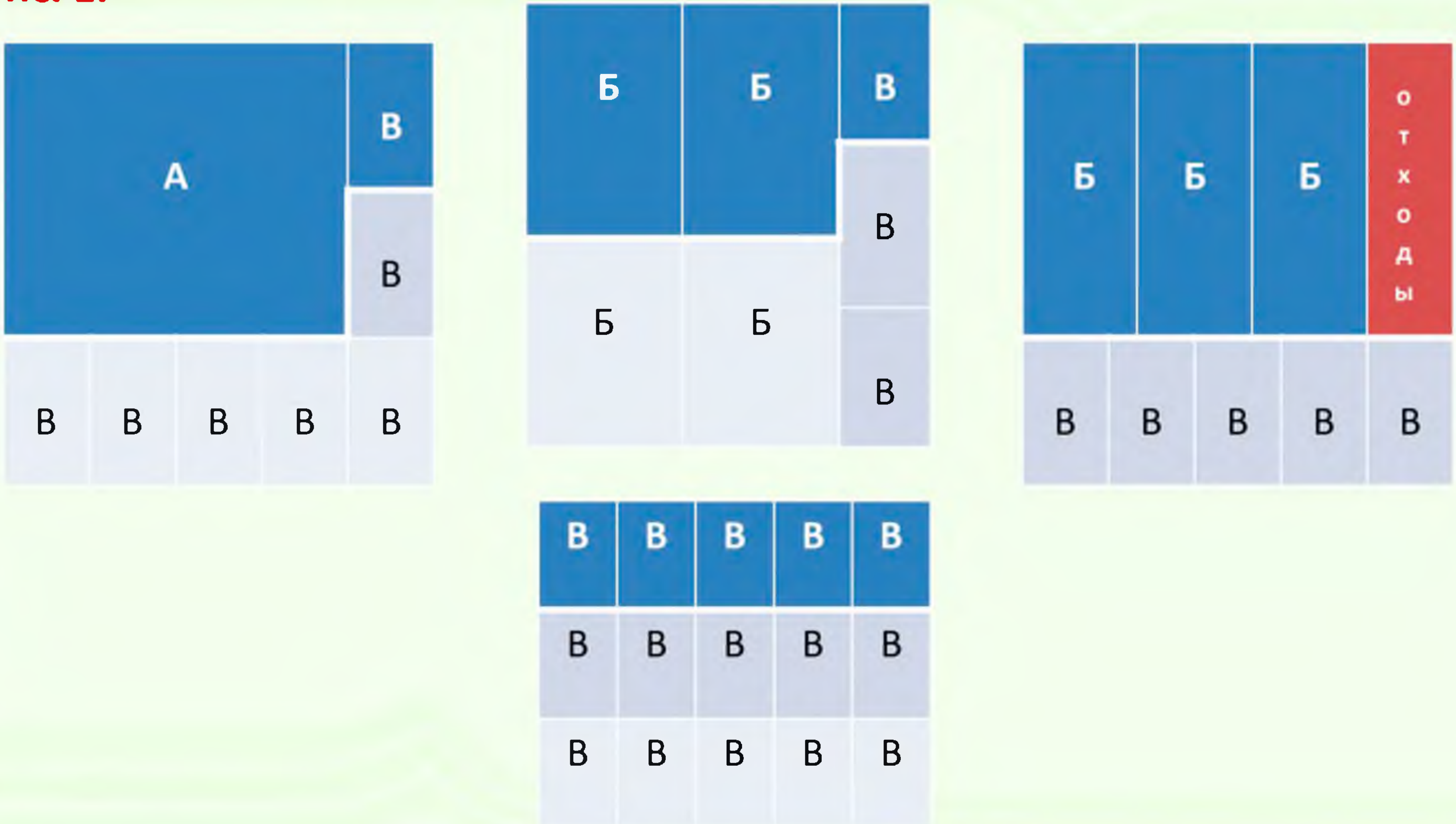

Таблица 2. Всевозможные варианты раскроя

Вариант	Количество заготовок			Отходы, м
	А	Б	В	
1	1	0	7	0
2	0	4	3	0
3	0	3	5	0,5
4	0	0	15	0

Это задача целочисленного программирования. Обозначим через x_j — количество листов, раскраиваемых по j-му варианту. Соотношение заготовок в ассортименте 1:4:12, следовательно, должно выполняться равенство:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{4x_2 + 3x_3}{4} = \frac{7x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 15x_4}{12}$$

Экономико – математическая модель задачи:

$$\min L = 0{,}5x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100;$$

$$4x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0;$$

$$5x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 15x_4 = 0;$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Оптимальное решение задачи: $\overline{X}$= (47, 47, 0, 6), т. е. для сокращения отходов нужно раскроить первым способом 47 листов, вторым — 37, четвертым — 6.